Dispense del corso di

Progetto dei sistemi di controllo

Corso di Laurea triennale in Ingegneria dell'Automazione

Università di Siena, Facoltà di Ingegneria

Parte I

Gianni Bianchini

Alberto Tesi

Marco Casini

PROGETTO DEI SISTEMI DI CONTROLLO

1. Introduzione.

2. Modellistica.

3. Studio del comportamento ingresso-uscita dei sistemi.

4. Analisi dei sistemi in retroazione.

5. Il problema del controllo.

6. Metodi classici di sintesi dei controllori.

TESTI DI RIFERIMENTO

1. S.K. Gupta: *Fondamenti di Automatica*, ed. italiana di M. Innocenti, Apogeo, Milano, 2002.

2. P. Bolzern, R. Scattolini, N. Schiavoni: *Fondamenti di Controlli Automatici*, McGraw-Hill Italia, Milano, 1998.

3. A. Isidori: *Sistemi di Controllo: seconda edizione*, Vol. I, Siderea, Roma, 1993.

4. G. Marro: *Controlli Automatici: quarta edizione*, Zanichelli, Bologna, 1992.

ALTRI TESTI

1. J.J. D'Azzo & C.H. Houpis: *Linear Control System Analysis and Design: Conventional and Modern*, McGraw-hill, New York, 1988.

2. R. Calimani & A. Lepschy: *Feedback. Guida ai cicli a retroazione: dal controllo automatico al controllo biologico*, Garzanti, 1990.

3. Di Stefano, Stubberud & Williams: *Regolazione Automatica*, Collana Schaum, Etas Libri, Milano, 1975.

4. R.C. Dorf: *Modern Control Systems: sixth edition*, Addison-Wesley, U.S.A., 1992.

5. G.F. Franklin, J.D. Powell & A. Emani-Naeini: *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, U.S.A., 1988.

6. G.F. Franklin, J.D. Powell & M.L. Workmann *Digital Control of Dynamic Systems: second edition*, Addison-Wesley, U.S.A., 1990.

7. A. Lepschy & U. Viaro: *Guida allo studio dei Controlli Automatici*, Patron, Bologna, 1983.

8. K. Ogata: *System Dynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, U.S.A., 1992.

9. A. Ruberti & A. Isidori: *Teoria della Stabilità: appunti dalle lezioni*, Siderea, Roma, 1977.

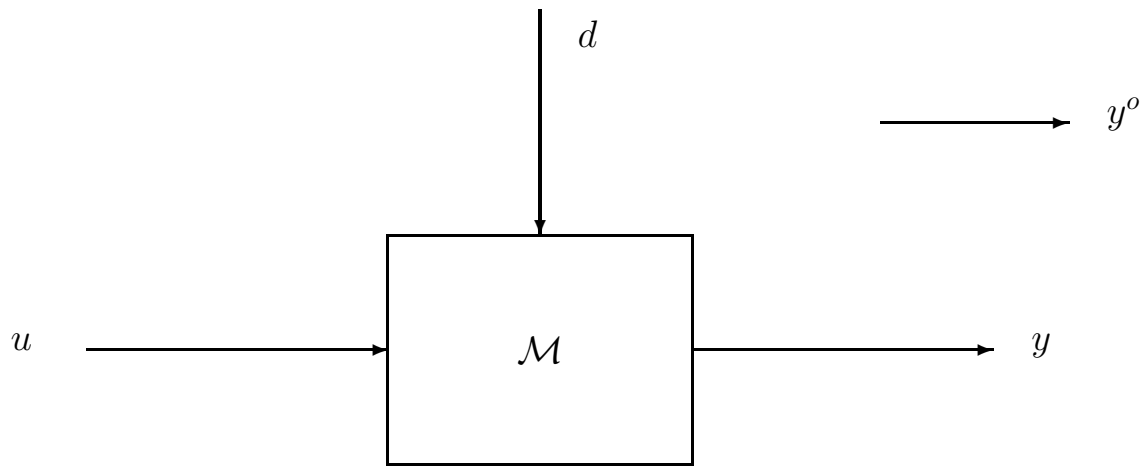
10. E. Fornasini & G. Marchesini, *Appunti di Teoria dei Sistemi*, Edizioni Libreria Progetto, Padova.

INTRODUZIONE

- Significato del termine Controlli Automatici: da *contra rotulus* (oggetto per la verifica) a *control* (imporre un comportamento desiderato).

- Elementi fondamentali del problema di controllo.
  - Sistema, processo o impianto sotto controllo.
  - Modello matematico: sistemi dinamici.
  - Variabili indipendenti o di ingresso: variabili di controllo e variabili incerte.
  - Variabili dipendenti o di uscita: variabili controllate e variabili misurate.
  - Variabili di riferimento.

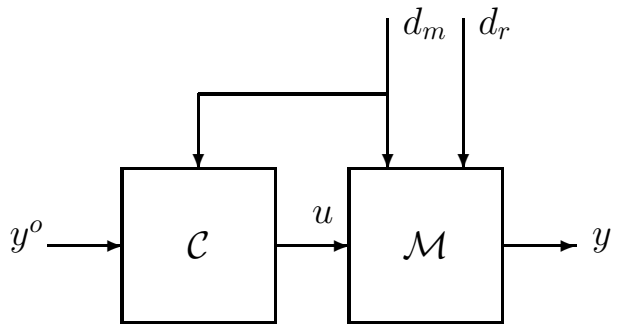
FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DEL CONTROLLO



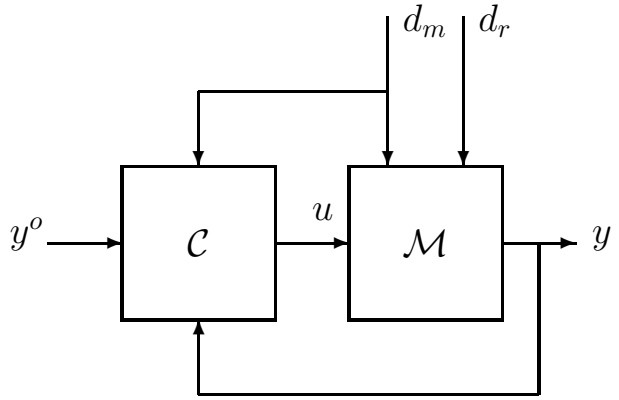
- Problema del controllo:
  - Determinare, ad ogni istante, il valore da attribuire alle variabili di controllo u in modo tale che l'andamento delle variabili controllate y risulti sufficientemente prossimo a quello desiderato y^o, qualunque sia, fra quelli ragionevolmente prevedibili, il valore o l'andamento delle variabili indipendenti incerte d.

- Esempi.
  - Controllo della temperatura di un forno.
  - Controllo del livello di un serbatoio.
  - Azionamento di un'antenna per telecomunicazione.
  - Controllo dell'assetto di un aeromobile.

CONTROLLORE



Schema di controllo ad anello aperto



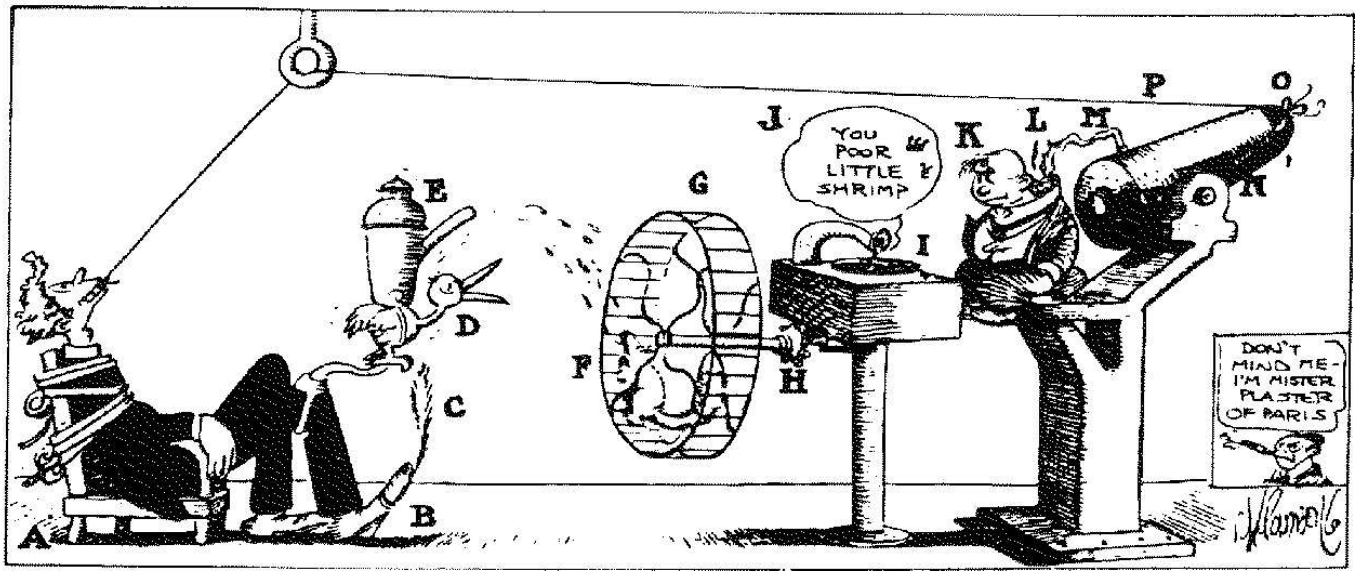
Schema di controllo ad anello chiuso (con *retroazione*)

LA RETROAZIONE

- Definizione (AIEE, 1951)

  Un sistema di controllo a retroazione è un sistema che tende a mantenere una prescritta relazione tra una variabile ed un'altra per mezzo della comparazione di opportune funzioni di tali variabili e impiegando la differenza per realizzare il controllo.

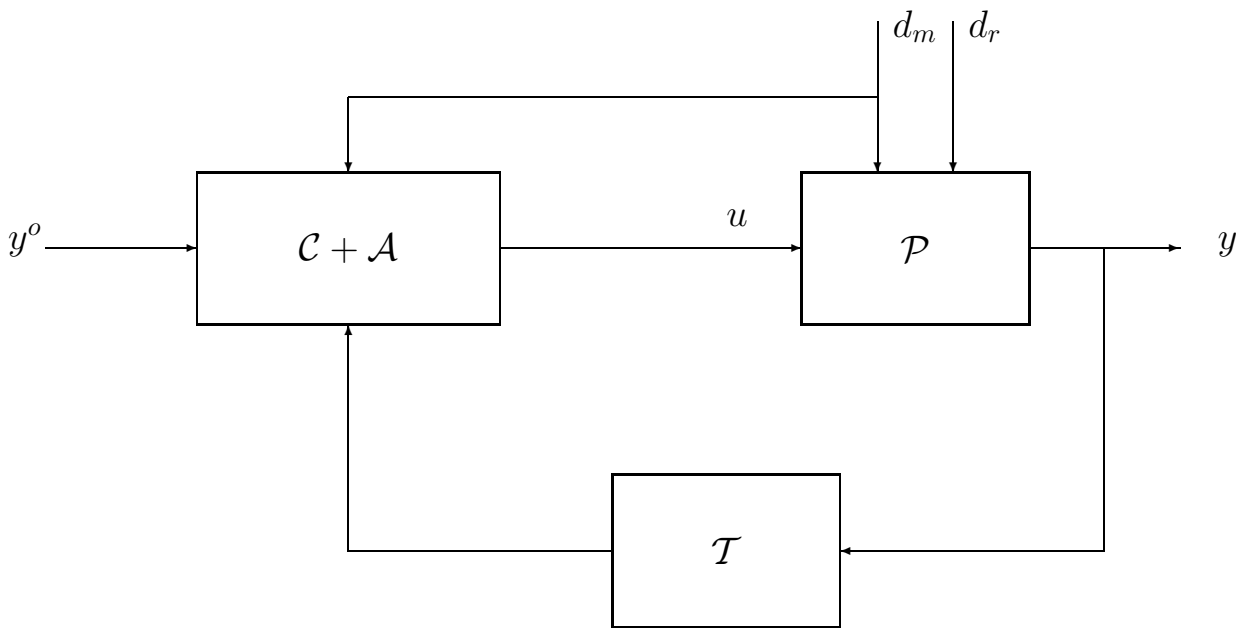
- Moltissimi sistemi sono rappresentabili con schemi di funzionamento ad anello chiuso



Fa' il dentista di te stesso!!!

- Sono propriamente detti sistemi di controllo a retroazione quelli in cui sono presenti e fisicamente distinti un elemento sensore ed uno di confronto.

SCHEMA DI CONTROLLO



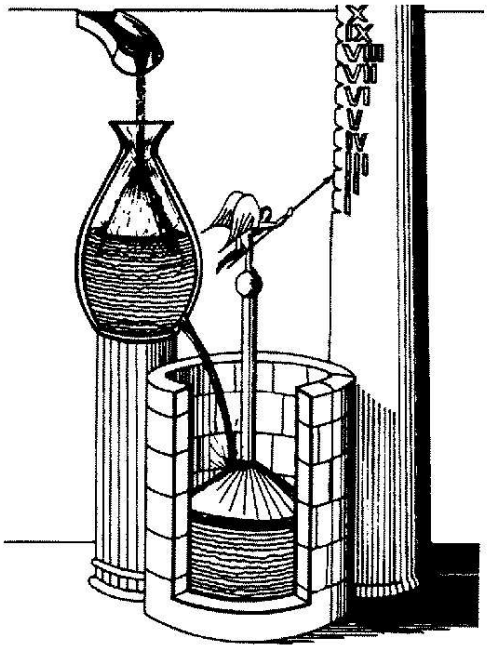
- $\mathcal{C}+\mathcal{A}$: controllore + attuatore.
- $\mathcal{P}$: Processo sotto controllo.
- $\mathcal{T}$: Trasduttore.
- y^o: Riferimenti.
- y: Variabili controllate (anche non misurate).
- u: Variabili di controllo.
- d_m: Disturbi misurabili
- d: Disturbi non misurabili

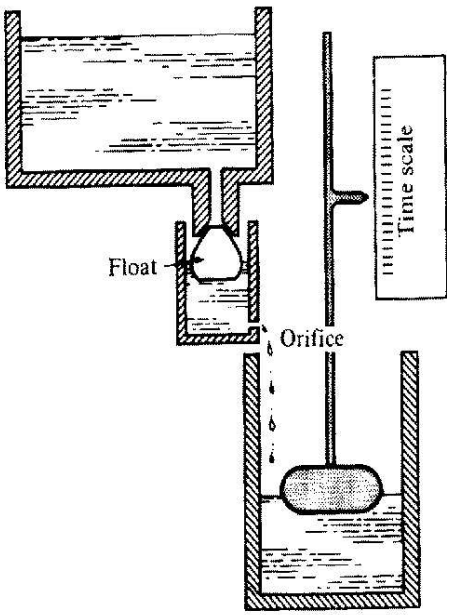
CENNI STORICI

- Antichità
- Drebbel, Incubatrice per uova, 1620 circa;
- Watt, Regolatore per macchine a vapore, 1787;
- Maxwell, Analisi della stabilità del regolatore di Watt, 1868;
- Routh, Analisi della stabilità per sistemi lineari, 1877;
- Lyapunov, Analisi della stabilità per sistemi nonlineari, 1890;
- Black, Amplificatore operazionale retroazionato, 1927;
- Nyquist, Criterio di stabilità per sistemi retroazionati, 1932;
- Bode, Metodi basati sulla risposta in frequenza, 1938;
- Wiener, Progetto di filtri ottimi, 1942;
- Hurewicz, Sistemi a dati campionati, 1947;
- Nichols, Carta di Nichols, 1947;
- Evans, Luogo delle radici, 1948;
- Pontryagin, Principio del massimo, 1956;
- Bellman, Programmazione Dinamica, 1957;
- Kalman, Controllo e filtraggio ottimo, 1960;
- Dal 1960 ad oggi Teoria Moderna.

OROLOGIO DI KTESIBIOS (III sec. A.C)

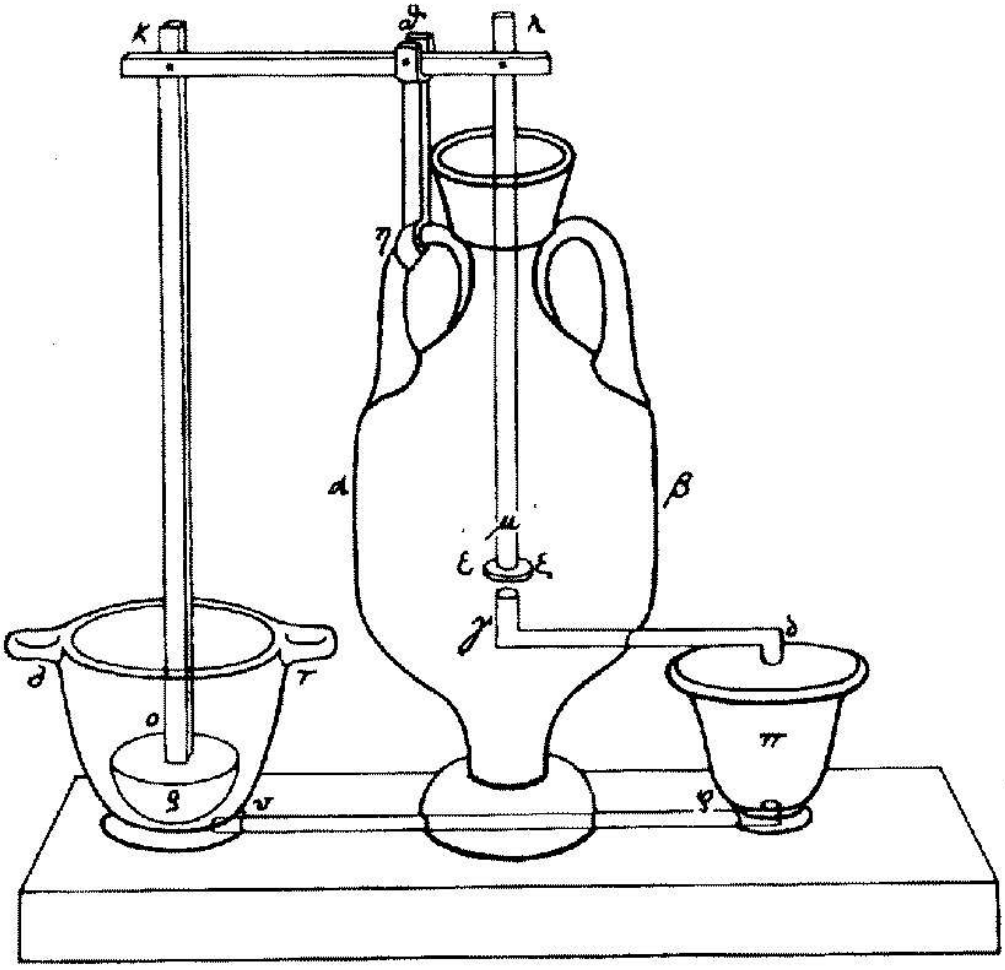
Scopo: mantenere l'altezza nel vaso di alimentazione ad un valore di riferimento





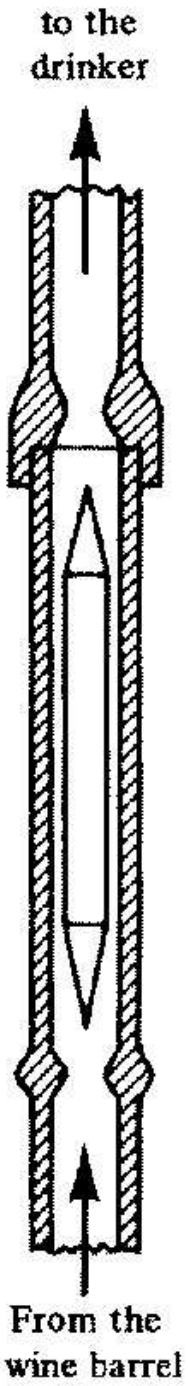
REGOLAZIONE A GALLEGGIANTE (I sec. D.C)

Sistema automatico per la mescita del vino (Erone)



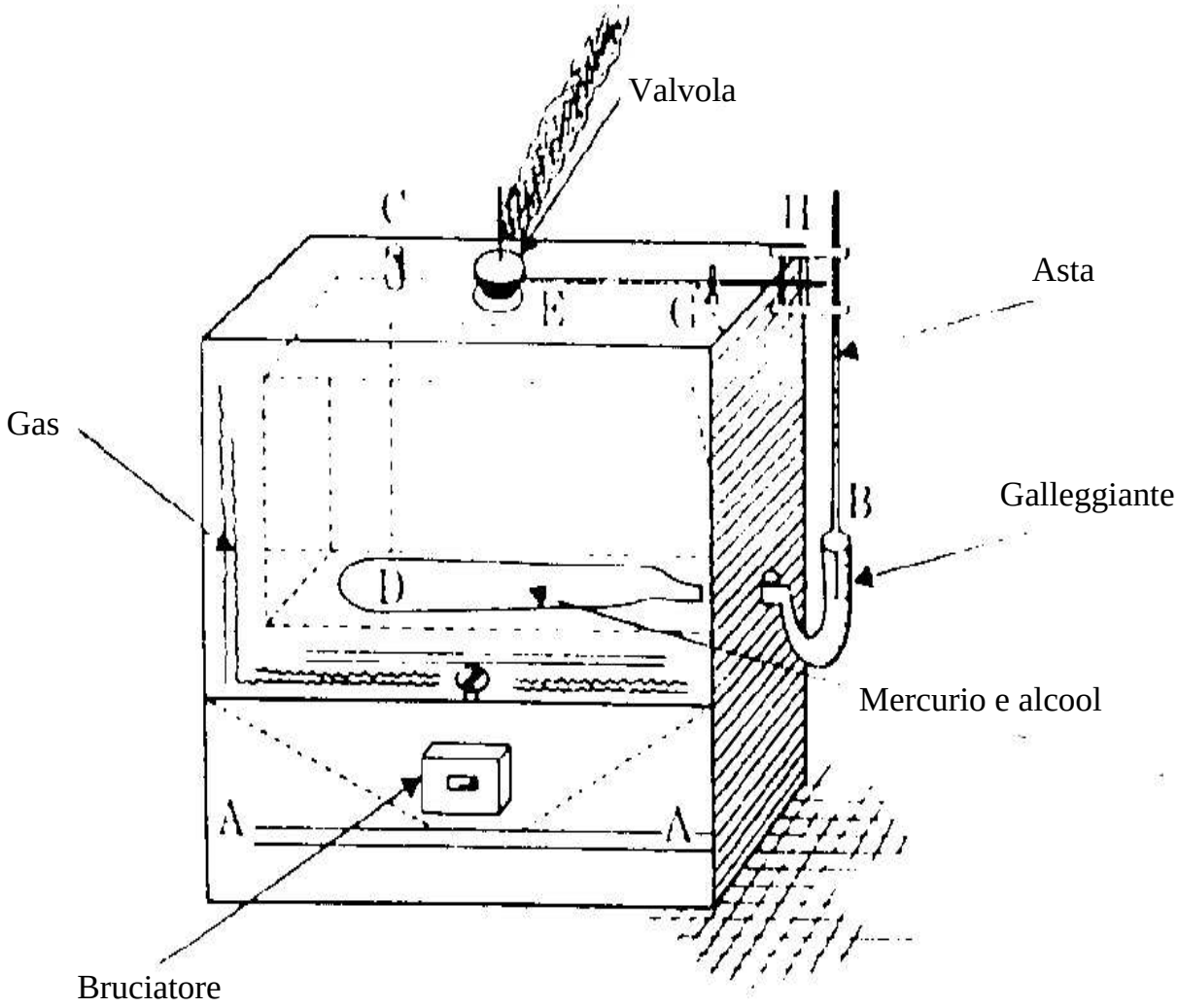
REGOLATORE DI PORTATA (CINA, XII sec.)

Bere troppo in fretta fa male



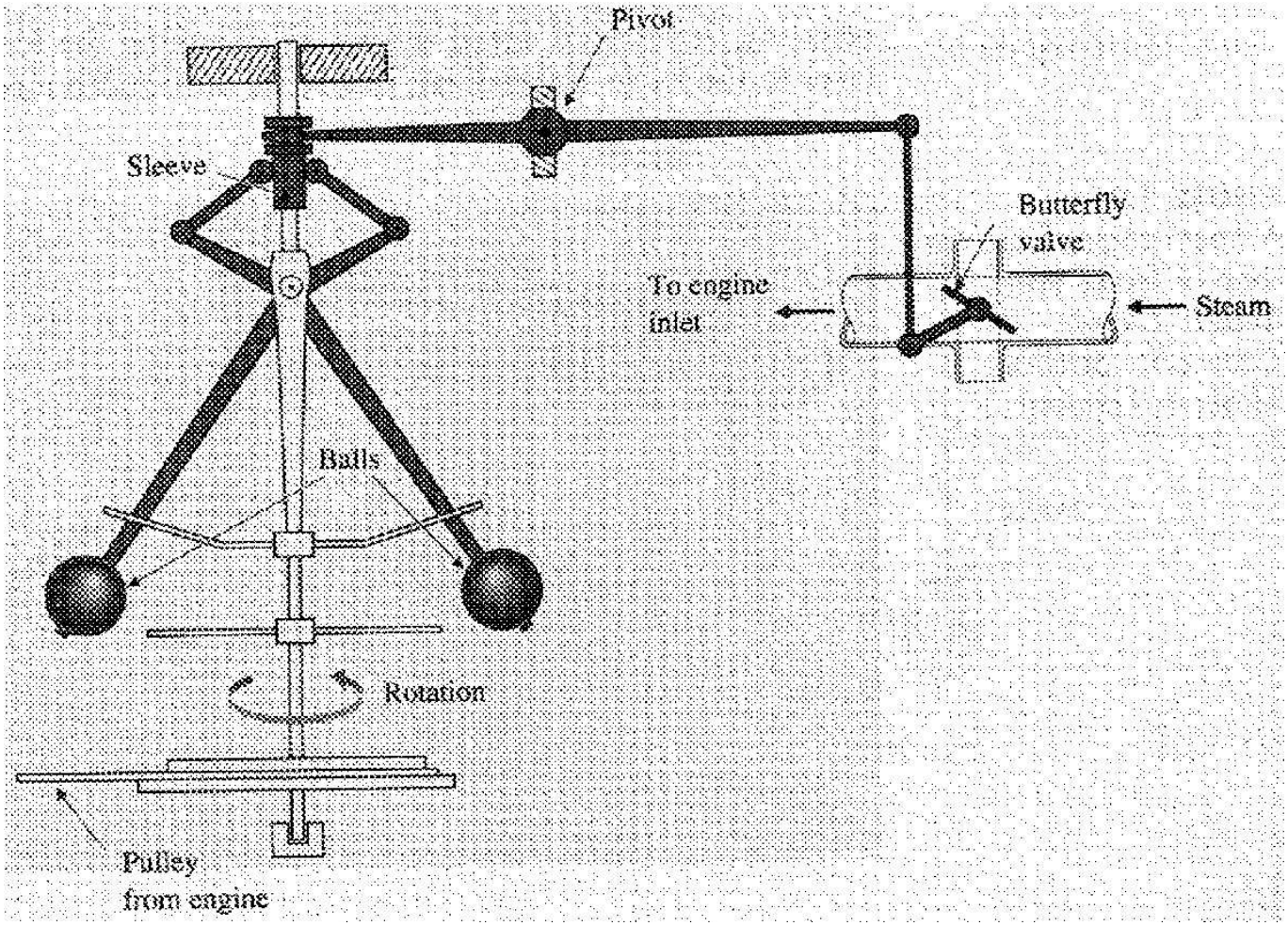
INCUBATRICE PER UOVA, DREBBEL, 1620 ca.

Scopo: mantenere costante la temperatura della camera

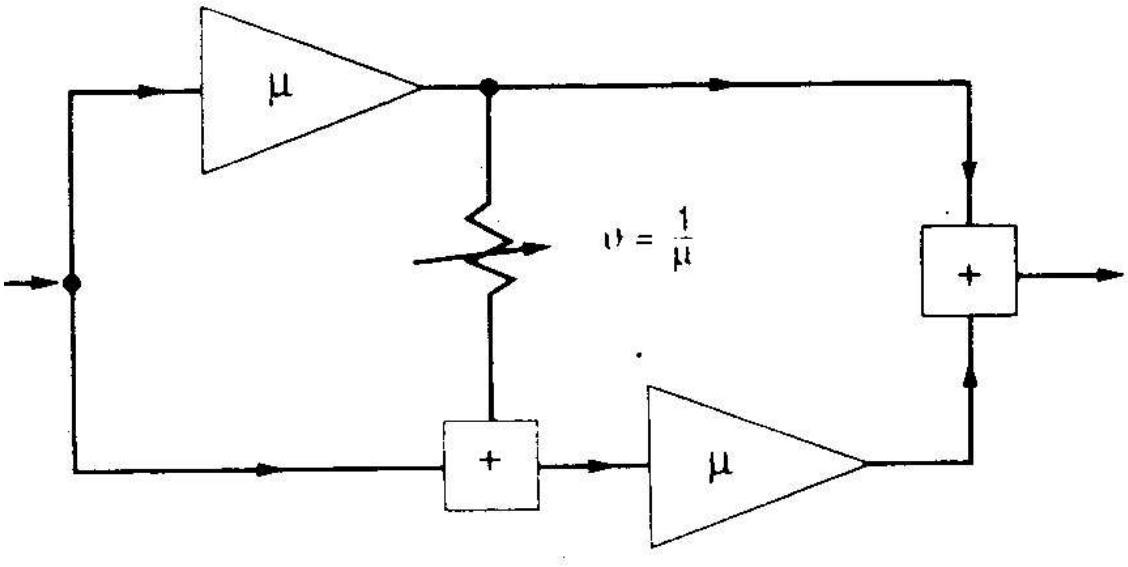


REGOLATORE PER MACCHINE A VAPORE, WATT, 1787

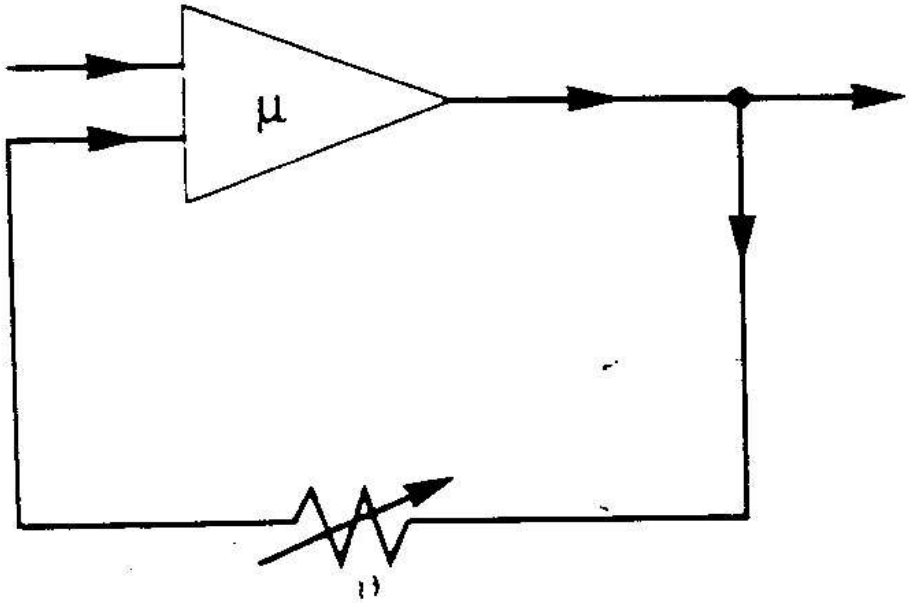
Scopo: mantenere costante la velocità di rotazione dell'albero



ATTENUAZIONE DEI DISTURBI IN TELEFONIA, BLACK, 1927



Schema 1: senza retroazione



Schema 2: con retroazione

SISTEMA REALE $\longrightarrow$ MODELLO MATEMATICO

- Definizione di modello matematico.

- Accuratezza di un modello matematico: precisione $\longleftrightarrow$ semplicità.

- Modelli ottenuti dalle leggi della fisica, chimica, etc ....

- Modelli ottenuti attraverso dati sperimentali.

- Modelli per i controlli automatici.

CLASSIFICAZIONE MODELLI

- Modelli **dinamici** e non dinamici (statici).
- Modelli a parametri distribuiti ed a **parametri concentrati**.
- Modelli **deterministici** e stocastici.
- Modelli a **tempo-continuo**, a tempo-discreto, ed a **dati campionati**.
- Modelli **lineari** e non lineari.
- Modelli **stazionari** (tempo-invarianti) e non stazionari (tempo-varianti).
- Modelli **causali** e non causali.
- Modelli scalari (**SISO**) e multivariabili (MIMO).

MODELLI DI SISTEMI ELETTRICI

- Elementi costitutivi dei circuiti a costanti concentrate
  - Resistenza, Induttore, Condensatore

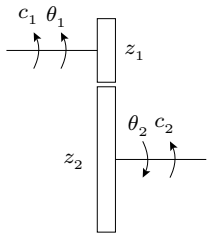
- Legge della conservazione della carica
  - Equazioni di equilibrio ai nodi
- Il campo elettrostatico è conservativo
  - Equazioni di equilibrio alle maglie

- Variabili di stato
  - Tensioni sui condensatori e correnti negli induttori
  - Relazione com l'energia del sistema

- Calcolo della funzione di trasferimento mediante risoluzione del circuito col metodo della trasformata di Laplace (vedi corso di Elettrotecnica!)

MODELLI DI SISTEMI MECCANICI

- Accoppiamenti cinematici
  - Ruote dentate

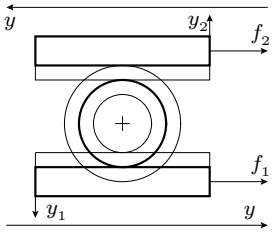


$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\theta_2 = \tau\,\theta_1$$

$$C_2 = \tau^{-1}\,C_1$$

  - Meccanismo di rinvio

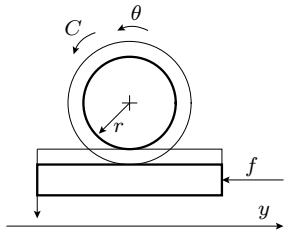


$$\tau = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y_2 = \tau\,y_1$$

$$f_2 = \tau^{-1}\,f_1$$

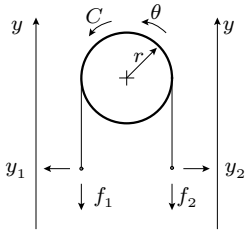
  - Accoppiamento ruota - vite senza fine



$$y = r\,\theta$$

$$f = r^{-1}\,C$$

  - Puleggia



$$y_2 = -y_1 = r\,\theta$$

$$f_2 - f_1 = r^{-1}\,C$$

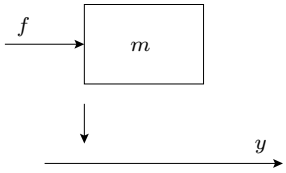
MODELLI DI SISTEMI MECCANICI

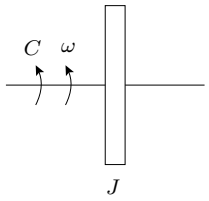
- Leggi della dinamica newtoniana

$$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{C} = J\dot{\omega}$$

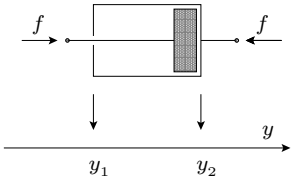
- Corpo rigido

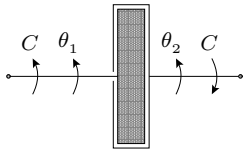




$$f = m\,\ddot{y} \qquad\qquad C = J\,\dot{\omega} = J\ddot{\theta}$$

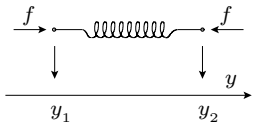
- Smorzatore (attrito viscoso)





$$f = \beta(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \qquad\qquad C = \beta(\omega_1 - \omega_2) = \beta(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

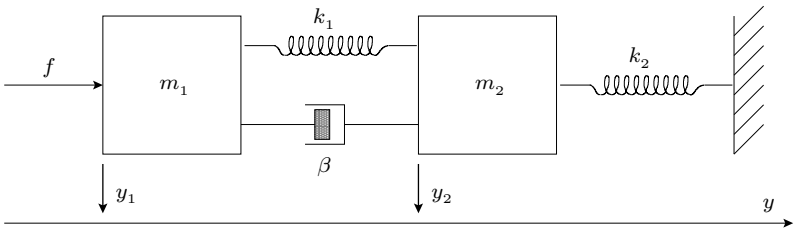
- Molla con elasticità lineare



$$f = k\,(y_1 - y_2) \qquad\qquad C = k\,(\theta_1 - \theta_2)$$

MODELLI DI SISTEMI MECCANICI

- Variabili di stato
  - Posizione delle molle e velocità delle masse
  - Relazione con l'energia totale del sistema
- Esempio.



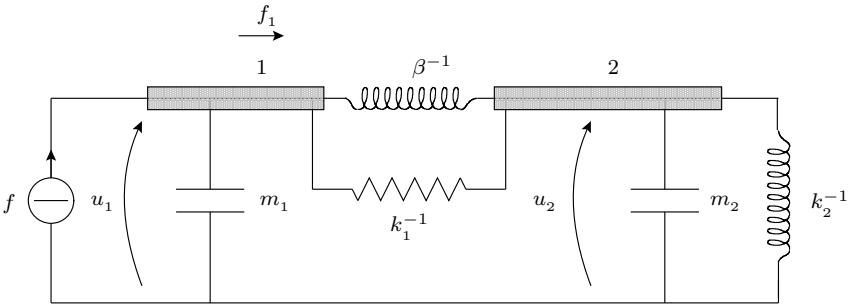
Massa m_1: $\quad f - k_1(y_1 - y_2) - \beta(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) = m_1\,\ddot{y}_1$

Massa m_2: $\quad k_1(y_1 - y_2) + \beta(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - k_2\,y_2 = m_2\,\ddot{y}_2$

- Funzione di trasferimento tra f e y_2

$$G(s) = \frac{y_2(s)}{F(s)} = \frac{\beta\,s + k_1}{m_1\,m_2\,s^4 + \beta(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2\,m_1]s^2 + \beta\,k_2\,s + k_1\,k_2}$$

- Analogo elettrico



ANALOGIA SISTEMI MECCANICI-SISTEMI ELETTRICI

- Costruzione del circuito meccanico

- Equivalenza degli elementi costitutivi

ELEMENTO MECCANICO	ELEMENTO ELETTRICO
Corpo rigido	Nodo di rete
Equilibrio di forze (coppie) al corpo rigido	Equilibrio di correnti al nodo
Forze e coppie	Correnti
Potenze, tempi, energie	Potenze, tempi, energie

$$\Downarrow$$

Circuito elettrico equivalente al sistema meccanico

- Conservazione topologia.

- Le velocità sono analoghe a potenziali.

- Le masse sono analoghe a condensatori con armatura a terra ($C = M$).

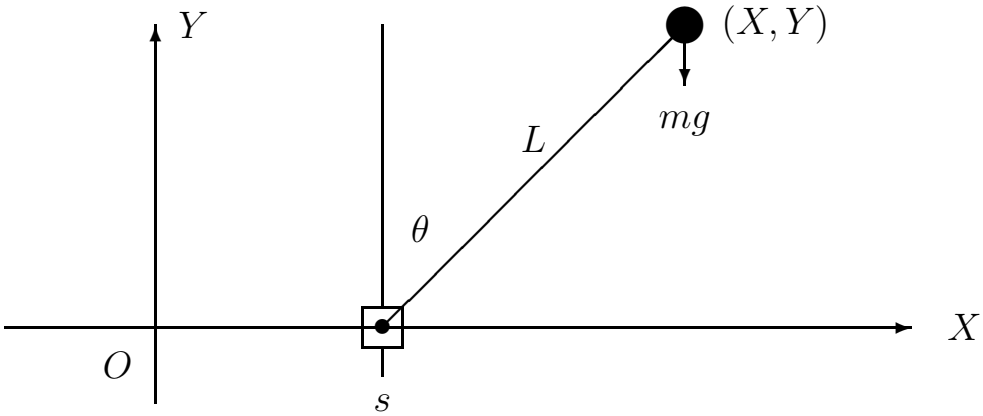
- Le molle sono analoghe ad induttanze ($L = 1/K$).

- Gli smorzatori sono analoghi a resistenze ($R = 1/B$).

- Le forze applicate sono analoghe a generatori di corrente ($I = f$)

- Gli accoppiamenti cinematici sono analoghi a trasformatori.

UN CLASSICO: IL PENDOLO INVERSO



- Dinamica del moto

$$mL\ddot{\theta}(t) = mg\sin\theta(t) - m\ddot{s}(t)\cos\theta(t)$$

- Modello del pendolo inverso ($u(t) := \ddot{s}(t)$; $y(t) := \theta(t)$)

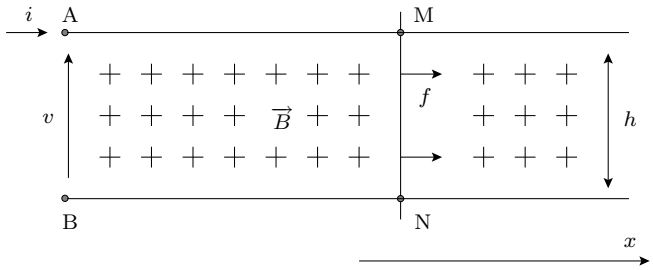
$$\ddot{y}(t) = \frac{g}{L}\sin y(t) - \frac{1}{L}u(t)\cos y(t) \tag{1}$$

$$y(t_0) = y_0 \tag{2}$$

$$\dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \tag{3}$$

SISTEMI ELETTROMECCANICI

- Variazione di flusso dell'induzione magnetica



$$\Delta x \quad \rightarrow \quad \Delta\Phi = B\,h\,\Delta x$$

- Forza elettromotrice indotta

$$v = \frac{d\Phi}{dt} = B\,h\,\frac{dx}{dt}$$

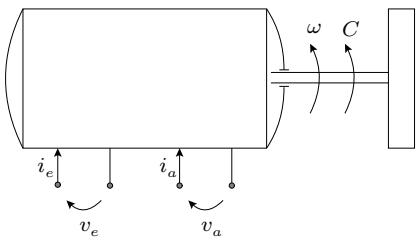
- Legge di conservazione dell'energia

$$v\,i = f\,\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \quad f = B\,h\,i$$

- Equazioni di funzionamento per macchine lineari (senza perdite)

$$\begin{cases} v &= B\,h\,\frac{dx}{dt} \\ f &= B\,h\,i \end{cases}$$

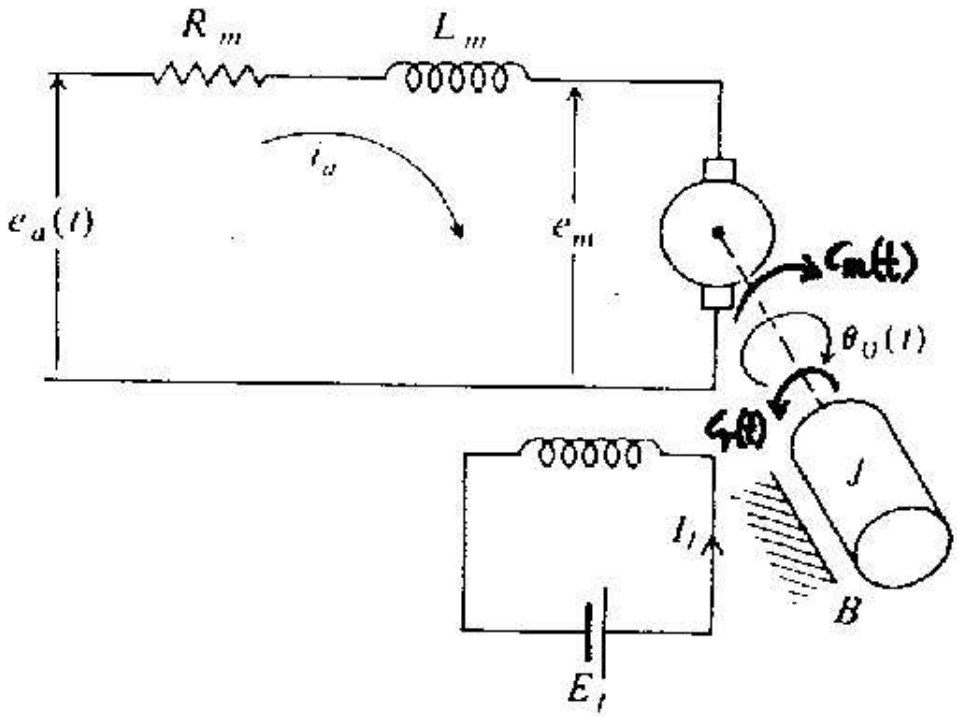
- Equazioni di funzionamento per macchine rotanti (senza perdite)



$$v_a = K\,\Phi\,\omega, \quad C = K\,\Phi\,i_a$$

MOTORE A CORRENTE CONTINUA

Schema a controllo d'armatura.



- Flusso Φ costante $\Rightarrow$ coppia proporzionale alla corrente d'armatura $i_a(t)$

$$C_m(t) = K\Phi i_a(t) = K_T i_a(t)$$

- Equazione elettrica del circuito d'armatura

$$e_a(t) - R_m i_a(t) - L_m \frac{d}{dt} i_m(t) - e_m(t) = 0$$

- Forza contro-elettromotrice indotta

$$e_m(t) = K\Phi \frac{d}{dt}\theta(t) = K_b \frac{d}{dt}\theta(t) \qquad \text{(Idealmente } K_b = K_T\text{)}$$

- Equazione meccanica (con attrito viscoso + coppia resistente)

$$J\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + B\frac{d}{dt}\theta(t) = C_m(t) + C_r(t)$$

MOTORE A CORRENTE CONTINUA

- Funzioni di trasferimento

$$\Theta(s) = \frac{1}{s}\frac{K_T}{(Js+B)(L_m s + R_m) + K_b K_T} E_a(s)$$

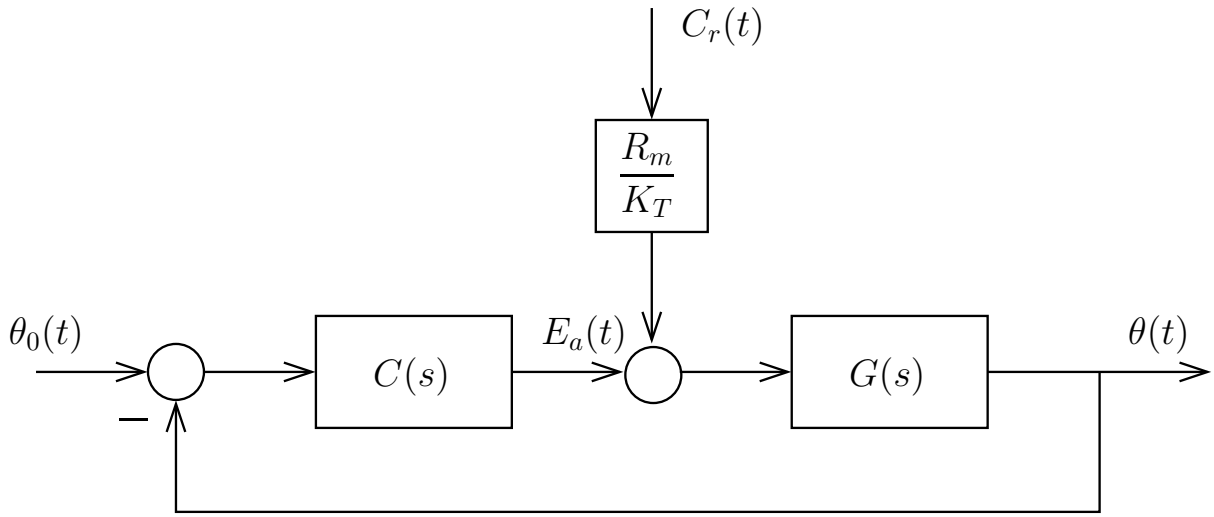
$$+\frac{1}{s}\frac{L_m s + R_m}{(Js+B)(L_m s + R_m) + K_b K_T} C_r(s)$$

- Approssimazione L_m trascurabile: funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{\frac{K_T}{K_b K_T + R_m B}}{s\left(1 + \frac{J R_m}{K_b K_T + R_m B} s\right)} = \frac{K_M}{s(1+\tau_m s)}$$

$$G_{C_r}(s) = \frac{\Theta(s)}{C_r(s)} = \frac{R_m}{K_T} G(s)$$

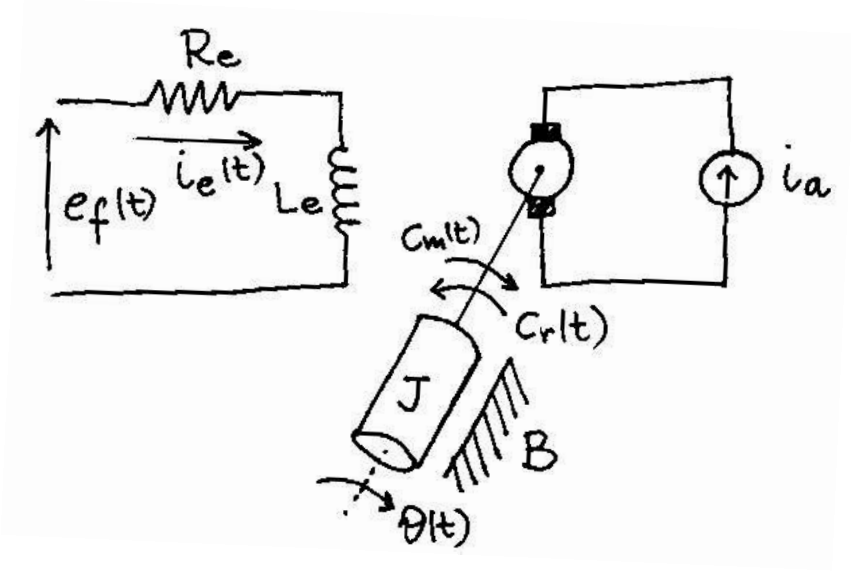
- Servomeccanismo di posizione in corrente continua



Problema di controllo: progettare $C(s)$ in modo che l'andamento di $\theta(t)$ insegua $\theta_0(t)$ minimizzando l'effetto della coppia di disturbo (incognita!) $C_r(t)$.

MOTORE A CORRENTE CONTINUA

Schema a controllo di campo.



- Corrente d'armatura i_a costante, flusso proporzionale alla corrente $i_e(t)$

$$C_m(t) = K\Phi(t)i_a = K_t i_e(t)$$

- Equilibrio elettrico del circuito di campo

$$e_f(t) - R_e i_e(t) - L_e \frac{d}{dt} i_e(t) = 0$$

- Equazione meccanica

$$J\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) + B\frac{d}{dt}\theta(t) = C_m(t) + C_r(t)$$

- Funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{E_f(s)} = \frac{\frac{K_t}{R_e B}}{s(1+\frac{J}{B}s)(1+\frac{L_e}{R_e}s)} = \frac{K_m}{s(1+\tau_M s)(1+\tau_e s)}$$

MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Liquidi incomprimibili, privi di viscosità interna e attrito con le pareti dei condotti ed in moto stazionario: legge di Bernoulli

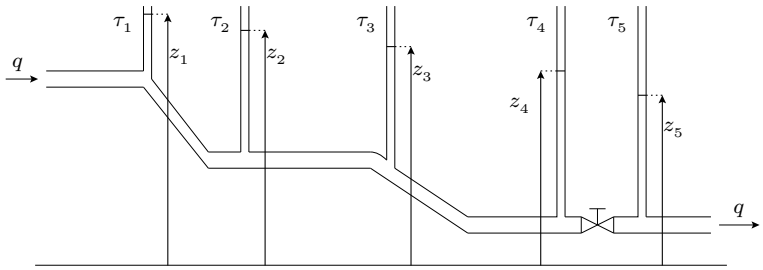
$$p + \rho\, g\, h + \frac{1}{2}\,\rho\, v^2 = costante$$

p: pressione , ρ: densità , v: velocità del liquido

- Carico totale idraulico

$$y = \frac{p}{\rho\, g} + h + \frac{v^2}{2\, g} = costante$$

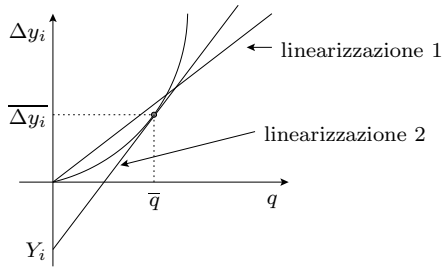
- Viscosità: perdita di carico idraulico in funzione della portata $q = A\, v$ (A: sezione della condotta).



- Perdita di carico in un tratto di condotta

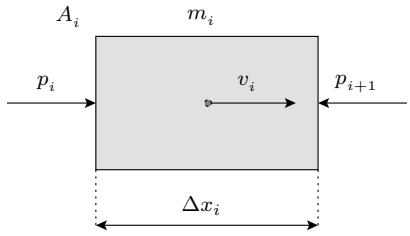
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = f_i(q)$$

- Linearizzazione: $\Delta y_i = R_i\, q + Y_i$, R: resistenza idraulica del tratto di condotta $\left[\frac{s}{m^2}\right]$



MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Moto vario: portata non costante nel tempo: $q = q(t)$
  - Modello di un tratto di una condotta



A_i: sezione della condotta

Δx_i: lunghezza tratto condotta

$m_i = \rho\, A_i\, \Delta x_i$: massa liquido

$v_i = q/A_i$: velocità

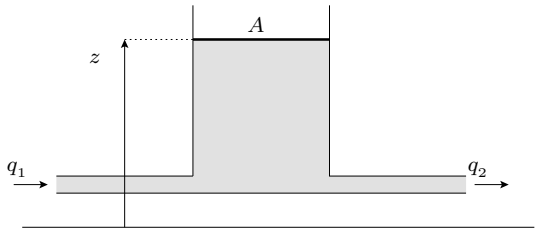
  - Legge della dinamica per il fluido nel tratto (quota altimetrica costante)

$$m_i\, \dot{v}_i = A_i(p_i - p_{i+1}) \Rightarrow p_i - p_{i+1} = \rho \frac{\Delta x_i}{A_i} \dot{q}$$

$$\Delta y_i = \frac{p_i - p_{i-1}}{\rho\, g} = \underbrace{\frac{\Delta x_i}{g\, A_i}}_{L_i}\, \dot{q}$$

L_i: inerzia idraulica del tratto di condotta $\left[\frac{s^2}{m^2}\right]$

  - Serbatoio



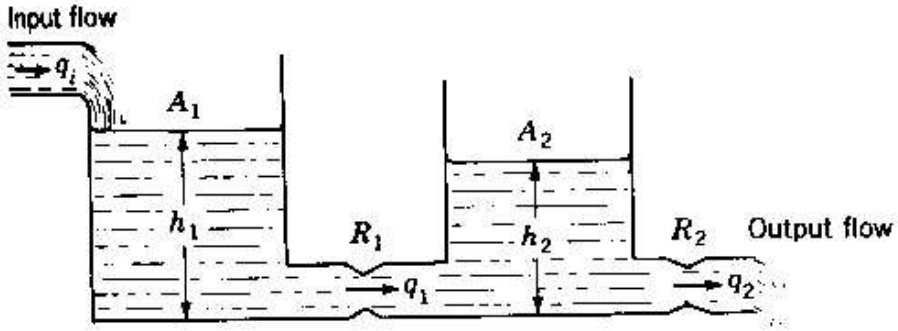
  - Conservazione della massa: $q_1 - q_2 = A\, \dot{z}$
  - Eq. di Bernoulli al pelo libero: p costante, $v \simeq 0 \Rightarrow \dot{z} = \dot{y}$

$$q_1 - q_2 = A\, \dot{y}$$

A: capacita idraulica $\left[m^2\right]$

MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Esempio di circuito idraulico



- Pressione atmosferica come pressione di riferimento

- Primo serbatoio

$$q_i - q_1 = A_1 \dot{y}_1$$

- Primo tratto di condotta

$$y_1 - y_2 = R_1 q_1$$

- Secondo serbatoio

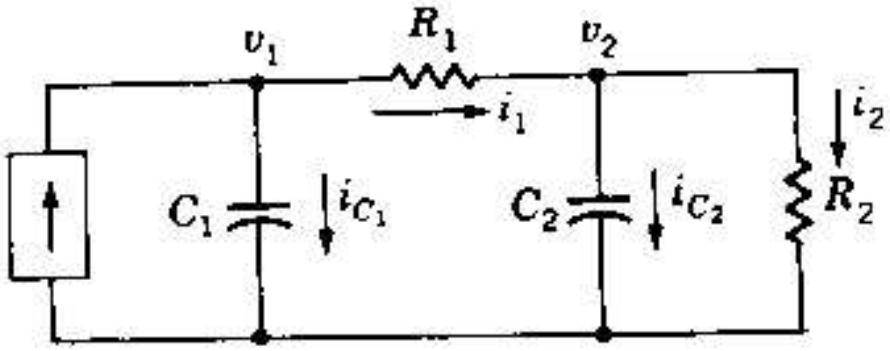
$$q_1 - q_2 = A_2 \dot{y}_2$$

- Secondo tratto di condotta (uscita fluido a pressione atmosferica)

$$y_2 - 0 = R_2 q_2$$

MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Equivalente elettrico

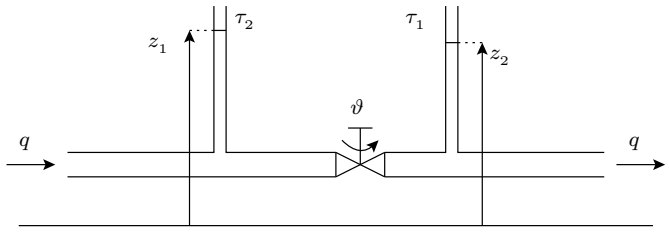


- Equivalenza generale tra circuiti idraulici ed elettrici

ELEMENTO IDRAULICO	ELEMENTO ELETTRICO
Portata	Corrente
Carico idraulico	Tensione
Capacità idraulica	Capacità
Resistenza idraulica	Resistenza elettrica
Inerzia idraulica	Induttanza

MODELLI DI SISTEMI IDRAULICI

- Valvola ad apertura variabile



$$\Delta y = y_2 - y_1 \simeq Y_0 + R\,q - \lambda\vartheta$$

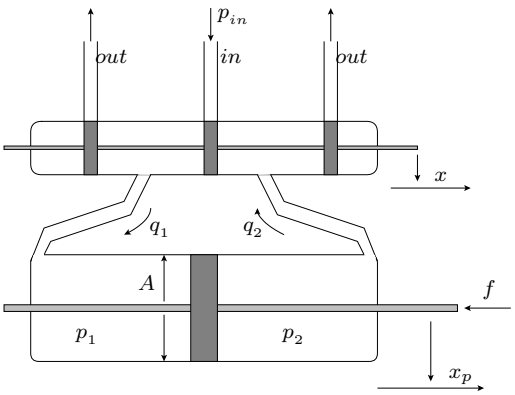
Y_0 : costante di linearizzazione

R : resistenza idraulica media

ϑ : angolo di apertura

λ : coefficiente di comando

SERVOMOTORE OLEODINAMICO



- Equazioni delle valvole di ingresso e di uscita (linearizzate)

$$y_{in} - y_1 \simeq Y + R_{in} q_1 - \lambda_{in} x$$

$$y_2 - y_{out} \simeq Y + R_{out} q_2 - \lambda_{out} x$$

$$q_1 = q_2 = q$$

- Bernoulli: il fluido nelle due camere ha stessa quota e velocità

$$p_1 - p_2 = \rho g (y_1 - y_2)$$

- Uscita fluido a pressione atmosferica (presa come pressione di riferimento)

$$y_{out} = 0$$

- Pressione sul pistone

$$\Delta p = p_1 - p_2 \simeq k_1 \, x - k_2 \, q$$

SERVOMOTORE OLEODINAMICO

- Dinamica del pistone

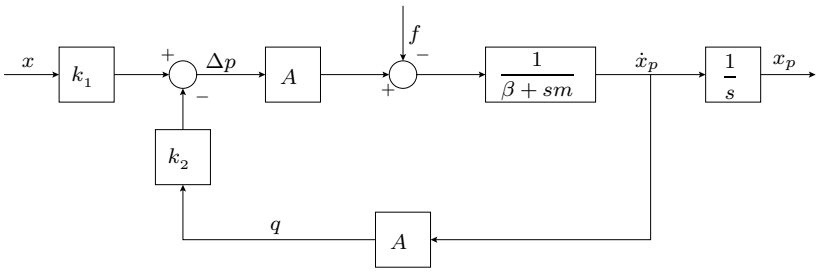
$$m\ddot{x}_p = A\,\Delta p - f - \beta\dot{x}_p$$

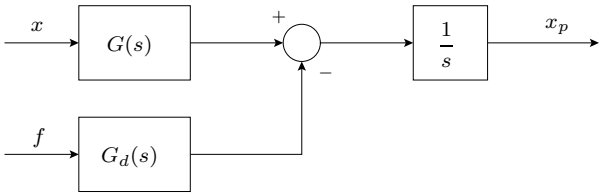
m: massa pistone, β: coefficiente di attrito viscoso

- Portata

$$q = A\,\dot{x}_p$$

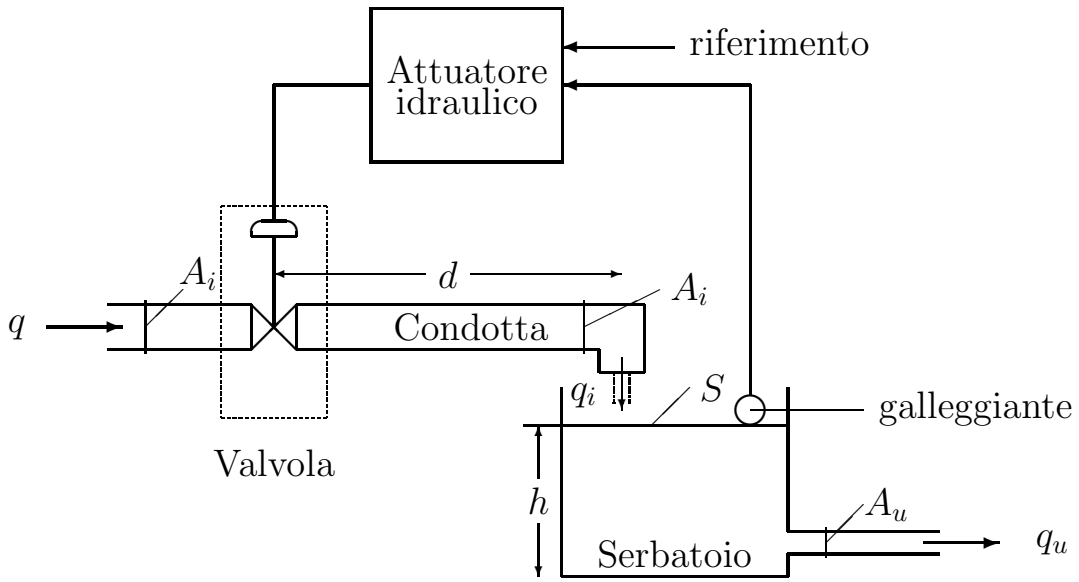
- Schema a blocchi





$$G(s) = \frac{k_1\,A}{\beta_c + m\,s} \qquad , \qquad G_d(s) = \frac{1}{\beta_c + m\,s} \qquad , \qquad \beta_c = \beta + k_2\,A^2$$

UN ALTRO CLASSICO: MODELLO DI UN SERBATOIO



- Modello del serbatoio e della condotta.

  – Principio di conservazione della massa

$$q_i - q_u = S\frac{dh}{dt}$$

  – Bernoulli (velocità pelo trascurabile, pressione atmosferica)

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho\frac{q_u^2}{A_u^2}$$

MODELLO DI UN SERBATOIO

- Modello del serbatoio.

$$\frac{d}{dt}h(t) \;=\; -\frac{A_u\sqrt{2g}}{S}\sqrt{h(t)} + \frac{1}{S}q_i(t)$$

- Modello della condotta.

$$q_i(t) \;=\; q(t-T)$$

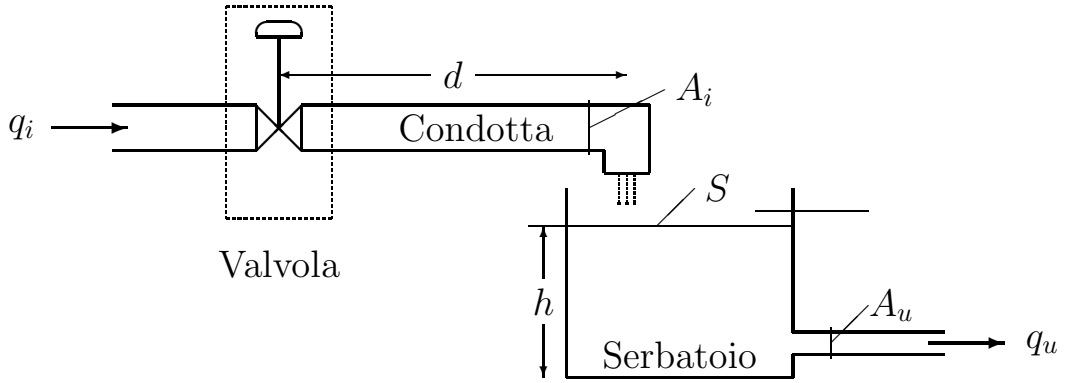
- Modello condotta+serbatoio ($u(t) := q(t)$; $y(t) := h(t)$)

$$\frac{d}{dt}y(t) \;=\; -\frac{A_u\sqrt{2g}}{S}\sqrt{y(t)} + \frac{1}{S}u(t-T) \tag{4}$$

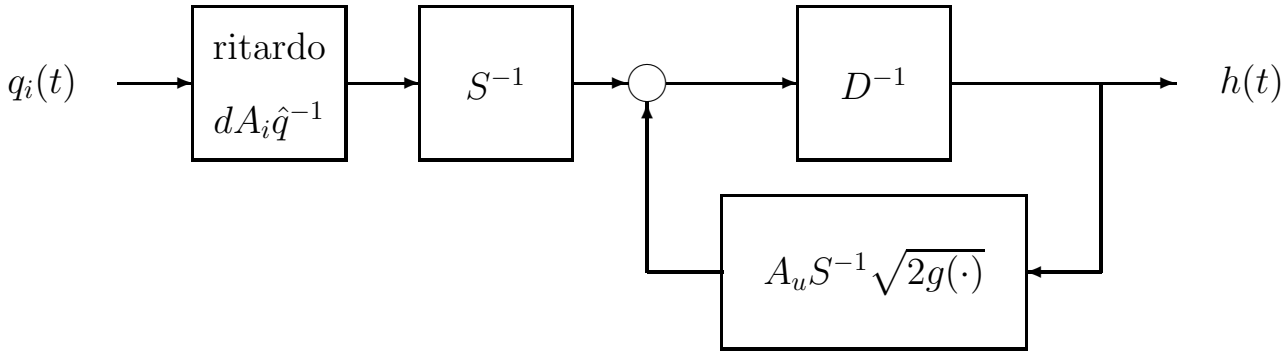
$$y(t_0) \;=\; y_0 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

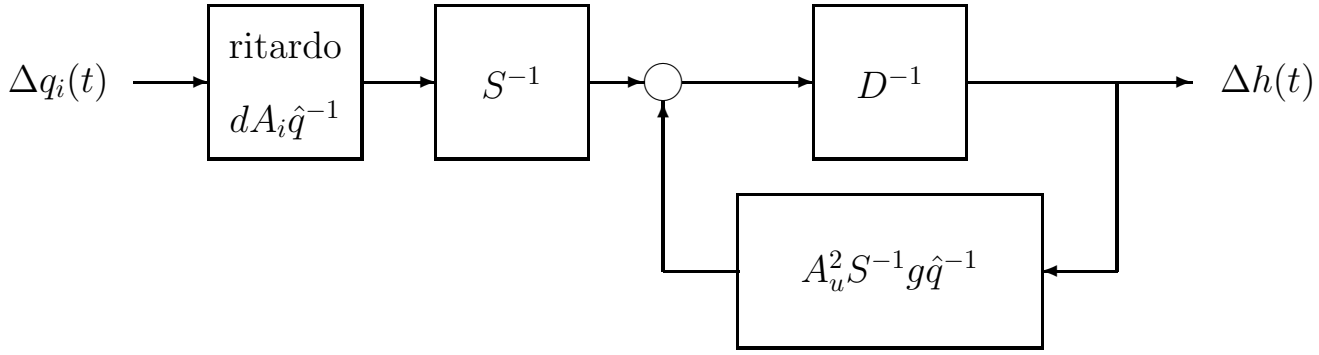
MODELLO DI UN SERBATOIO



- Schema a blocchi modello non lineare.



- Schema a blocchi modello linearizzato (Δh e Δq_i sono le variazioni).



MODELLI DI SISTEMI TERMICI

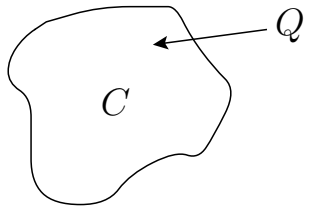
- I fenomeni termici (es. conduzione del calore) sono in genere rappresentati da equazioni alle derivate parziali.

- Ipotesi di temperatura costante spazialmente $\Rightarrow$ costanti concentrate

  – Corpi di piccole dimensioni e fluidi perfettamente mescolati

- Capacità termica

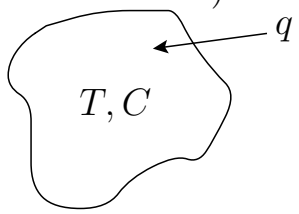
$$Q = C \cdot \Delta T$$
$$C = C_s \cdot M$$



Q: calore scambiato, ΔT: variazione temperatura, C_s: calore specifico.

- Conservazione dell'energia (trasformazione isocora)

$$q = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$

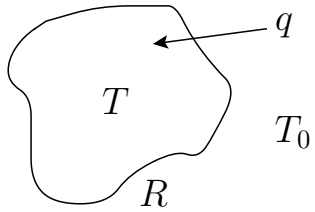


q: potenza termica, U: energia interna

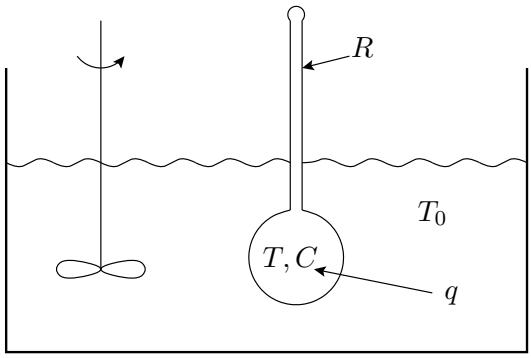
La temperatura T è una variabile di stato

- Modello di conduzione a costanti concentrate (resistenza termica)

$$q = \frac{1}{R}\,(T_0 - T)$$



ESEMPIO: TERMOMETRO A MERCURIO



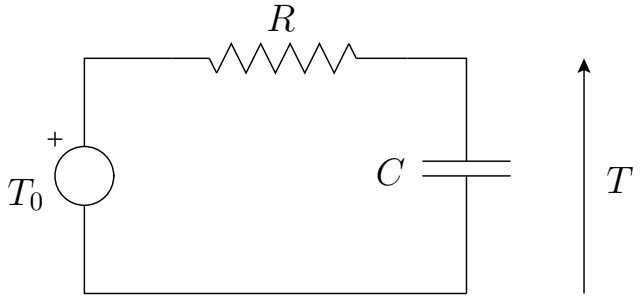
R	=	resistenza termica del bulbo
C	=	capacità termica del bulbo
T	=	temperatura del bulbo
T_0	=	temperatura del liquido

$$\begin{cases} q = \dfrac{1}{R}(T_0 - T) & \text{(conduzione)} \\ q = C\dfrac{dT}{dt} & \text{(conservazione energia)} \end{cases}$$

$$R\,C\,\frac{dT}{dt} = T_0 - T \qquad \longrightarrow \qquad \dot{T} = -\frac{1}{RC}\,T + \frac{1}{RC}\,T_0$$

$$s\,T(s) = -\frac{1}{RC}\,T(s) + \frac{1}{RC}\,T_0(s) \qquad \longrightarrow \qquad G(s) = \frac{T(s)}{T_0(s)} = \frac{1}{1 + s\,C\,R}$$

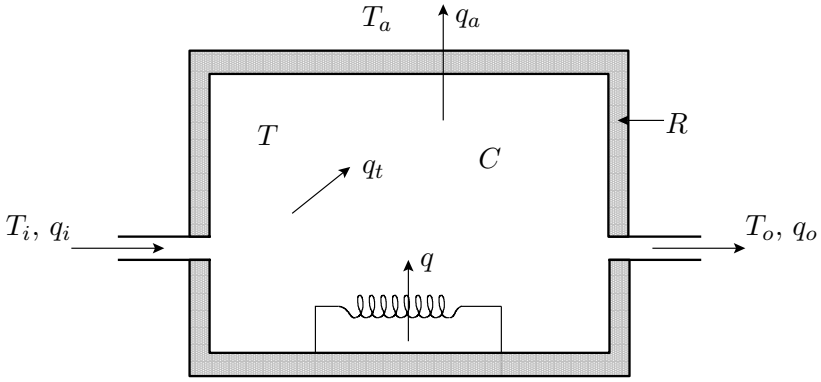
- Analogo elettrico



ESEMPIO: SCALDABAGNO

Conservazione dell'energia

$q_i + q = q_t + q_a + q_0$



- $q_t = C\,\dfrac{dT}{dt}$
- $q_0 = n\,C_s\,T$
- $q_i = n\,C_s\,T_i$
- $q_a = \dfrac{T - T_a}{R}$

q_t	=	calore assorbito dall'acqua
R	=	resistenza termica dell'acqua
n	=	flusso d'acqua in transito
C_s	=	calore specifico dell'acqua

$$C\,\dot{T} + n\,c_s\,(T - T_i) + \frac{T - T_a}{R} = q$$

$$\dot{T} = -\frac{1}{C}\left(n\,C_s + \frac{1}{R}\right)T + \underbrace{\frac{n\,C_s}{C}\,T_i}_{ingresso} + \underbrace{\frac{1}{R\,C}\,T_a}_{ingresso} + \underbrace{\frac{1}{C}\,q}_{ingresso}$$