Esercizio 1

$$\ddot{y} + \dot{y} - \sqrt{y}\dot{y} - 2yu^2 + 2 = 0$$

1.1 Determinare una <u>rappresentazione in **FORMA DI STATO**</u>.

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + \sqrt{x_1}x_2 + 2x_1u^2 - 2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

1.2 Determinare **STATO** e **uscita di equilibrio** per $\boldsymbol{u(t) = \bar{u} = 1}$.

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -x_2 + \sqrt{x_1}x_2 + 2x_1 1^2 - 2 \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{x_2} \\ 0 &= 0 + \sqrt{x_1}0 + 2x_1 1^2 - 2 \rightarrow \overline{x_1} = 1 \\ \bar{y} &= \overline{x_1} = 1 \end{aligned}$$

Linearizzazione

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 &= \left(\frac{\overline{x_2}}{2\sqrt{\overline{x_1}}} + 2\bar{u}\right)_{eq} \delta x_1 + \left(-1 + \sqrt{\overline{x_1}}\right)_{eq} \delta x_2 + (4\overline{x_1}u)_{eq}\delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{aligned}$$

Sistema Linearizzato

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= \delta x_2 \\ \delta\dot{x}_2 &= 2\delta x_1 + 4\delta u \\ \delta y &= \delta x_1 \end{aligned}$$

1.3 Studiare la **stabilità del sistema linearizzato** e dire se è possibile valutare la **stabilità del movimento di equilibrio** del **sistema non lineare**.

$$A_{LIN} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \rightarrow \lambda_{12} = \pm 1$$

Il sistema Linearizzato è instabile in quanto ho un autovalore a parte reale positiva.

Posso dedurre quindi che anche il movimento del sistema NON LINEARE di partenza è INSTABILE.

Esercizio 2

$$\dot{x_1} = \boldsymbol{\alpha} x_1 - x_2 + u \qquad \alpha \in R$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + u$$
$$y = x_1$$

2.1] stabilità in funzione di α

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice è TRIANGOLARE superiore, gli autovalori sono sulla diagonale. Il sistema è:

- ASINTOTICAMENTE STABILE per $\boldsymbol{\alpha} < \mathbf{0}$
- SEMPLICEMENTE STABILE per $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ (λ_i autovalore semplice)
- INSTABILE per $\boldsymbol{\alpha} > \mathbf{0}$

2.2] Posto $\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{5}$ determinare $\boldsymbol{x(t)}$ e $\boldsymbol{y(t)}$ associati a $\boldsymbol{u(t)} = \overline{\boldsymbol{u}} = \mathbf{2}, t \geq 0$ e C.I. $\boldsymbol{x(0)} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{2}]^{\boldsymbol{T}}$

$$\dot{x_1} = -5x_1 - x_2 + 2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2$$
$$y = x_1$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Risoluzione in cascata.

- 2° equazione:

  $\dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} = -\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{u} \qquad \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}}(\mathbf{0}) = \mathbf{2} \qquad \boldsymbol{u}(\boldsymbol{t}) = \overline{\boldsymbol{u}} = \mathbf{2}, \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0}$

  Notando che $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}}(\mathbf{0}) = \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}}$ stato di equilibrio associato a $\overline{\boldsymbol{u}} = \mathbf{2}$ si ha che (per def. di equilibrio):

  $$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}}(\boldsymbol{t}) = \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} \quad \forall t \geq 0$$

- 1° equazione:

  $\dot{x_1} = -5x_1 - x_2 + 2$
  $x_1(0) = 1$
  $u(t) = \bar{u} = 2$
  $x_2(t) = 2$

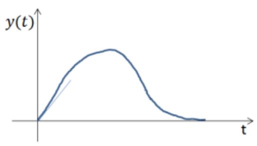
  $$\dot{x_1} = -5x_1 - x_2 + 2 = -5x_1$$

  $$x_1(t) = e^{At} x_1(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau$$

  Siccome B è uguale a 0. Ho solo il movimento libero

  $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{1L}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{-\mathbf{5t}} \; t \geq 0$

- Per l'**uscita** ottengo: $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}) = x_1(t) = \boldsymbol{e}^{\mathbf{5t}}, t \geq 0$



2.3] sempre con $\boldsymbol{\alpha} = -\mathbf{5}$ determinare la FdT ***G(s)*** e dire se posso studiare la stabilità del sistema dalla sola *G(s)*.

$$\dot{x_1} = -5x_1 - x_2 + 2$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2$$
$$y = x_1$$

Applico la **Trasformata di Laplace**: $G(s) = l[y(t)]$ con $x(0) = 0$

$sx_1 = -5x_1 - x_2 + 2$ $sx_2 = -x_2 + 2$ $y = x_1$	$(s+5)x_1 = -x_2 + 2$ $(s+1)x_2 = 2$ $y(s) = x_1(s)$	$x_1 = \dfrac{-\frac{2}{s+1} + 2}{s+5}$ $x_2 = \dfrac{2}{s+1}$ $y(s) = x_1(s)$	$x_1 = \dfrac{2s}{(s+5)(s+1)}$ $x_2 = \cdots$ $y(s) = x_1(s)$	$\boldsymbol{G(s)} = \dfrac{\boldsymbol{y(s)}}{\boldsymbol{u(s)}}$ $= \dfrac{\frac{2s}{s+5}}{2}$ $= \dfrac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{(s+5)(s+1)}}$

Poichè il sistema LTI è di ordine 2 e la G(s) ha due poli (non ci sono state cancellazioni), allora l'insieme dei poli coincide con l'insieme degli autovalori

$\{\boldsymbol{p_i}\} \equiv \{\boldsymbol{\lambda_i}\}$ e quindi posso stabilire la stabilità osservando la sola G(S).

2.4] calcolare $\boldsymbol{y(t)}$ con $\boldsymbol{u(t)} = \boldsymbol{sca(t)}$ e tracciare il grafico qualitativo con $y(0), y(\infty), \dot{y}(0)$

$$\boldsymbol{y(s) = G(s) \cdot u(s)} = \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{(s+1)(s+5)}} \cdot \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{s}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(s+1)(s+5)}}$$

Antitrasformo con la scomposizione di **Heaviside**:

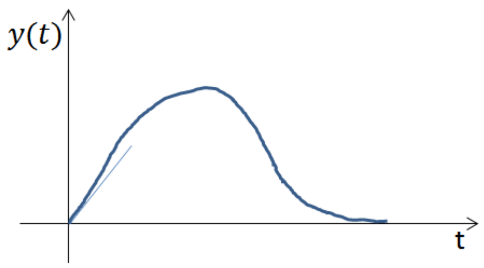
$$\boldsymbol{y(s)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+5} \to \frac{A(s+5)}{s+1} + \frac{B(s+1)}{s+5} \to \begin{cases} A + B = 0 \to A = -B \to B = -\dfrac{1}{4} \\ 5A + B = 1 \to A = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$y(t) = \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{4}e^{-5t}, t \geq 0$

$y(0) = 0$

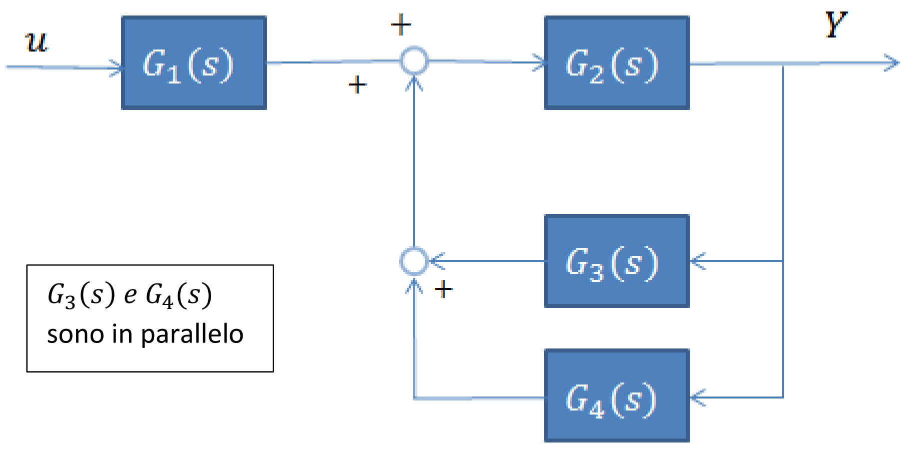
$y(\infty) = 0$

$\dot{y}(0) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = 1$



Visto che il **tipo** è negativo non tende al guadagno ma tende a 0, perchè la G(s) ha uno zero nell'origine.

Esercizio 3 – schema a blocchi



$$G_1(s) = \frac{1}{s+4}$$

$$G_2(s) = \frac{s+4}{s+5}$$

$$G_3(s) = \frac{2}{s+1}$$

$$G_4(s) = -\frac{1}{s+4}$$

$$H(s) = G_1(s) \cdot \frac{G_2(s)}{1 - [G_2(s) \cdot (G_3(s) + G_4(s))]}$$

$G_3(s) + G_4(s) = \frac{1}{s+1}$???

$$G_2(s) \cdot (G_3(s) + G_4(s)) = \frac{s+4}{(s+5)(s+1)}$$

$$\frac{G_2(s)}{1 - [G_2(s) \cdot (G_3(s) + G_4(s))]} = \frac{\frac{s+4}{s+5}}{1 - \frac{s+4}{(s+5)(s+1)}} = \frac{\frac{s+4}{s+5}(s+5)(s+1)}{(s+5)(s+1) - s - 4}$$

$$H(s) = G_1(s) \cdot \frac{G_2(s)}{1 - [G_2(s) \cdot (G_3(s) + G_4(s))]} = \frac{1}{s+4} \cdot \frac{\frac{s+4}{s+5}(s+5)(s+1)}{(s+5)(s+1) - s - 4} = \frac{s+1}{(s+5)(s+1) - s - 4}$$

Autovalori nascosti $\lambda = -1$ e $\lambda = -4$

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2 + 5s + 1}$$

$H(s)$ ha due poli con parte reale negativa (Cartesio) e due autovalori nascosti (-1;-4).

Il sistema complessivo è di ordine 4 e tutti gli autovalori sono negativi perciò è AS. Stabile.

Calcolare y_∞ del sistema con FdT H(s) e $u(t) = \underbrace{2imp(t)}_{\boxed{1}} - \underbrace{3sca(t)}_{\boxed{2}} + \underbrace{5e^{-3t}}_{\boxed{3}}, t \geq 0$

1. $L^{-1}[H(s)] \rightarrow$ poichè $H(s)$ è FdT di ssitema AS.STABILE tutti i **modi** →0 e quindi $y_{\infty 1} = 0$
2. $y_{\infty 2}$ =SIST. LTI AS.STABILE è di **tipo** 0 →$y_{\infty 2} = -3H(0) = -3$
3. $y_{\infty 3}$ =Sistema AS.STABILE alimentato da un ingresso $u(t)$ che →0 per t→∞, quindi $y_{\infty 3} = 0$

$$y_\infty = 0 - 3 + 0 = -3$$