
Sistemi e modelli (ver. 1.2)

1.1 Elementi introduttivi

L'Automatica studia l'analisi dei sistemi dinamici ed il progetto dei controlli automatici, ovvero la realizzazione di dispositivi utilizzati per imporre ai sistemi un certo comportamento desiderato, senza che sia necessario l'intervento di un operatore umano.

1.1.1 Sistemi, modelli, metodi di controllo

Definizione 1.1 *Sistema o Impianto: un oggetto fisico di natura o complessità qualsiasi, a cui deve essere imposto un certo comportamento. Ogni sistema interagisce con l'esterno (tutto ciò che non fa parte del sistema) tramite dei segnali, che si suddividono in indipendenti (cause, ingressi) e dipendenti (effetti, uscite).*

Definizione 1.2 *Variabili indipendenti: sono dette variabili indipendenti gli ingressi del sistema. Si dividono in due gruppi:*

1. *Variabili di controllo (manipolabili): sono tutte quelle variabili che possono essere modificate arbitrariamente.*
2. *Variabili incerte: sono quelle variabili che non possono essere manipolate direttamente. Rappresentano i disturbi, o più generalmente ciò che è incognito nel sistema. Si possono ulteriormente suddividere in variabili incerte misurabili e non misurabili.*

La Fig. 1.1 riporta una rappresentazione schematica di un generico sistema.

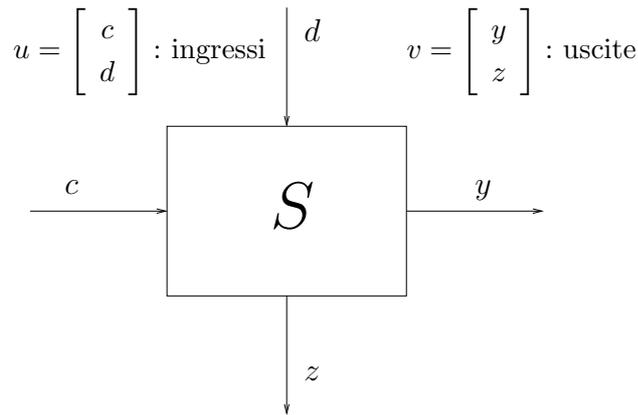


Figura 1.1: Rappresentazione schematica di un sistema.

Definizione 1.3 *Variabili dipendenti:* sono dette variabili dipendenti, o effetti, le uscite del sistema. Dipendono dall'evoluzione di tutte le variabili di ingresso. Si possono dividere in due gruppi:

1. *Variabili controllate:* sono le variabili a cui si vuole imporre un assegnato comportamento.
2. *Variabili misurate:* sono le variabili che permettono di avere informazioni sul sistema. Queste sono utilizzate in genere per modificare opportunamente le variabili di controllo. Spesso coincidono con le variabili controllate.

Definizione 1.4 *Modello matematico:* è una rappresentazione del sistema reale tramite un insieme di relazioni matematiche. Pur non descrivendo esattamente il suo comportamento, il modello permette di formulare in maniera matematica il problema di controllo. La complessità del modello dipende dal sistema che si deve descrivere e dall'uso che se ne intende fare (simulazione, progetto del controllo).

1.1.2 Sistemi di controllo e compiti del progettista

Definizione 1.5 *Problema di controllo:* Sia dato un sistema (vedi Fig. 1.1) ed una variabile $y_d(t)$, detta variabile di riferimento, che descriva il comportamento desiderato delle variabili controllate. La soluzione al problema di controllo consiste nel determinare per ogni istante t l'ingresso di controllo $c(t)$ (in base alle informazioni disponibili) in modo che la variabile controllata $y(t)$ sia sufficientemente vicina a $y_d(t)$ per ogni andamento ammissibile dei disturbi.

Si possono introdurre due diversi tipi di controllo, che utilizzano una diversa tipologia di informazione disponibile:

1. Controllo ad anello aperto (o in catena diretta): questa tecnica prevede la scelta del valore delle variabili di controllo c sulla base delle variabili di riferimento y_d e delle variabili incerte misurabili d_m .
2. Controllo ad anello chiuso (o in retroazione): questa tecnica determina il valore delle variabili di controllo c in funzione della variabile di riferimento y_d , delle variabili incerte misurabili d_m e delle uscite misurate z del sistema.

La struttura dello schema di controllo nei due casi è riportata in Fig. 1.2, dove il blocco C che genera il valore delle variabili di controllo è detto “controllore” o “regolatore”.

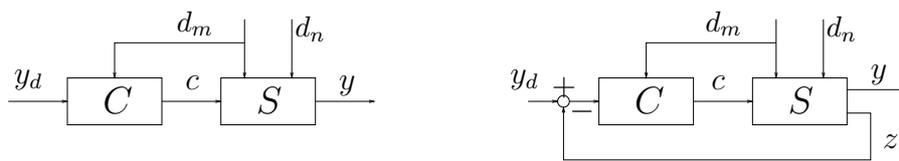


Figura 1.2: Tipi di controllo: ad anello aperto (a sinistra) e in retroazione (a destra).

Nell’ambito del corso “*Progetto Sistemi di Controllo*” ci occuperemo essenzialmente di controllo in retroazione.

In molte applicazioni industriali, lo schema generale del sistema di controllo è quello riportato in Fig. 1.3.

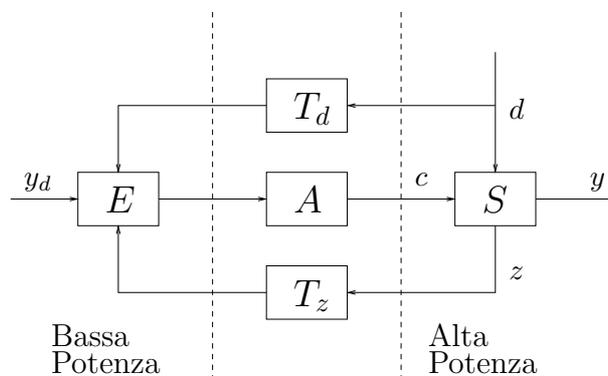


Figura 1.3: Schema generale del sistema di controllo.

Come si può vedere, tutto il sistema può essere diviso concettualmente in tre sezioni: la prima funziona ad un basso livello di potenza ed è finalizzata a calcolare il valore degli ingressi di controllo in base alle informazioni raccolte sul sistema (z e d) e all'andamento desiderato delle grandezze controllate. La seconda (il sistema S da controllare) funziona di solito ad un elevato livello di potenza. La terza include le interfacce tra le prime due ed include principalmente attuatori e trasduttori. I trasduttori (T_z e T_d) servono per trasformare le grandezze misurabili in segnali a bassa potenza (in genere elettrici), che possono essere elaborati da E . Gli attuatori (A) utilizzano i segnali di uscita del controllore per pilotare gli ingressi del sistema da controllare.

Quando viene sviluppato il progetto di un sistema di controllo, si devono affrontare diversi compiti, per svolgere i quali sono richiesti sia una preparazione di base che conoscenze specifiche relativamente a:

- costruzione di un modello matematico dell'impianto;
- attuatori e trasduttori disponibili sul mercato;
- requisiti sul comportamento da imporre alle variabili (specifiche di progetto).

Le decisioni che il progettista deve affrontare riguardano:

- scelte degli attuatori (A) e dei traduttori (T) più opportuni;
- programmazione di E ;
- interfacciamento delle varie componenti $T - E$, $E - A$ e $A - S$.

1.2 Rappresentazione dei sistemi dinamici

I sistemi dinamici vengono rappresentati tramite l'utilizzo di modelli matematici. Un modello matematico è in genere rappresentato da un insieme di equazioni che legano gli ingressi e le uscite. E' possibile classificare un modello in base alle sue caratteristiche:

1. **Modello statico / dinamico:** un modello statico descrive il sistema trascurando il transitorio (esempio: caratteristica V-I di un diodo). Un modello dinamico è in grado di descrivere anche l'evoluzione transitoria del sistema. Nei controlli automatici si utilizzano di solito modelli dinamici. Da un punto di vista matematico,

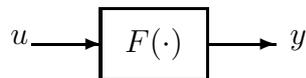
un modello statico è tale per cui il valore dell'uscita all'istante t dipende solo dagli ingressi u all'istante t stesso. Un modello è dinamico se il valore $y(t)$ dipende non solo da $u(t)$, ma anche da $u(\tau)$ per $\tau \leq t$.

2. **Modello lineare / non lineare:** un modello è lineare se soddisfa il principio di sovrapposizione degli effetti, cioè quando, essendo il sistema inizialmente in quiete, e dati due ingressi $u_1(t)$ e $u_2(t)$, a cui corrispondono le uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$, per ogni coppia di costanti k_1 e k_2 , la risposta all'ingresso $u(t) = k_1u_1(t) + k_2u_2(t)$ è data da $y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t)$. Un modello che non soddisfi questa proprietà è detto non lineare.
3. **Modello stazionario / non stazionario:** un modello è detto stazionario (o tempo invariante) se le uscite non dipendono dall'istante di tempo a cui l'ingresso è applicato, ovvero se, dato un qualsiasi ingresso $u(t)$ e la corrispondente uscita $y(t)$, si ha che l'uscita corrispondente all'ingresso $u(t-T)$ è $y(t-T)$. I modelli non stazionari, che non soddisfano la precedente condizione, sono anche detti tempo varianti.
4. **Modello causale / non causale:** un modello si dice causale se l'uscita all'istante τ dipende solo dagli ingressi agli istanti $t \leq \tau$, ma non da quelli agli istanti $t > \tau$. I modelli di sistemi fisici reali sono generalmente causali.
5. **Modello scalare / multivariabile:** un modello è scalare se ha un solo ingresso e una sola uscita (SISO: Single Input Single Output); è multivariabile se ha più ingressi e/o più uscite (MIMO: Multi Input Multi Output).
6. **Modello tempo continuo / tempo discreto / a dati campionati:** un modello è a tempo continuo se le sue variabili sono definite su tutto l'asse reale dei tempi. Un modello è a tempo discreto se le variabili sono definite solo per un insieme discreto di valori della variabile temporale. I modelli a dati campionati sono dei sistemi misti: hanno una parte continua ed una discreta (es: controllo di un sistema fisico tramite un computer); hanno al loro interno sistemi di conversione analogico/digitale e digitale/analogico indispensabili per interfacciare i vari componenti.
7. **Modelli a parametri concentrati / distribuiti:** un modello si dice a parametri concentrati se considera solo il comportamento dei fenomeni rispetto al tempo, ignorando quelli relativi allo spazio. Viceversa, un modello a parametri distribuiti considererà anche i fenomeni spaziali. Un modello a parametri concentrati è descritto da equazioni differenziali ordinarie, mentre un modello a parametri distribuiti è descritto da equazioni alle derivate parziali.

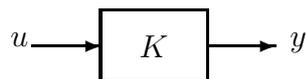
1.2.1 Rappresentazione con schemi a blocchi

Un modo compatto per descrivere i modelli dei sistemi è l'utilizzo degli schemi a blocchi. In questo caso il legame fra ingressi e uscite viene rappresentato tramite l'interconnessione di blocchi che contengono operatori (statici o dinamici) connessi tra loro da linee, che possono sommarsi o diramarsi.

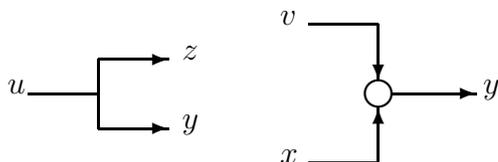
- Blocco elementare: $y = F(u)$.



- Blocco lineare: $F(u) = Ku$.



- Punto di diramazione e giunzione sommante.



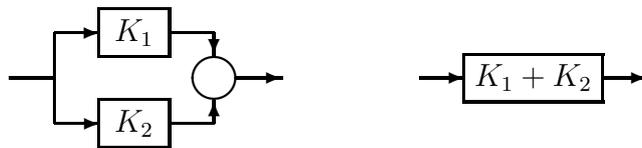
In presenza di una giunzione sommante, in mancanza di indicazioni sul segno delle frecce, si assumerà che l'uscita sia la somma degli ingressi. Nel caso si intenda invece effettuare una differenza, verrà esplicitamente indicato il segno “-” a fianco del segnale da sottrarre. Da ora in avanti sarà sempre adottata questa convenzione.

Di seguito sono riportate le regole di semplificazione e trasformazione per blocchi lineari.

1. Riduzione di blocchi in cascata:



2. Riduzione di blocchi in parallelo:



3. Riduzione di giunzioni sommanti:



4. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a monte di un blocco:



5. Spostamento di un punto di prelievo di segnale a valle di un blocco:



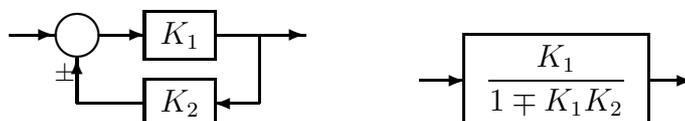
6. Spostamento di una giunzione sommannte a monte di un blocco:



7. Spostamento di una giunzione sommannte a valle di un blocco:



8. Eliminazione di un anello:



Osservazione: nel caso di uno schema a blocchi che presenti più ingressi/uscite, per valutare la funzione di trasferimento tra un ingresso ed una uscita specificata, è necessario porre a zero tutti gli altri ingressi. Nel caso generale di una retroazione negativa, la funzione di trasferimento equivalente risulta:

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + G(s)F(s)}$$

dove $F(s)$ è il prodotto dei blocchi sulla catena diretta, mentre $G(s)F(s)$ è il prodotto dei blocchi nell'intero anello.

Esempio 1.1 (*Sistema idraulico*)

Sia dato il sistema riportato in Fig. 1.4. Sia q la portata in ingresso, q_1 , q_2 le portate in uscita, h_1 , h_2 il livello del liquido, C_1 , C_2 le capacità idrauliche ed R_1 , R_2 le resistenze idrauliche. Denotiamo con Δh_1 , Δh_2 , Δq , Δq_1 , Δq_2 le variazioni delle variabili rispetto ai loro rispettivi valori di regime.

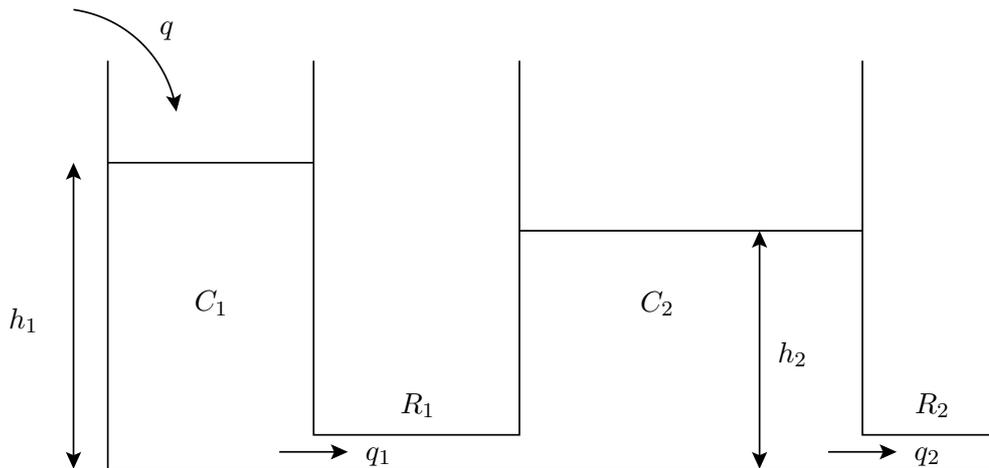


Figura 1.4: Esempio di sistema idraulico.

Le equazioni di funzionamento del sistema linearizzato sono le seguenti (vedi Par. 1.2.4 per maggiori dettagli):

$$\Delta q = \Delta q_1 + C_1 \frac{dh_1}{dt} \quad (1.1)$$

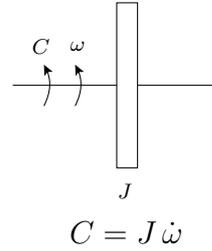
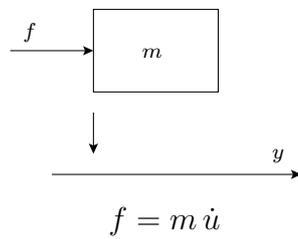
$$\Delta q_1 = \Delta q_2 + C_2 \frac{dh_2}{dt} \quad (1.2)$$

$$\Delta h_1 - \Delta h_2 = R_1 \Delta q_1 \quad (1.3)$$

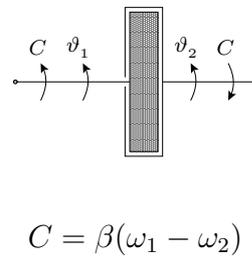
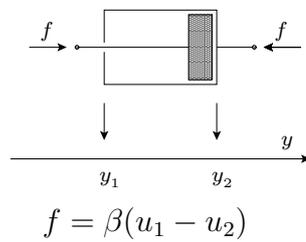
$$\Delta h_2 = R_2 \Delta q_2 \quad (1.4)$$

Sistemi di riferimento inerziale

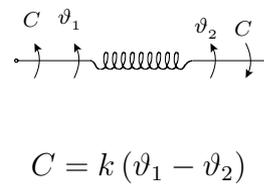
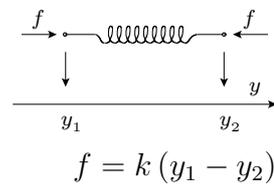
- Corpo rigido con massa prevalente.



- Ammortizzatore con attrito viscoso prevalente.

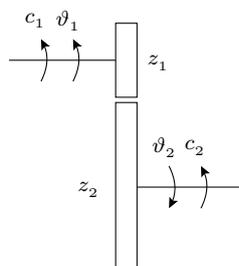


- Molla con elasticità prevalente.



Accoppiamenti cinematici

- Ruote dentate.

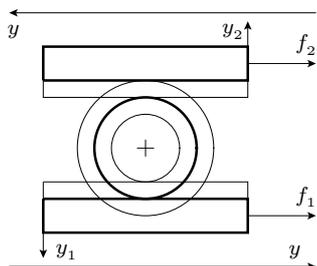


$$\tau = \frac{z_1}{z_2}$$

$$\vartheta_2 = \tau \vartheta_1$$

$$C_2 = \tau^{-1} C_1$$

- Meccanismo di rinvio.

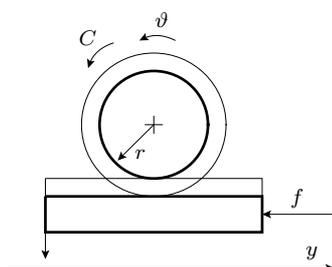


$$\tau = \frac{r_2}{r_1}$$

$$y_2 = \tau y_1$$

$$f_2 = \tau^{-1} f_1$$

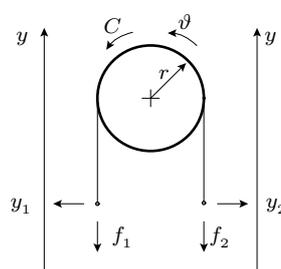
- Accoppiamento ruota - vite senza fine.



$$y = r \vartheta$$

$$f = r^{-1} C$$

- Puleggia.



$$y_2 = -y_1 = r \vartheta$$

$$f_2 - f_1 = r^{-1} C$$

Analoga sistemi meccanici - sistemi elettrici

Dato un sistema meccanico, è possibile costruirne un sistema elettrico equivalente, mediante una equivalenza degli elementi costitutivi, come riportate in Tabella 1.1.

- L'analogia conserva la topologia della rete.
- Le velocità sono analoghe a potenziali.
- Le masse sono analoghe a condensatori con armatura a terra ($C \rightleftharpoons M$).
- Le molle sono analoghe ad induttanze ($L \rightleftharpoons 1/K$).

ELEMENTO MECCANICO	ELEMENTO ELETTRICO
Corpo rigido	Nodo di rete
Equilibrio di forze (coppie) al corpo rigido	Equilibrio di correnti al nodo
Forze e coppie	Correnti
Potenze, tempi, energie	Potenze, tempi, energie

Tabella 1.1: Elementi meccanici ed equivalenti elettrici

- Gli smorzatori sono analoghi a resistenze ($R \Leftrightarrow 1/B$).
- Le forze applicate sono analoghe a generatori di corrente ($I \Leftrightarrow f$)
- Gli accoppiamenti cinematici sono analoghi a trasformatori.

Esempio 1.2

Dato il modello riportato in Fig. 1.7, vogliamo determinare la funzione di trasferimento $\frac{Y_2(s)}{F(s)}$.

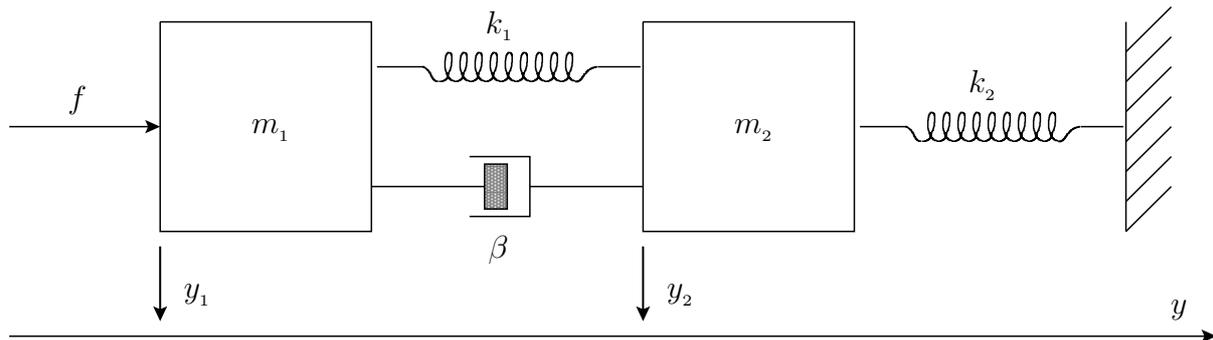


Figura 1.7: Esempio di sistema meccanico

Il modello matematico del sistema risulta determinato dalle equazioni dei componenti elementari e dalle equazioni di equilibrio dinamico:

$$\text{Massa } m_1: \quad f - k_1(y_1 - y_2) - \beta(u_1 - u_2) = m_1 \dot{u}_1$$

$$\text{Massa } m_2: \quad k_1(y_1 - y_2) + \beta(u_1 - u_2) - k_2 y_2 = m_2 \dot{u}_2.$$

Risolviendo il sistema è possibile determinare la funzione di trasferimento desiderata:

$$G(s) = \frac{Y_2(s)}{F(s)} = \frac{\beta s + k_1}{m_1 m_2 s^4 + \beta(m_1 + m_2)s^3 + [k_1(m_1 + m_2) + k_2 m_1]s^2 + \beta k_2 s + k_1 k_2}$$

Vogliamo adesso trovare una rappresentazione in variabili di stato. Le equazioni “ingresso-stato-uscita” risultano:

$$f_1 = k_1(y_1 - y_2) \quad , \quad f_2 = k_2 y_2$$

$$\begin{cases} \dot{f}_1 = k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ \dot{f}_2 = k_2 u_2 \\ \dot{u}_1 = m_1^{-1}[-f_1 - \beta u_1 + \beta u_2 + f] \\ \dot{u}_2 = m_2^{-1}[f_1 - f_2 + \beta u_1 - \beta u_2] \\ y = k_2^{-1} f_2 \end{cases}$$

Poiché f_1 e f_2 sono legate linearmente a y_1 e y_2 , si possono usare y_1 e y_2 :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = m_1^{-1}[-\beta u_1 + \beta u_2 - k_1 y_1 + k_1 y_2 + f] \\ \dot{u}_2 = m_2^{-1}[\beta u_1 - \beta u_2 + k_1 y_1 - (k_1 + k_2)y_2] \\ \dot{y}_1 = u_1 \\ \dot{y}_2 = u_2 \end{cases}$$

E' possibile definire il vettore degli stati come:

$$x = [y_1 \quad u_1 \quad y_2 \quad u_2]'$$

Le matrici A , B , C , D per la rappresentazione in variabili di stato risultano quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1 \ 0], \quad D = 0.$$

L'analogo elettrico del sistema è riportato in Fig. 1.8, dove:

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{s F(s)}, \quad U_2(s) = F_1(s) \frac{s}{k_2 + m_2 s^2}$$

$$F_1(s) = \frac{\frac{1}{s m_1}}{\frac{1}{s m_1} + \frac{1}{s m_2 + \frac{k_2}{s}} + \frac{1}{\beta + \frac{k_1}{s}}} F(s)$$

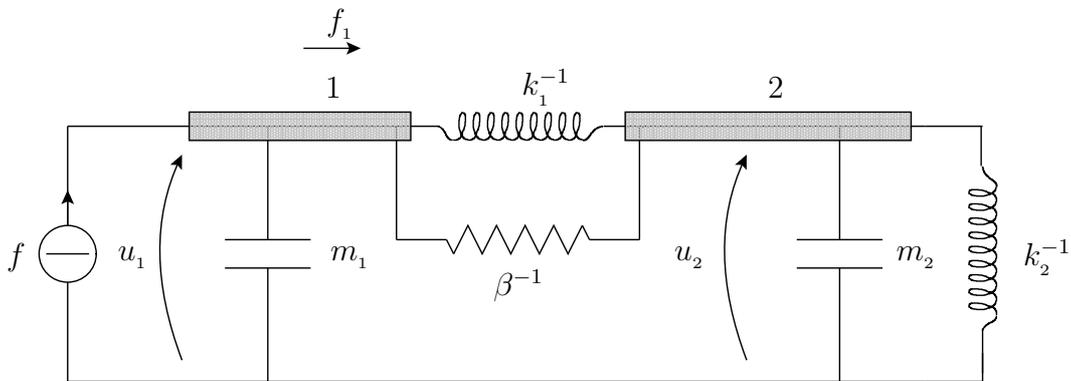


Figura 1.8: Analogo elettrico del sistema di Fig. 1.7.

Esempio 1.3 (*Accelerometro di traslazione*)

Un accelerometro di traslazione è uno strumento utilizzato per misurare l'accelerazione di un corpo lungo la direzione del moto.

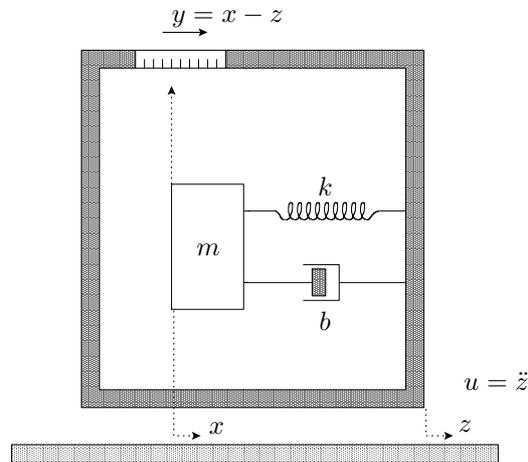


Figura 1.9: Schema di un accelerometro di traslazione.

Le equazioni di funzionamento sono:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k(x - z) + \beta(\dot{x} - \dot{z}) = 0 \\ x = y + z \end{cases}$$

La prima equazione diventa:

$$m\ddot{y} + m\ddot{z} + ky + \beta\dot{y} = 0$$

$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = -m\ddot{z}$$

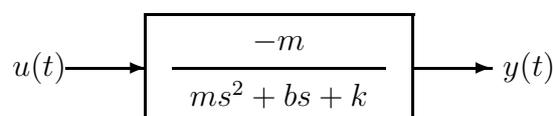
$$m\ddot{y} + \beta\dot{y} + ky = -mu.$$

Applicando la trasformata di Laplace, otteniamo:

$$(ms^2 + \beta s + k)Y(s) = -mU(s)$$

e quindi la funzione di trasferimento tra U ed Y risulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = -\frac{m}{ms^2 + \beta s + k}.$$



Esempio 1.4 (*Pendolo inverso*)

Sia dato il sistema riportato in Fig. 1.10, rappresentante un pendolo inverso.

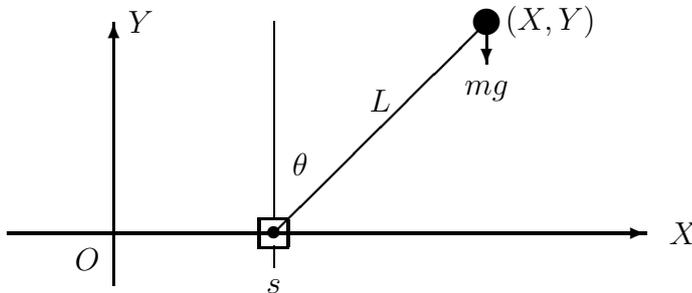


Figura 1.10: Pendolo inverso.

La dinamica del moto risulta ($J = mL^2$ è il momento d'inerzia del pendolo intorno al punto s):

$$mL^2\ddot{\theta}(t) = mgL \sin \theta(t) - mL\ddot{s}(t) \cos \theta(t)$$

$$mL\ddot{\theta}(t) = mg \sin \theta(t) - m\ddot{s}(t) \cos \theta(t).$$

Ponendo $y(t) = \theta(t)$ e $u(t) = \ddot{s}(t)$ otteniamo:

$$\ddot{y} = \frac{g}{L} \sin y - \frac{1}{L}u \cos y.$$

Il sistema in questione risulta evidentemente non lineare.

1.2.3 Modelli di sistemi elettromeccanici

Il funzionamento di un sistema elettromeccanico è basato sulla conversione dell'energia elettrica/meccanica. In Fig. 1.11 è riportato il principio di funzionamento di un sistema elettromeccanico. La spira $AMND$, immersa in un campo magnetico, concatena un certo flusso:

$$\Phi = B h x.$$

Se la barra MN viene spostata di Δx si ottiene una variazione di flusso concatenato pari a:

$$\Delta\Phi = B h \Delta x.$$

Per il principio di induzione elettromagnetica, la forza elettromotrice indotta genera una corrente che circola in senso opposto ad i ; questa genera un campo elettromagnetico che si

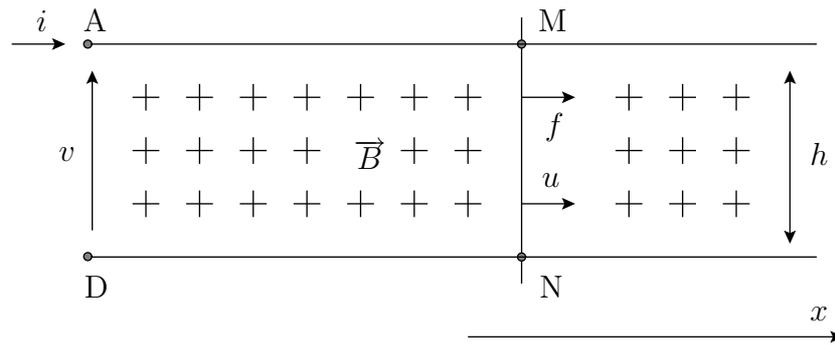


Figura 1.11: Principio di funzionamento di un sistema elettromeccanico.

oppone a \vec{B} , e quindi il campo risultante tende a diminuire tanto più velocemente quanto più velocemente aumenta la superficie della spira.

Per la legge dell'induzione elettromagnetica, si ha:

$$v = \frac{d\Phi}{dt} = B h \frac{dx}{dt} = B h u,$$

dove $u = \frac{dx}{dt}$ denota la velocità della sbarra MN . Poiché per la legge di conservazione dell'energia (in assenza di perdite)

$$v i = f u \rightarrow f = B h i,$$

si ottengono le seguenti equazioni di funzionamento per macchine lineari ideali (ovvero prive di perdite termiche e di flussi dispersi):

$$\begin{cases} v = B h u \\ f = B h i \end{cases}$$

Nel caso di macchine elettriche rotanti (Fig. 1.12), denotando con v_a la tensione di armatura e con v_e quella di eccitazione, si ha:

$$\begin{cases} v_a = k \Phi \omega \\ C = k \Phi i_a \end{cases}$$

Lo schema di una macchina elettrica con parametri parassiti è riportato in Fig. 1.13, in cui il circuito di eccitazione (contraddistinto con il pedice "e") serve a generare il campo magnetico (vettore induzione), mentre quello di armatura (contraddistinto con il pedice "a") è il circuito di potenza attraverso il quale la macchina assorbe energia elettrica e la trasforma in energia meccanica (funzionamento da motore). La resistenza R_p rappresenta le perdite per isteresi e correnti parassite, R_a e R_e le resistenze ohmiche, L_a e L_e le rispettive induttanze, ed e la forza elettromotrice indotta.

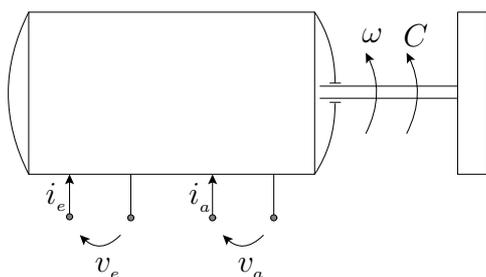


Figura 1.12: Schema di una macchina elettrica rotante.

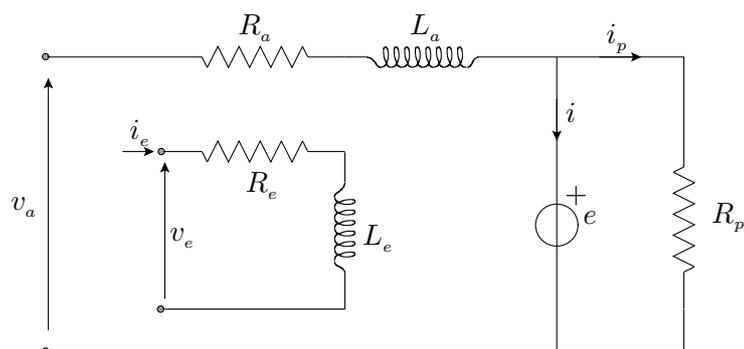


Figura 1.13: Schema di una macchina elettrica con parametri parassiti.

Assumendo di applicare un carico meccanico all'albero del motore, le equazioni del sistema reale diventano:

$$E = k \Phi \omega$$

$$C = k \Phi I$$

$$I_a = I + I_p$$

$$V_a = E + (R_a + s L_a) I_a$$

$$V_e = (R_e + s L_e) I_e$$

$$I_p = \frac{E}{R_p}$$

$$\Phi \simeq k_e I_e$$

$$C = C_r + \omega(\beta + s J)$$

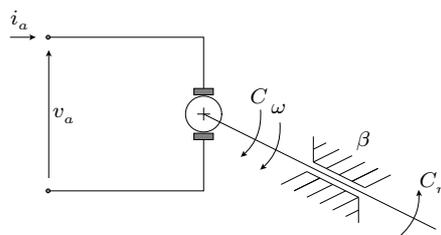


Figura 1.14: Macchina elettrica con carico.

dove C rappresenta la coppia motrice generata, C_r la coppia resistente, β le perdite per attrito meccanico e J il momento di inerzia complessivo dell'asse di rotazione con la massa trascinata.

Motore con comando in armatura

E' possibile pilotare un motore elettrico agendo sulla tensione di armatura. In questo caso lo schema a blocchi risulta quello di Fig. 1.15.

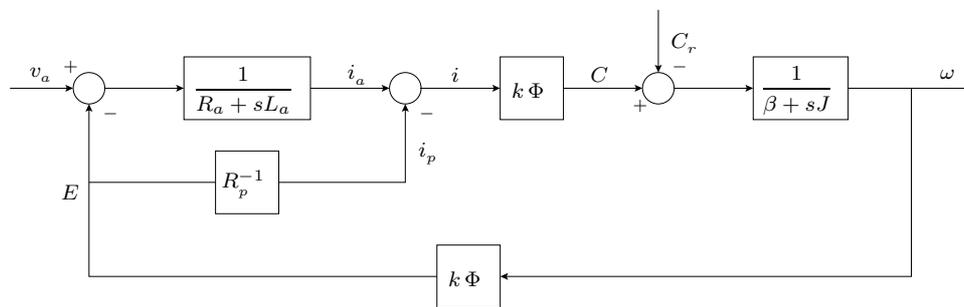


Figura 1.15: Schema a blocchi di un motore con comando in armatura.

E' possibile semplificare tale schema ponendo (Fig. 1.16):

$$\beta_c = \beta + k^2 \Phi^2 R_p^{-1}.$$

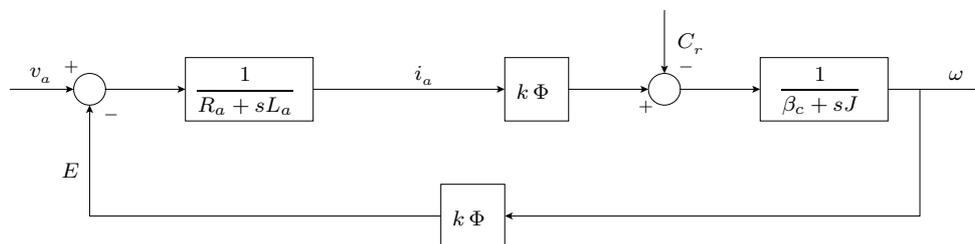


Figura 1.16: Schema a blocchi semplificato di un motore con comando in armatura.

Se la coppia C_r aumenta, cioè il motore gira più lentamente, allora si avrà un aumento della corrente di armatura I_a , che a sua volta produrrà un aumento della coppia motrice che tende a mantenere costante la velocità del motore (grazie alla retroazione).

Motore con comando in eccitazione

Un motore si dice comandato in eccitazione se la variabile di comando è la tensione di eccitazione. In questo caso la corrente di armatura I_a viene mantenuta costante. Le equazioni di funzionamento risultano essere:

$$C \simeq k k_e I I_e = \underbrace{(k k_e I)}_{\text{costante}} I_e$$

$$I = I_a - I_p$$

$$I_p = E_m/R_p \simeq \text{costante} \ll I_a$$

$$V_e = (R_e + sL_e) I_e$$

$$C = C_r + \omega(\beta + sJ)$$

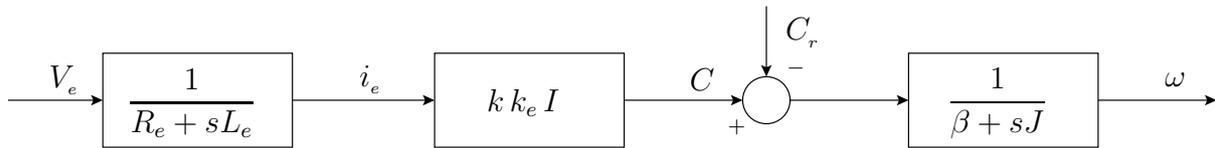


Figura 1.17: Schema a blocchi di un motore con comando in eccitazione.

Poiché in questa configurazione non è presente un anello di retroazione (sistema in anello aperto), se aumenta la coppia resistente C_r , il motore rallenterà.

Il vantaggio di questo tipo di comando è quello di poter comandare una variabile di potenza (ω) attraverso una variabile a bassa potenza. Infatti, la tensione di eccitazione V_e è una variabile a bassa potenza (rispetto a V_a). Il sistema in questo caso si comporta come un amplificatore di potenza. Frequente è l'uso di questo azionamento per la realizzazione di attuatori elettrici ("motori coppia").

Dinamo con comando in velocità

Una dinamo è solitamente utilizzata come generatore di tensione, ma può anche essere usata come sensore di velocità. In quest'ultimo caso la variabile di comando è la velocità ω mentre l'uscita è la tensione V_a (Fig. 1.18); la corrente I_a agisce in questo caso come un disturbo.

Se la dinamo è ben costruita, i disturbi sono ridotti al minimo e la tensione V_a è circa proporzionale alla velocità ω . A questo scopo è però necessario mantenere il flusso Φ

il più possibile costante. A tal fine vengono spesso utilizzati magneti permanenti per la generazione di un campo magnetico di eccitazione in grado di garantire un flusso costante.

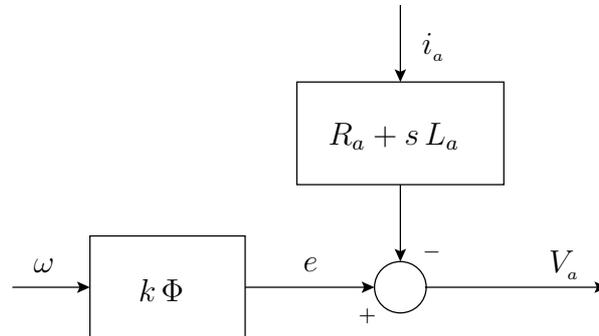


Figura 1.18: Schema a blocchi di una dinamo tachimetrica.

1.2.4 Modelli di sistemi idraulici

Per semplificare la trattazione, nel seguito considereremo liquidi incomprimibili, privi di viscosità interna e attrito con le pareti dei condotti ed in moto stazionario.

Sotto queste ipotesi vale la Legge di Bernoulli:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{costante} \quad (1.9)$$

dove con p denotiamo la pressione, con ρ la densità del liquido, con g l'accelerazione di gravità e con u la velocità del liquido.

Il termine $p + \rho g h$ rappresenta l'energia potenziale, mentre $\frac{1}{2} \rho u^2$ quella cinetica.

Dividendo la (1.9) per ρg otteniamo:

$$y = \underbrace{\frac{p}{\rho g} + h}_z + \frac{u^2}{2g} = \text{costante}.$$

y viene chiamato *carico idraulico totale*, mentre il termine z si dice *carico piezometrico*.

Resistenza idraulica

Per liquidi con attrito interno/esterno lungo una condotta si verificano perdite del carico idraulico in funzione della portata in volume $q = A u$ (A =sezione condotta). In questo caso la legge di Bernoulli non può più essere applicata, e quello che otteniamo è una legge

non lineare. Infatti, la caduta di carico Δy è una funzione non lineare di q (Fig. 1.20). Tale funzione può essere linearizzata, in modo da evidenziare un termine detto *resistenza idraulica*:

Linearizzazione 2: $\Delta y = y_0 + Rq$, R =resistenza idraulica $[\frac{s}{m^2}]$

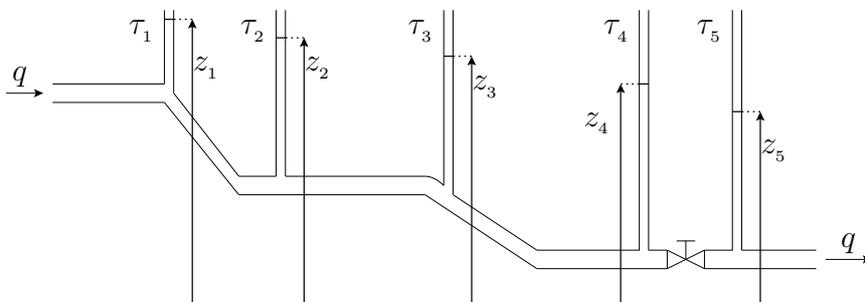


Figura 1.19: Condotta idraulica con perdita di carico.

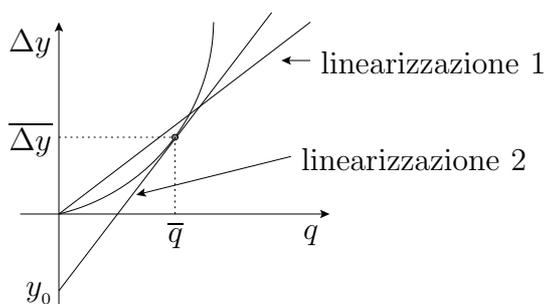


Figura 1.20: Relazione tra perdita di carico e portata.

Capacità idraulica

Il concetto di *capacità idraulica* deriva direttamente dall'equazione di conservazione della massa. Facendo riferimento alla Fig. 1.21, abbiamo:

$$\Delta q = q_1 - q_2 = A \dot{z} = A \dot{y}$$

dove con A denotiamo la capacità idraulica $[m^2]$.

Inerzia idraulica

Il fenomeno dell'*inerzia idraulica* si manifesta in presenza di *moto vario*. Analizzando un tratto di condotta (Fig. 1.22), per le equazioni dell'equilibrio dinamico si ha:

$$m_i \dot{u}_i = A_i(p_i - p_{i+1})$$

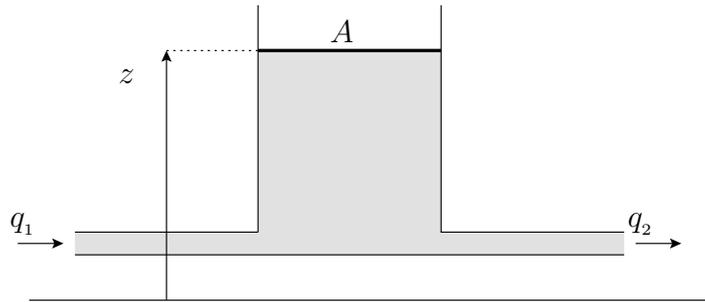


Figura 1.21: Condotta che presenta una capacità idraulica A .

da cui

$$\Delta y_i = \frac{p_i - p_{i+1}}{\rho g} = \underbrace{\frac{\Delta x_i}{g A_i}}_{L_i} \dot{q}$$

dove A_i è la sezione della condotta, Δx_i la lunghezza del tratto di condotta, $m_i = \rho A_i \Delta x_i$ la massa del liquido e $u_i = q/A_i$ la sua velocità. Il termine L_i si dice inerzia idraulica $\left[\frac{s^2}{m^2}\right]$.

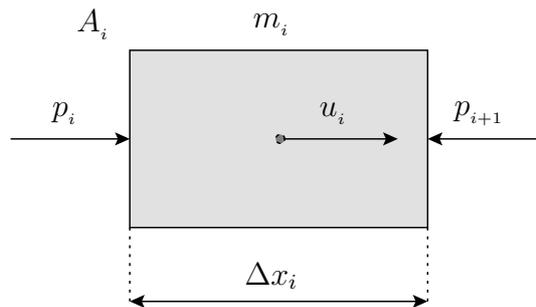


Figura 1.22: Tratto di condotta che presenta un'inerzia idraulica.

Possiamo quindi riassumere le principali equazioni di funzionamento che caratterizzano i componenti elementari di un sistema idraulico come segue:

$$\begin{aligned} \Delta y &= y_0 + Rq && \text{resistenza idraulica} \\ \Delta q &= A\dot{y} && \text{capacità idraulica} \\ \Delta y &= L\dot{y} && \text{inerzia idraulica.} \end{aligned}$$

Esempio 1.5 (Valvola ad apertura variabile)

Sia dato il sistema di Fig. 1.23, rappresentante una valvola idraulica ad apertura variabile.

L'equazione del sistema risulta:

$$\Delta y = \Delta y(q, \vartheta) \simeq \Delta y_0 + Rq - \lambda \vartheta$$

dove Δy_0 è la costante di linearizzazione, R la resistenza idraulica media, ϑ l'angolo di apertura della valvola e λ il coefficiente di comando.

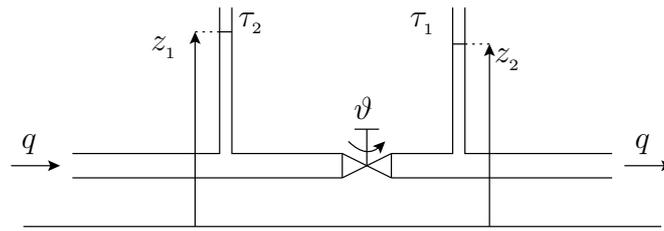


Figura 1.23: Valvola idraulica ad apertura variabile.

Esempio 1.6 (*Servomotore oleodinamico*)

Un servomotore oleodinamico (Fig. 1.24) è un attuatore idraulico che consente, attraverso un piccolo spostamento del pistone a bassa potenza (x) di generare uno spostamento del pistone ad alta potenza (y).

Supponiamo di spostare il pistone piccolo di una quantità positiva x . Applicando la legge di Bernoulli (con perdite) abbiamo:

$$p_0 = \frac{1}{2}\rho u_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho \frac{q_1^2}{A^2(x)} + p_1$$

e cioè

$$\frac{1}{2}\rho q_1^2 = (p_0 - p_1) A^2(x).$$

Dunque, si può dire che esiste una costante k tale che

$$q_1 = k x \sqrt{p_0 - p_1}$$

Analogamente, si può dimostrare che

$$q_2 = k x \sqrt{p_2}.$$

Poiché si suppone che i liquidi siano incomprimibili si ha:

$$q_1 = q_2 = q$$

Utilizzando la relazione:

$$q_1^2 + q_2^2 = 2q^2$$

si ottiene:

$$q = \frac{k x}{\sqrt{2}} \sqrt{p_0 - \Delta p} \quad , \quad \Delta p = p_1 - p_2$$

Linearizzando (costante di linearizzazione=0) si ha $\Delta p \simeq k_1 x - k_2 q$.

Calcoliamo adesso l'equazione del moto del pistone di potenza (nel dominio di Laplace).

$$A \Delta p - f = \beta u + s m u = (\beta + m s) u$$

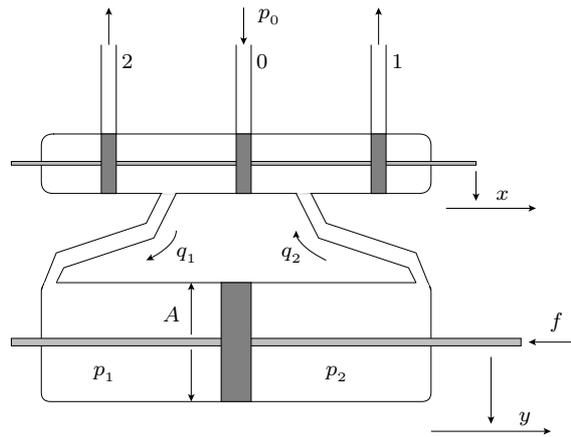


Figura 1.24: Servomotore oleodinamico.

dove m è la massa del pistone e del carico, β è il coefficiente di attrito ed f è la forza resistente.

In Fig. 1.25 è riportato lo schema a blocchi del servomotore in cui la forza resistente gioca il ruolo di disturbo.

Definendo le seguenti funzioni di trasferimento

$$G(s) = \frac{k_1 A}{\beta_c + m s} \quad , \quad G_d(s) = \frac{1}{\beta + m s}$$

ed essendo β_c il coefficiente di attrito equivalente

$$\beta_c = \beta + k_2 A^2,$$

è possibile rappresentare il sistema come in Fig. 1.26.

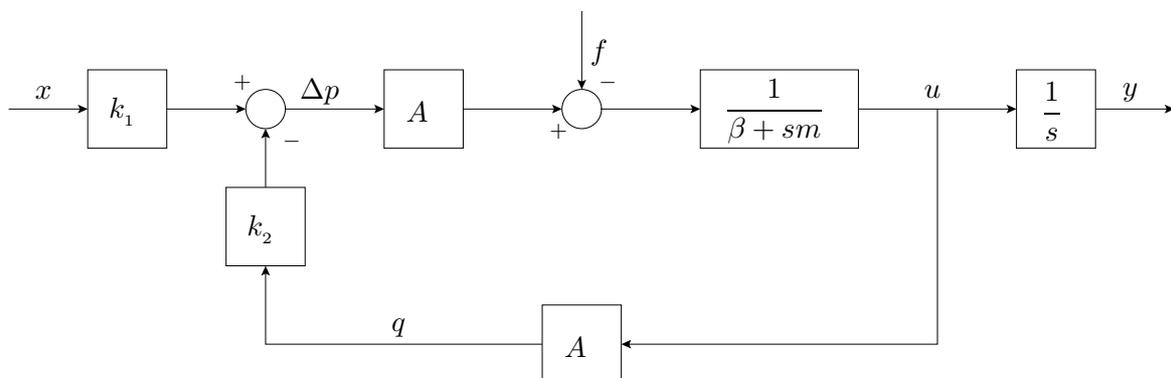


Figura 1.25: Schema a blocchi del servomotore oleodinamico.

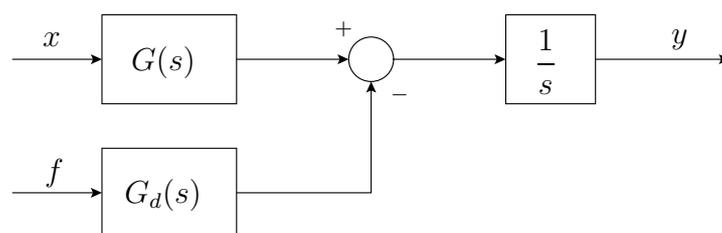


Figura 1.26: Schema a blocchi del servomotore oleodinamico.

ELEMENTO IDRAULICO	ELEMENTO ELETTRICO
Portata	Corrente
Carico idraulico	Tensione
Capacità idraulica	Capacità
Resistenza idraulica	Resistenza elettrica
Inerzia idraulica	Induttanza

Tabella 1.2: Elementi idraulici ed equivalenti elettrici.

Equivalenza tra circuiti idraulici ed elettrici

Come nel caso dei sistemi meccanici, è possibile trasformare un sistema idraulico in uno elettrico equivalente. In Tab. 1.2 sono riportate le analogie tra i due tipi di sistemi.

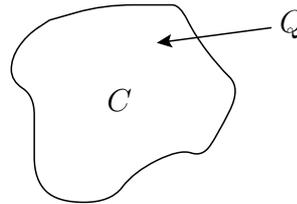
1.2.5 Modelli di sistemi termici

In generale i fenomeni termici (es. conduzione del calore) sono rappresentati da equazioni alle derivate parziali. L'ipotesi di avere la temperatura costante spazialmente permette di utilizzare modelli a parametri concentrati. Questa ipotesi è soddisfatta per corpi di piccole dimensioni e fluidi perfettamente mescolati.

- Capacità termica (C)

$$C = C_s \cdot M$$

$$Q = C \cdot \Delta T$$

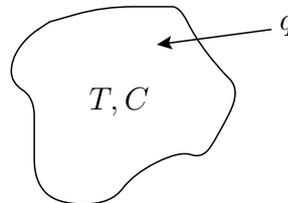


dove Q denota il calore scambiato, ΔT la variazione di temperatura del corpo e C_s il calore specifico. E' opportuno osservare che, mentre la capacità termica è una quantità caratteristica di un dato sistema, il calore specifico è una caratteristica del materiale che costituisce il corpo.

Il calore specifico dell'acqua a $14.5^\circ C$ e ad $1 atm$ è pari a $1 \frac{Cal}{g \cdot K}$.

- Conservazione dell'energia (trasformazione isocora)

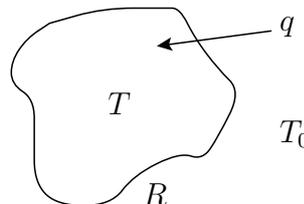
$$q = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dT}{dt} = \frac{dU}{dt}$$



dove q denota la potenza termica ed U l'energia interna del corpo. La temperatura T è una variabile di stato.

- Modello di conduzione a parametri concentrati (resistenza termica)

$$q = \frac{1}{R} (T_0 - T)$$



La resistenza termica di un corpo denota quindi la proprietà di ostacolare la trasmissione del calore. Quanto più la resistenza termica è alta, tanto maggiore sarà l'effetto isolante del materiale nei confronti del flusso di calore.

Esempio 1.7 (*Termometro a mercurio*)

Sia dato il sistema in Fig. 1.27 rappresentante un termometro a mercurio immerso in un liquido, in cui R , C e T denotano rispettivamente la resistenza termica, la capacità termica e la temperatura del bulbo, mentre T_0 è la temperatura del liquido.

Vogliamo determinare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{T(s)}{T_0(s)}$.

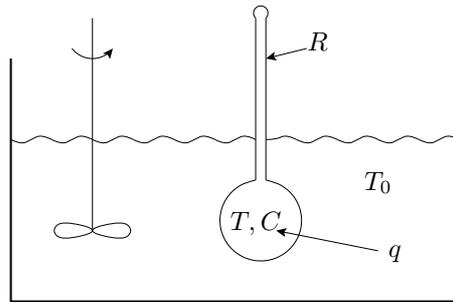


Figura 1.27: Termometro a mercurio immerso in un liquido.

Le equazioni del sistema risultano:

$$\begin{cases} q = \frac{1}{R}(T_0 - T) & (\text{conduzione}) \\ q = C \frac{dT}{dt} & (\text{conservazione energia}) \end{cases}$$

da cui:

$$RC \frac{dT}{dt} = T_0 - T \quad \longrightarrow \quad \dot{T} = -\frac{1}{RC}T + \frac{1}{RC}T_0.$$

La funzione di trasferimento tra T_0 e T risulta quindi:

$$sT(s) = -\frac{1}{RC}T(s) + \frac{1}{RC}T_0(s) \quad \longrightarrow \quad G(s) = \frac{T(s)}{T_0(s)} = \frac{1}{1 + sRC}.$$

In Fig. 1.28 è riportata la risposta temporale del sistema ed il circuito elettrico equivalente.

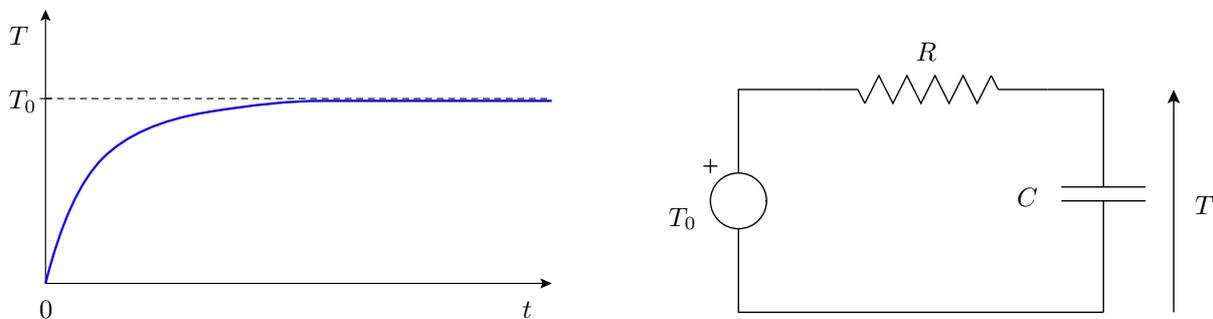


Figura 1.28: Risposta temporale del sistema dell'esempio 1.7 e circuito elettrico analogo.

Esempio 1.8 (Scaldabagno)

Analizziamo adesso lo schema di uno scaldabagno come riportato in Fig. 1.29.

Sia q_t il calore assorbito dall'acqua, R la resistenza termica delle pareti dello scaldabagno, n il flusso d'acqua in transito (in $\frac{Kg}{s}$), C_s il calore specifico dell'acqua e C la capacità termica del sistema.

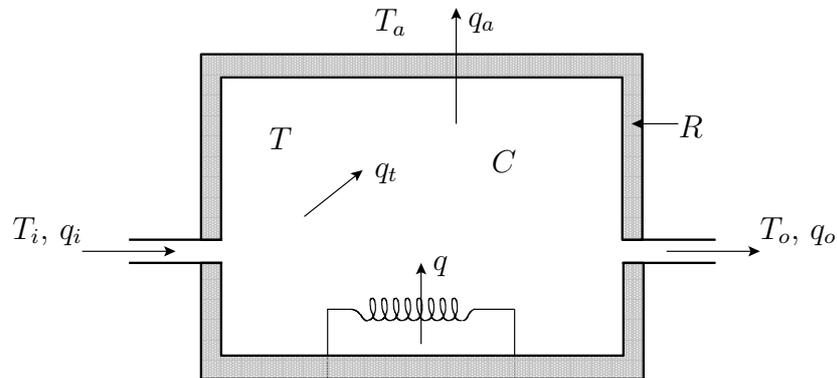


Figura 1.29: Schema di uno scaldabagno.

Per il teorema di conservazione dell'energia si ha:

$$q_i + q = q_t + q_a + q_o$$

in cui

$$q_t = C \frac{dT}{dt} \quad , \quad q_o = n C_s T \quad , \quad q_i = n C_s T_i \quad , \quad q_a = \frac{T - T_a}{R}.$$

Risulta quindi:

$$C \dot{T} + n c_s (T - T_i) + \frac{T - T_a}{R} = q$$

da cui

$$\dot{T} = -\frac{1}{C} \left(n C_s + \frac{1}{R} \right) T + \underbrace{\frac{n C_s}{C} T_i}_{\text{ingresso}} + \underbrace{\frac{1}{RC} T_a}_{\text{ingresso}} + \underbrace{\frac{1}{C} q}_{\text{ingresso}}.$$

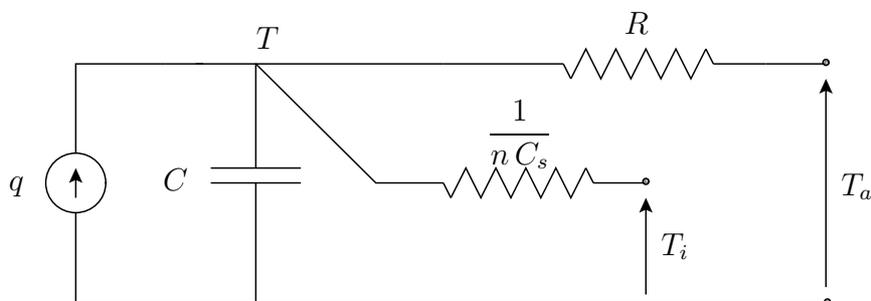


Figura 1.30: Analogo elettrico dello scaldabagno.