FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Esercitazione del 30/10

ESERCIZIO 1

Dato il seguente sistema in forma matriciale

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -\frac{\bar{U}^2}{K^2} \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$

Verificarne la stabilità.

Per capire se un sistema è stabile o meno, bisogna valutare gli autovalori della matrice A.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ k & \lambda + \frac{\bar{U}^2}{K^2} \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{\bar{U}^2}{K^2}\lambda + k = 0$$

Utilizziamo il **criterio di Cartesio**[1]:

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ \frac{\bar{U}^2}{K^2} > 0 \\ k > 0 \end{cases}$$

Perciò il sistema risulta asintoticamente stabile $\leftrightarrow k > 0$

ESERCIZIO 2

$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u$

$\dot{x}_2 = -4x_2$

1. $x_0 = 0, u(t) = e^t, t > 0$
2. $x_0 = 0, u(t) = 1, t > 0$

Calcolare la stabilità ed il movimento dello stato.

Risoluzione

$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$

Calcoliamo la stabilità. Siccome A è triangolare superiore gli autovalori sono i valori presenti sulla diagonale principale. Siccome $\lambda_i(A) < 0 \; \forall i$ il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE.

Per calcolare il movimento dello stato, siccome A è triangolare possiamo usare il procedimento di **risoluzione in cascata**.

2° equazione (partiamo da quì poichè $\dot{x}_2$ dipende solo da x_2.

$\dot{x}_2 = -4x_2$

$B_2 = 0$

$x_{20} = 0$

$u(t) = e^t$

Formula di Lagrange:

$$x_2(t) = e^{-4t} \cdot 0 + \int_0^t e^{-4(t-\tau)} \cdot 0 \cdot u(\tau)d\tau = 0$$

---

[1] sia dato un polinomio a coefficienti reali: $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ con coefficienti $a_n, \ldots, a_1, a_0$ reali e non tutti nulli, avente n radici reali.
La regola di Cartesio stabilisce che:
Il massimo numero di radici reali positive (negative) di un polinomio [1] è dato dal numero di variazioni (permanenze) di segno fra coefficienti consecutivi.

1° equazione

$\dot{x}_1 = -2x_1 + W \rightarrow W = 2x_2 + e^t$

$B_1 = 1$

$x_{20} = 0$

$u(t) = e^t$

Formula di Lagrange:

$$x_2(t) = e^{-2t} \cdot 0 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 1 \cdot (2x_2 + e^\tau) d\tau =$$

$$= e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau} \cdot e^\tau d\tau = \frac{1}{3}(e^t - e^{-2t})$$

Il movimento dello stato va ∞ $per\ t \rightarrow \infty$.

Il **movimento dello stato** è $x(t) = X_L(t) + X_F(t)$.

Se il sistema è **asintoticamente stabile** il **movimento libero** $\boldsymbol{X_L(t)} \rightarrow 0\ per\ t \rightarrow \infty$.

Il **movimento forzato** $\boldsymbol{X_F(t)}$ dipende invece dai **modi** del sistema e dai modi dell'ingresso ($\boldsymbol{e^t}$).

Rifacciamo l'esercizio utilizzando il nuovo ingresso $u(t) = 1, t > 0$

2° equazione

$\dot{x}_2 = -4x_2$

$A^* = -4$

$B^* = 0$

$X_{02} = 0$

$u(t) = 1$

$$x_2(t) = e^{-4t} + \int_0^t e^{-4(t-\tau)} \cdot B \cdot 1 d\tau = 0$$

1° equazione

$\dot{x}_1 = -2x_1 + W \rightarrow W = 2x_2 + 1$

$A^* = -2$

$B_1 = 1$

$x_{20} = 0$

$u(t) = 1$

$$\boldsymbol{x_1(t)} = e^{-2t} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 1 \cdot 1 d\tau = 0$$

$$= -\frac{e^{-2t}}{2}[e^{2\tau}]_0^t = \boldsymbol{\frac{1}{2} - \frac{e^{-2t}}{2}}$$

Il movimento dello stato si assesta a $\frac{1}{2} per\ t \rightarrow \infty$

ESERCIZIO 3

Dato il sistema LTI, determinare la stabilità e il movimento libero $\boldsymbol{X_L}$ $\boldsymbol{x_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

$\dot{x}_1 = -2x_1 + 3x_2 + u$

$\dot{x}_2 = 3x_2 + u$

$y = x_1 + x_2$

Risoluzione

$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $C = [1 \quad 1]$; $D = 0$

- Il **sistema** è **instabile** in quanto A possiede un autovalore $\lambda_i(A) > 0$.

Possiamo procedere con la risoluzione in cascata siccome A è triangolare.

2° equazione

$\dot{x}_2 = 3x_2 + u$

$A^* = 3$

$B^* = 1$

$X_{02} = 0$

$u(t) = 0$ (movimento libero)

$$\boxed{x_2(t) = e^{3t}x_{20} + \int_0^t e^{3(t-\tau)} \cdot B \cdot u(t)d\tau = 0}$$

1° equazione

$\dot{x}_1 = -2x_1 + W \rightarrow W = 3x_2 + u$

$A^* = -2$

$B_1 = 1$

$x_{10} = 1$

$u(t) = 0$ (perchè stiamo guardando solo il movimento libero)

$$\boxed{\boldsymbol{x_1(t)} = e^{-2t} \cdot 1 + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 1 \cdot 0 d\tau = e^{-2t}}$$

Possiamo ora ricavare $\mathbf{X_L(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{e^{-2t}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$

Cambiando la condizione inziale in $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ la 2° equazione diventa:

$\dot{x}_2 = 3x_2 + u$

$A^* = 3$

$B^* = 1$

$X_{02} = \alpha \neq 0$

$u(t) = 0$

$$x_2(t) = e^{3t}\alpha + \int_0^t e^{3(t-\tau)} \cdot B \cdot u(t)d\tau = e^{3t}\alpha \rightarrow \infty$$

Se il sistema è instabile $\exists \, \boldsymbol{x_0} \leftrightarrow \mathbf{lim}_{t\to\infty} \, \boldsymbol{x(t)} = \infty$

ESERCIZIO 4

$\dot{x}_1 = \alpha(x_2 - 1) + x_2^2 + x_1 + u - 2$

$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$

$y = x_1$

D. **Classificare il sistema**

R. sistema dinamico, non lineare, strettamente proprio, del 2° ordine, SISO.

D. **determinare gli equilibri[2] per $\boldsymbol{u(t) = \bar{u} = 2}$**

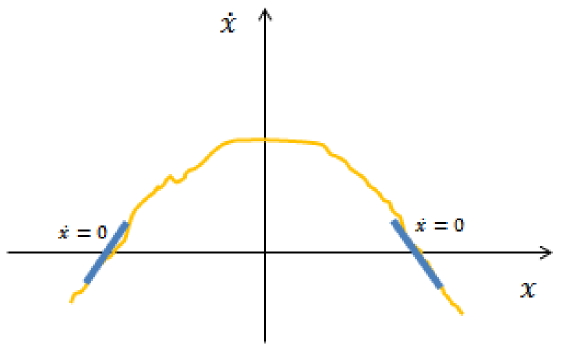
R.

$0 = \alpha x_2 - \alpha + x_2^2 + x_1 + 2 - 2 \rightarrow 1 + x_1 = 0 \rightarrow \boldsymbol{x_1 = -1}$

$0 = -2x_2 + 2 \rightarrow \boldsymbol{x_2 = 1}$

$\underline{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Intorno al punto di equilibrio $\underline{x}$ posso linearizzare il sistema.



$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}\bar{u}} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}\bar{u}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|_{\bar{x}\bar{u}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|_{\bar{x}\bar{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \alpha + 2x_2 \\ 0 & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$$

Il **sistema linearizzato** è **instabile** in quanto esiste un autovalore >0. La matrice è triangolare superiore, gli autovalori sono sulla diagonale principale.

[2] L'equilibrio si determina ponenso uguali a 0 le derivate caratterizzanti il sistema e risolvendo.

ESERCIZIO 5

Determinare gli **equilibri** del sistema non lineare:

$$\dot{\mathbf{x}}_3 = |\mathbf{x}|^3 - 3\mathbf{x}^2 + 3|\mathbf{x}| - \mathbf{u}$$

con $\boldsymbol{u} = \mathbf{1}$

Risoluzione

- Caso $\begin{cases} \boldsymbol{x} > \mathbf{0} \\ \dot{x} = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x-1)^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \boldsymbol{x} = \mathbf{1} \end{cases}$

Entrambi valori di x: 1,-1 sono coerenti con le condizioni

- Caso $\begin{cases} \boldsymbol{x} < \mathbf{0} \\ \dot{x} = -x^3 - 3x^2 - 3x - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -(x+1)^3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \boldsymbol{x} = -\mathbf{1} \end{cases}$

1° equilibrio: $\boldsymbol{\bar{x} = 1}$

$\delta\dot{x} = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)|_{\bar{x}\bar{u}}\delta x - \delta u$

$\delta\dot{x} = \mathbf{0}\delta x - \delta u$

Equilibrio asintoticamente? stabile, non posso concludere nulla sul sistema non lineare.

1° equilibrio: $\boldsymbol{\bar{x} = -11}$

Questo valore rappresenta la matrice A, siccome è uno scalare combacia con l'unico autovalore: 0

$\delta\dot{x} = (-x^3 - 3x^2 - 3x - 1)|_{\bar{x}\bar{u}}\delta x - \delta u$

$\delta\dot{x} = \mathbf{0}\delta x - \delta u$

Sistema linearizzato nel punto di equilibrio stabile, nulla posso concludere del sistema non lineare.

Per il **sistema non lineare** devo utilizzare **il metodo grafico**.