FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Esercitazione del 20/11

Esercizio 1 (presente al 95% nel tema d'esame!)

$$G(s) = 10 \cdot \frac{s+1}{(s+0.1)(s^2+20s+100)}$$

$$u(t) = 2 + \sin(0.01t) + \sin(0.1t)$$

Calcolare la $\boldsymbol{Y_R(t)}$

Si vede subito che il sistema è asintoticamente stabile in quanto gli AUTOVALORI sono tutti a parte reale <0, quelli del secondo termine a denominatore lo si vede per Cartesio.

$$s^2 + 20s + 100$$

$$\rightarrow \lambda_{12} = \frac{-20 \pm \sqrt{400-400}}{2} = -10$$

Quindi: $s^2 + 20s + 100 = (s+10)^2$

Occore mettere il sistema in forma **FATTORIZZATA** o di **BODE**.

$$\boldsymbol{G(s)_{FATTORIZZATA}} = 10 \cdot \frac{S+1}{0.1\left(\frac{S}{0.1}+1\right)100\left(\frac{S}{10}+1\right)^2}$$

$$= \frac{\boldsymbol{s+1}}{\boldsymbol{(10s+1)(0.1s+1)^2}}$$ → FdT equivalente ma fattorizzata con BODE

Ora valutiamo gli ingressi.

$\boldsymbol{u_1(t) = 2}$, scalino di valore 2

$$Y_{12}(t) = G(0) \cdot \bar{u} = 1 \cdot 2 = 2$$

Potevamo usare equivalentemente

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{s+1}{(10s+1)(0.1s+1)^2} \cdot \frac{2}{s}$$

TVF → $y_\infty = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{s+1}{(10s+1)(0.1s+1)^2} \cdot \frac{2}{s} = 2$

$\boldsymbol{u_2(t) = sin(0.01t)}$ usiamo **il TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA**

TRF: $Y_R(t) = |G(j\bar{\omega})| \cdot sin(\bar{\omega}t + \measuredangle G(j\bar{\omega})) \quad \bar{\omega} = 0.01$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega+1}{(10j\omega+1)(0.1j\omega+1)^2}$$

Di entità trascurabile

$$|G(j\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=0.01} = \frac{j0.01+1}{|10j0.01+1||0.1j0.01+1|^2} = \frac{\sqrt{\mathbf{0.01^2}+\mathbf{1^2}}}{\sqrt{\mathbf{0.1^2}+\mathbf{1^2}}\sqrt{\mathbf{0.001^2}+\mathbf{1^2}}} = \mathbf{1}$$

Ora calcoliamo la fase.

$$\boldsymbol{\measuredangle G(j\bar{\omega}) = +\measuredangle(1+0.01j) - \measuredangle(1+10j\cdot 0.01) - 2\measuredangle(1+0.1\cdot 0.01j)}$$ [1]

$$\measuredangle G(j\bar{\omega})_{\bar{\omega}=0.01} = atan\left(\frac{0.01}{1}\right) - atan\left(\frac{0.1}{1}\right) - 2atan\left(\frac{0.001}{1}\right) =$$

$$= 0.01 - 0.1 - 2 \cdot 0.001 \cong 0$$

Possiamo finalmente calcolare la risposta di regime:

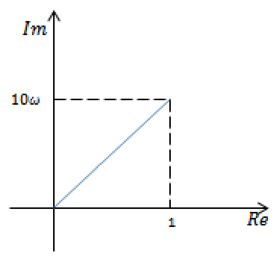
$$Y_{R2}(t) = |G(j\bar{\omega})| \cdot sin\big(\bar{\omega}t + \measuredangle G(j\bar{\omega})\big) = 1 \cdot \sin(0.01t+0) = \sin(0.01t)$$

Il **calcolo** della **fase** e **modulo** di un numero complesso $z = a + jb$

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$\measuredangle z = \text{atan}\left(\frac{b}{a}\right)$$

NB se la FdT è in forma di BODE a è sempre 1.



---

[1] Il segno + è per il numeratore, - per il denominatore. Nell'ultimo termine (2) è perchè quel termine è al quadrato.

$\boldsymbol{u_3(t) = sin(0.1t) \quad \bar{\omega} = 0.1}$

$$|G(j\bar{\omega})|_{\bar{\omega}=0.1} = \frac{|j0.1+1|}{|10j0.1+1||0.1j0.1+1|^2} = \frac{\sqrt{\mathbf{0.1^2}+\mathbf{1^2}}}{\sqrt{\mathbf{1^2}+\mathbf{1^2}}\sqrt{\mathbf{0.01^2}+\mathbf{1^2}}} = \mathbf{1/\sqrt{2}}$$

Il segnale verrà smorzarto di un fattore $1/\sqrt{2}$

Ora calcoliamo la fase.

$$\measuredangle \boldsymbol{G(j\bar{\omega})} = +\measuredangle(\mathbf{1}+\mathbf{0.1}\boldsymbol{j}) - \measuredangle(\mathbf{1}+\mathbf{10}\boldsymbol{j}\cdot\mathbf{0.1}) - \mathbf{2}\measuredangle(\mathbf{1}+\mathbf{0.01}\boldsymbol{j})^2$$

$$\measuredangle G(j\bar{\omega})_{\bar{\omega}=0.01} = atan\left(\frac{0.1}{1}\right) - atan\left(\frac{1}{1}\right) - 2atan\left(\frac{0.01}{1}\right) \cong +0.1 - 0.78 - 2\cdot 0.02 = 0.9 \approx 1 \rightarrow -\frac{\pi}{4}$$

… la risposta di regime:

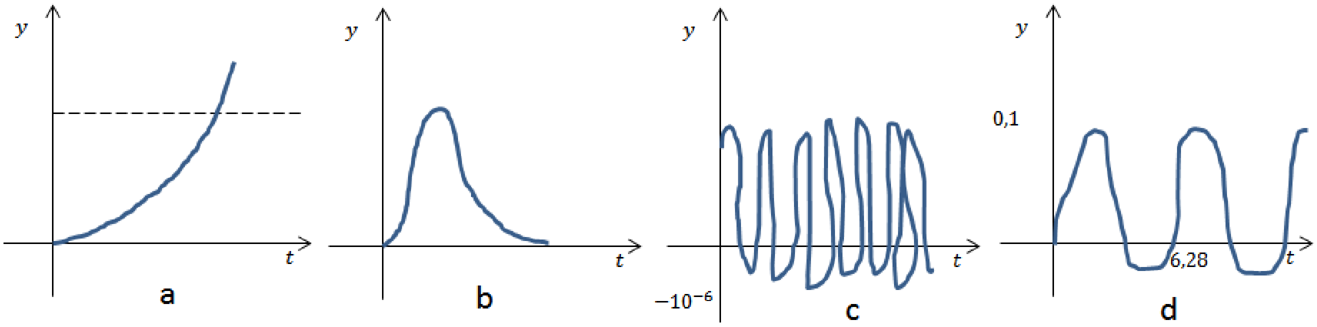
$$Y_{R3}(t) = |G(j\bar{\omega})|\cdot sin\left(\bar{\omega}t + \measuredangle G(j\bar{\omega})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \sin\left(0.1t + -\frac{\pi}{4}\right)$$

Infine la risposta a regime complessiva del sistema è:

$$Y_R(t) = Y_{R1}(t) + Y_{R2}(t) + Y_{R3}(t) = 2 + \sin(0.01t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \sin\left(0.1t + -\frac{\pi}{4}\right)$$

Esercizio 2 – associare il grafico all'ingresso

$$G(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2}$$



$u_1(t) = imp(t)$

$u_2(t) = e^t sca(t)$

$u_3(t) = \sin(t)\, sca(t)$

$u_4(t) = \sin(100t)\, sca(t)$

Il sistema è asintoticamente stabile, poichè i poli hanno tutti parte reale negativa.

- $u_1(t) = imp(t)$

  $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2} \cdot 1 = \frac{\alpha_1}{s+5} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2}$$

  $y(t) = \alpha_1 e^{-5t} + \alpha_2 e^{-1t} + \alpha_3 t e^{-t}$

  $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ [3] → grafico b

- $u_2(t) = e^t sca(t) = e^t, t \geq 0 \to U(s) = \frac{1}{s-1}$

  $$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{(s+5)(s+1)^2} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{\alpha_1}{s+5} + \frac{\alpha_2}{s+1} + \frac{\alpha_3}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_4}{s-1}$$

  $y(t) = \alpha_1 e^{-5t} + \alpha_2 e^{-1t} + \alpha_3 t e^{-t} + \alpha_4 e^t$

  $\lim_{t\to\infty} y(t) = \infty$ → grafico a

- $y(t) = |G(j\varpi)| \cdot sin(\varpi t + \measuredangle G(j\varpi))$

  $|G(j100)| = 10^{-6}$.

  $|G(j10)| = 0.1$

---

[3] $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = 0$ pochiè te^{-t} è un infinito di ordine superiore rispetto a t