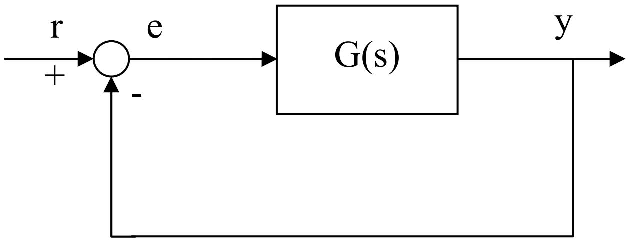
FEDELTÀ DELLA RISPOSTA DEI SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE: ANALISI DELLA PRECISIONE IN REGIME PERMANENTE

Nello studio dei sistemi di controllo in retroazione spesso si richiede che l'uscita segua l'ingresso (*problema di inseguimento*).

Per questo motivo, una specifica molto importante è la precisione del sistema, espressa in termini di errore a regime della risposta del sistema in anello chiuso ai segnali canonici gradino, rampa lineare, rampa parabolica.

PRECISIONE DEI SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE UNITARIA

Consideriamo inizialmente un generico sistema con retroazione unitaria, del tipo nella figura seguente, dove G(s) è la funzione di trasferimento di anello, comprendente quella del plant e quella del controllore.



In questo schema la variabile a valle della giunzione sommante

$$e(t)=r(t)-y(t)$$

rappresenta l'errore del sistema, ossia lo scostamento della variabile controllata y(t) rispetto al riferimento imposto r(t).

Se l'obiettivo del controllo è che l'uscita insegua l'ingresso, oltre a specifiche di tipo dinamico quali la stabilità e la rapidità di assestamento della risposta, è anche necessario progettare l'anello di controllo in modo che il sistema sia fedele, ossia soddisfi specifiche statiche espresse in termini del valore dell'errore a regime.

Nel dominio della frequenza complessa s si ha:

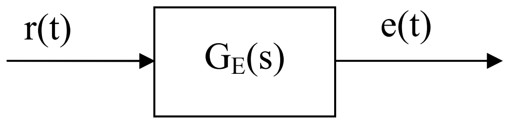
$$E(s)=R(s)-Y(s)=R(s)-G(s)E(s)$$

da cui

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} = \frac{1}{1+G(s)} R(s) = G_E(s)R(s)$$

e quindi la funzione di trasferimento dell'errore vale

$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)}.$$



Per mezzo della funzione di trasferimento dell'errore è dunque possibile calcolare l'andamento dell'errore e(t): è sufficiente antitrasformare il prodotto

$$E(s) = G_E(s)R(s)$$

da cui

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}\{E(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G_E(s)R(s)\}.$$

Di tale andamento e(t) ci interessa principalmente il valore a regime o asintotico, che si può agevolmente calcolare, se il sistema progettato è asintoticamente stabile, applicando il ben noto teorema del valore finale. Si ha dunque l'errore a regime:

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty}\left(e(t)\right) = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right).$$

ERRORE DI POSIZIONE

Si definisce errore di posizione di un sistema il valore dell'errore a regime ottenuto in risposta ad un ingresso a gradino unitario. Ponendo quindi

$$r(t)=1(t)$$

e supponendo il sistema in retroazione unitaria, si ha evidentemente

$$e_P = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(sG_E(s)R(s)\right) =$$
$$= \lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{1+G(s)}\right) = \frac{1}{1+K_P}$$

essendo K_P la costante di posizione del sistema, definita come segue:

$$K_P = \lim_{s\to 0}\left(G(s)\right).$$

ERRORE DI VELOCITÀ

Si definisce errore di velocità di un sistema il valore dell'errore a regime ottenuto in risposta ad un ingresso a rampa lineare unitaria.

Ponendo quindi

$$r(t)=t\cdot 1(t)$$

e supponendo il sistema in retroazione unitaria, si ha evidentemente

$$e_V = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(sG_E(s)R(s)\right) =$$
$$= \lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s^2}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s\cdot G(s)}\right) = \frac{1}{K_V}$$

essendo K_V la costante di velocità del sistema, definita come segue:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s\cdot G(s)\right).$$

ERRORE DI ACCELERAZIONE

Si definisce errore di accelerazione di un sistema il valore dell'errore a regime ottenuto in risposta ad un ingresso a rampa parabolica unitaria.

Ponendo quindi

$$r(t) = \frac{t^2}{2} \cdot 1(t)$$

e supponendo il sistema in retroazione unitaria, si ha evidentemente

$$e_A = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(sG_E(s)R(s)\right) =$$
$$= \lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{1+G(s)}\frac{1}{s^3}\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{s^2 \cdot G(s)}\right) = \frac{1}{K_A}$$

essendo K_A la costante di accelerazione del sistema, definita come segue:

$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G(s)\right).$$

TIPO DI UN SISTEMA IN RETROAZIONE UNITARIA

Supponiamo ora che la funzione di trasferimento di anello del sistema in retroazione unitaria sia espressa in forma poli-zeri come segue:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{s^{\mu} \cdot \prod_{i=1}^{n-\mu}(s - p_i)}.$$

Essa abbia dunque m zeri e n poli, di cui μ nell'origine, ed un guadagno k.

Il tipo del sistema indica il numero μ di poli che G(s) presenta nell'origine.

1. Quando μ=0 si dice che il sistema è di tipo zero. Questo è un caso abbastanza frequente. Si ha:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}.$$

2. Quando μ=1 si dice che il sistema è di tipo uno. Anche questo è un caso tipico, si pensi ad esempio ad un classico servomeccanismo di posizione. Si ha:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{s \cdot \prod_{i=1}^{n-1} (s - p_i)}.$$

3. Quando μ=2 si dice che il sistema è di tipo due. Questo è un caso raro. Si ha:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{s^2 \cdot \prod_{i=1}^{n-2} (s - p_i)}.$$

È molto infrequente che un sistema abbia tipo superiore a due.
Nel seguito vediamo come spesso il polo nell'origine, semplice o doppio, venga volutamente introdotto dal progettista nella funzione di trasferimento di anello (e, quindi, in quella del controllore posto a monte del plant), al fine di ottenere determinate caratteristiche dell'andamento asintotico della risposta.

Supponiamo ad esempio che il sistema abbia tipo zero, ossia la sua funzione di trasferimento in anello aperto sia esprimibile come:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}.$$

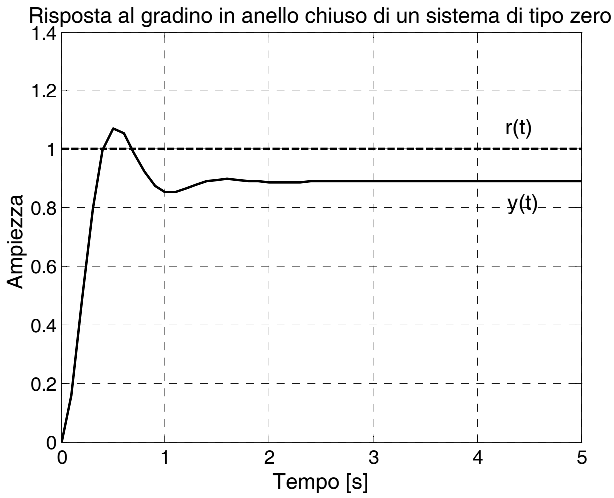
In tal caso la costante di posizione del sistema

$$K_P = \lim_{s \to 0} \left(G(s) \right)$$

è finita. Ne consegue che l'errore di posizione del sistema è anch'esso finito, essendo:

$$e_P = \frac{1}{1+K_P}.$$

In definitiva, il sistema risponde ad un ingresso a gradino con un errore a regime che è finito. Un esempio di questo comportamento è quello riportato nella figura successiva. Evidentemente, l'inseguimento va parzialmente a buon fine, poiché il sistema si comporta a regime come l'ingresso, producendo una uscita costante, che però non è pari al valore desiderato (il riferimento, appunto).



$$G(s) = \frac{40}{s^2+6s+5} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{40}{s^2+6s+45}$$

Osserviamo inoltre che l'errore di posizione è tanto più piccolo quanto maggiore è il guadagno k della funzione di trasferimento. L'errore a regime comunque non può mai essere nullo quando il tipo è zero.

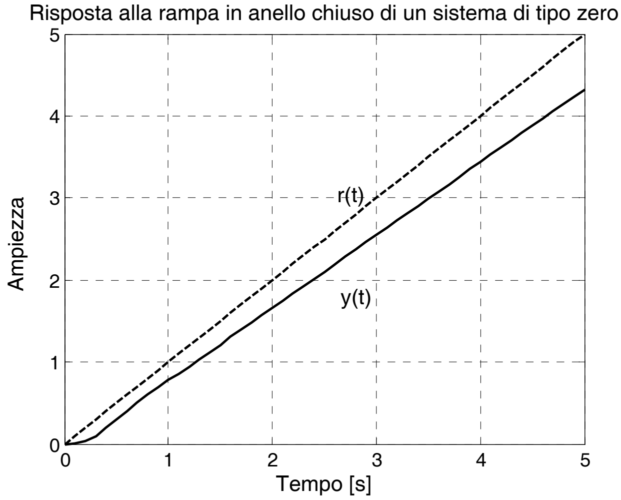
Calcoliamo ora le costanti di velocità e di accelerazione del sistema:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s\cdot G(s)\right) \quad K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2\cdot G(s)\right)$$

che sono entrambe evidentemente nulle. Ne consegue che l'errore di velocità e l'errore di accelerazione del sistema sono entrambi infiniti, essendo:

$$e_V = \frac{1}{K_V}, \quad e_A = \frac{1}{K_A}.$$

In definitiva, il sistema risponde ad un ingresso a rampa lineare e ad un ingresso a rampa parabolica con un errore a regime che è infinito. In tali casi, quindi, l'uscita del sistema non è in grado di seguire l'ingresso, infatti lo scostamento tra le due diverge (si veda l'esempio di risposta alla rampa lineare in figura).



$$G(s) = \frac{40}{s^2 + 6s + 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{40}{s^2 + 6s + 45}$$

Supponiamo ora che il sistema abbia invece tipo pari a uno, ossia la sua funzione di trasferimento in anello aperto sia esprimibile come:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{s \cdot \prod_{i=1}^{n-1}(s - p_i)}.$$

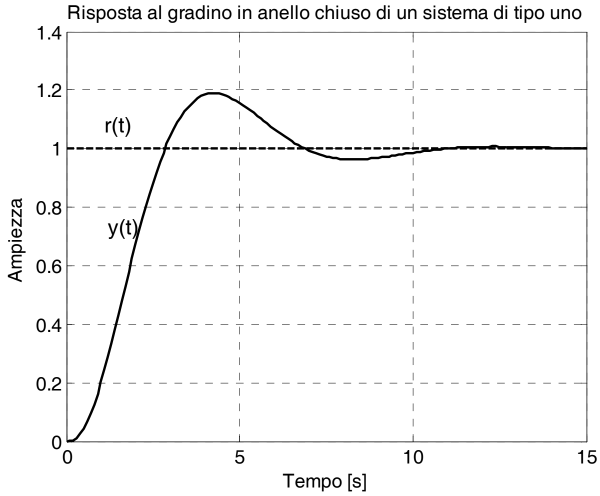
In tal caso la costante di posizione del sistema

$$K_P = \lim_{s \to 0}\left(G(s)\right)$$

è evidentemente infinita. Ne consegue che l'errore di posizione del sistema è nullo:

$$e_P = \frac{1}{1 + K_P}.$$

In definitiva, il sistema risponde ad un ingresso a gradino con un errore a regime nullo: l'inseguimento va perfettamente a buon fine, poiché il sistema si comporta a regime proprio come l'ingresso, producendo una uscita costante pari al valore desiderato (si veda l'esempio in figura).



$$G(s) = \frac{4}{s(s^2+6s+5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{4}{s^3+6s^2+5s+4}$$

Calcoliamo ora la costante di velocità del sistema:

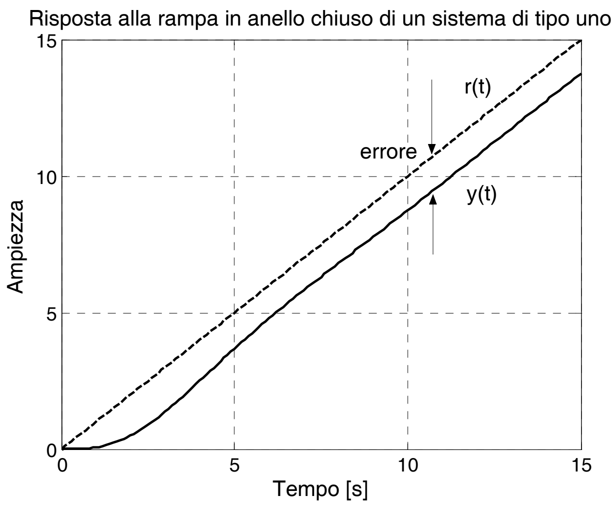
$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot G(s)\right)$$

che è evidentemente finita. Ne consegue che l'errore di velocità è finito, essendo:

$$e_V = \frac{1}{K_V}.$$

In definitiva, il sistema risponde ad un ingresso a rampa lineare con un errore a regime che è finito. Quindi l'uscita del sistema è in grado di seguire l'ingresso parzialmente, con un errore che è tanto più piccolo quanto maggiore è il guadagno.

Un esempio è riportato nella figura successiva.



$$G(s) = \frac{4}{s(s^2+6s+5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{4}{s^3+6s^2+5s+4}$$

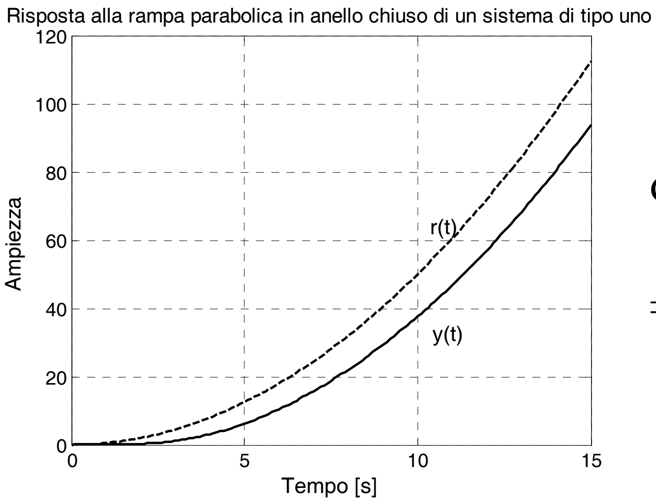
Infine valutiamo la costante di accelerazione del sistema:

$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G(s)\right)$$

che è nulla. Ne consegue che l'errore di accelerazione del sistema è infinito, essendo:

$$e_A = \frac{1}{K_A}.$$

In definitiva, il sistema risponde ad un ingresso a rampa parabolica con un errore a regime che è infinito. In tal caso, quindi, l'uscita del sistema non è in grado di seguire l'ingresso, infatti lo scostamento tra i due segnali diverge (si veda l'esempio in figura).



$$G(s) = \frac{4}{s(s^2 + 6s + 5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{4}{s^3 + 6s^2 + 5s + 4}$$

Consideriamo infine la situazione in cui il sistema sia invece di tipo due, ossia la sua funzione di trasferimento in anello aperto sia esprimibile come:

$$G(s) = k \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m}(s - z_j)}{s^2 \cdot \prod_{i=1}^{n-2}(s - p_i)}.$$

In tal caso le costanti di posizione e di velocità del sistema

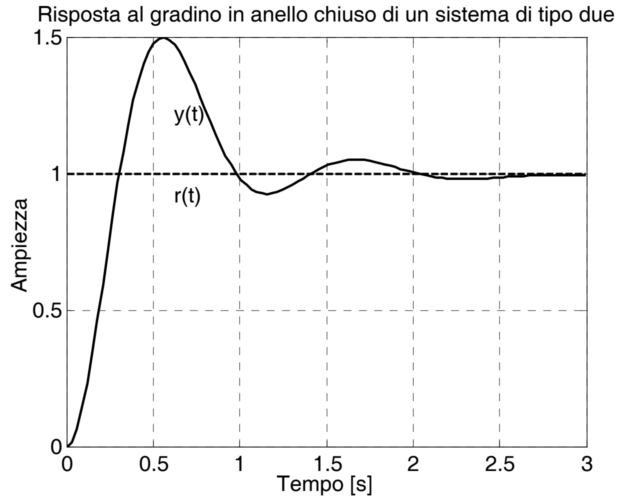
$$K_P = \lim_{s\to 0}\left(G(s)\right) \qquad K_V = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot G(s)\right)$$

sono entrambe infinite. Ne consegue che sia l'errore di posizione che quello di velocità sono nulli:

$$e_P = \frac{1}{1+K_P} \qquad e_V = \frac{1}{K_V}.$$

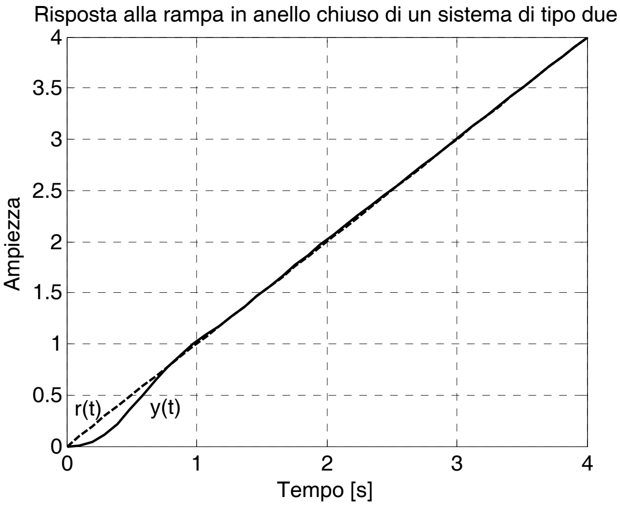
In definitiva, il sistema risponde sia ad un ingresso a gradino che a rampa lineare con un errore a regime nullo: l'inseguimento va perfettamente a buon fine, poiché il sistema si comporta a regime proprio come l'ingresso, producendo una uscita che a regime riproduce il riferimento.

Un esempio è riportato nelle due figure successive.



$$G(s) = \frac{40(s^2+2s+2)}{s^2(s^2+6s+5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{40(s^2+2s+2)}{s^4+6s^3+45s^2+80s+80}$$



$$G(s) = \frac{40(s^2+2s+2)}{s^2(s^2+6s+5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{40(s^2+2s+2)}{s^4+6s^3+45s^2+80s+80}$$

Infine valutiamo la costante di accelerazione del sistema:

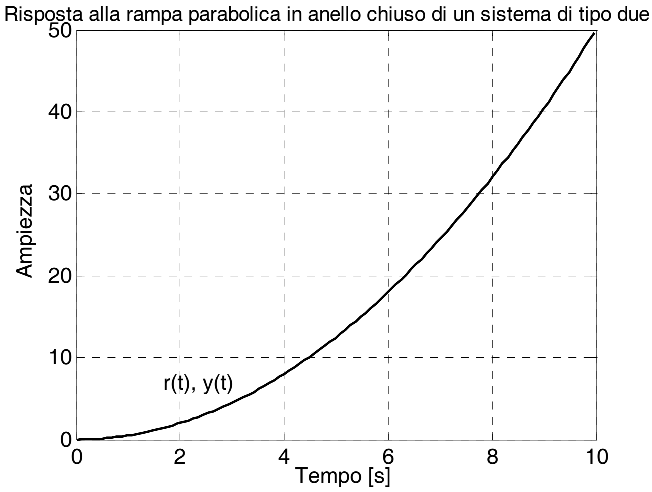
$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G(s)\right)$$

che è evidentemente finita. Ne consegue che l'errore di accelerazione del sistema è anch'esso finito, essendo:

$$e_A = \frac{1}{K_A}.$$

In definitiva, il sistema risponde ad un ingresso a rampa parabolica con un errore a regime finito, che è tanto minore quanto maggiore è il guadagno. Quindi l'inseguimento del riferimento va parzialmente a buon fine.

Un esempio è riportato nella figura successiva.



$$G(s) = \frac{40(s^2+2s+2)}{s^2(s^2+6s+5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_0(s) = \frac{40(s^2+2s+2)}{s^4+6s^3+45s^2+80s+80}$$

Si ha

$$e_A = \frac{1}{K_A} = \frac{1}{16} \simeq 0.06$$

pertanto l'inseguimento della rampa parabolica è quasi perfetto: infatti l'errore di velocità, anche se non è nullo, è molto piccolo poiché la costante di accelerazione è elevata (infatti nella figura precedente non si distinguono quasi ingresso e uscita).

Possiamo riassumere quanto abbiamo visto nella seguente tabella.

TIPO	K_P	e_P	K_V	e_V	K_A	e_A
0	Finita	Finito	0	∞	0	∞
1	∞	0	Finita	Finito	0	∞
2	∞	0	∞	0	Finita	Finito

Possiamo inoltre affermare che la precisione aumenta all'aumentare del tipo del sistema e comunque all'aumentare del guadagno k. Per aumentare quest'ultimo è necessario agire sugli amplificatori inseriti nella catena di controllo a monte del sistema controllato. Per quanto riguarda il tipo, invece, per aumentarlo è necessario introdurre nel regolatore un numero opportuno di poli nell'origine.

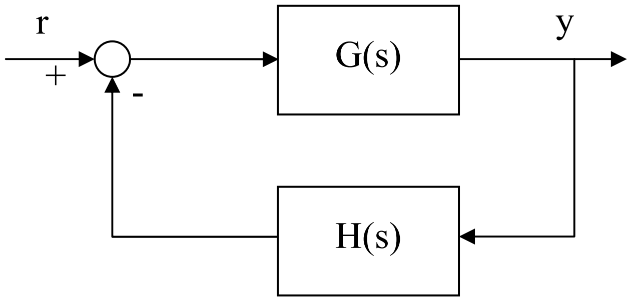
D'altra parte, è noto che un sistema di tipo elevato presenta notevoli difficoltà realizzative per ciò che riguarda la stabilità: in altre parole, la presenza di un elevato numero di poli nell'origine in anello aperto innesca fenomeni di instabilità (si pensi al luogo delle radici del sistema, che almeno per elevati valori del guadagno di anello presenta alcuni rami in parte disposti nel semipiano destro).

Per questo motivo già i sistemi di tipo due sono rari, essendone giustificato l'impiego solo in sistemi di posizionamento e inseguimento ad altissima precisione.

Questi risultati corrispondono al cosiddetto *Principio del modello interno*: affinché sia neutralizzato (con errore nullo a regime) un modo nell'ingresso corrispondente ad un polo nell'origine di ordine μ, occorre generare lo stesso modo nel regolatore, che quindi deve avere un polo nell'origine di ordine almeno μ (se il plant è di tipo zero).

PRECISIONE DEI SISTEMI DI CONTROLLO IN RETROAZIONE NON UNITARIA

Consideriamo ora un generico sistema in retroazione non unitaria, con funzione di trasferimento del ramo diretto (che congloba il regolatore e il plant) G(s) e funzione di trasferimento del ramo di retroazione (ossia del trasduttore) H(s).



In questo caso non è possibile definire ancora l'errore come e(t)=r(t)-y(t), poiché la presenza del trasduttore indica che l'ingresso e l'uscita sono variabili non omogenee.

Ugualmente non ha senso definire l'errore come la variabile ottenuta a valle della giunzione sommante, poiché in tal caso otterremmo:

$$E(s)=R(s)-H(s)Y(s)$$

Ossia, antitrasformando:

$$e(t)=r(t)-h(t)*y(t)$$

che è un segnale che non fornisce indicazioni rilevanti sulla fedeltà dell'inseguimento.

Poiché è appunto l'inseguimento dell'ingresso che ci interessa, ossia l'obiettivo del problema di precisione è che l'uscita segua fedelmente l'*andamento* dell'ingresso, definiamo la variabile errore come:

$$e(t)=r(t)-\gamma\cdot y(t)$$

essendo γ una costante dimensionale fissata dal progettista che permette di comparare le grandezze eterogenee r(t) e y(t). Spesso si pone tale costante pari al guadagno statico del trasduttore:

$$\gamma = H(s=0).$$

Si può anche porre $\gamma=1$, ricordando però in tal caso che tale costante non è adimensionale.

Nel dominio della frequenza complessa s si ha:

$$E(s) = R(s) - \gamma Y(s) = R(s) - \gamma \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) = \left(1 - \gamma \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \right) R(s)$$

da cui

$$E(s) = \left(\frac{1+H(s)G(s)-\gamma G(s)}{1+G(s)H(s)} \right) R(s) = \left(\frac{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)}{1+G(s)H(s)} \right) R(s)$$

o anche

$$E(s) = \left(\frac{1}{\dfrac{1+G(s)H(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)}} \right) R(s) = \left(\frac{1}{\dfrac{1+G(s)H(s)-\gamma G(s)+\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)}} \right) R(s)$$

da cui

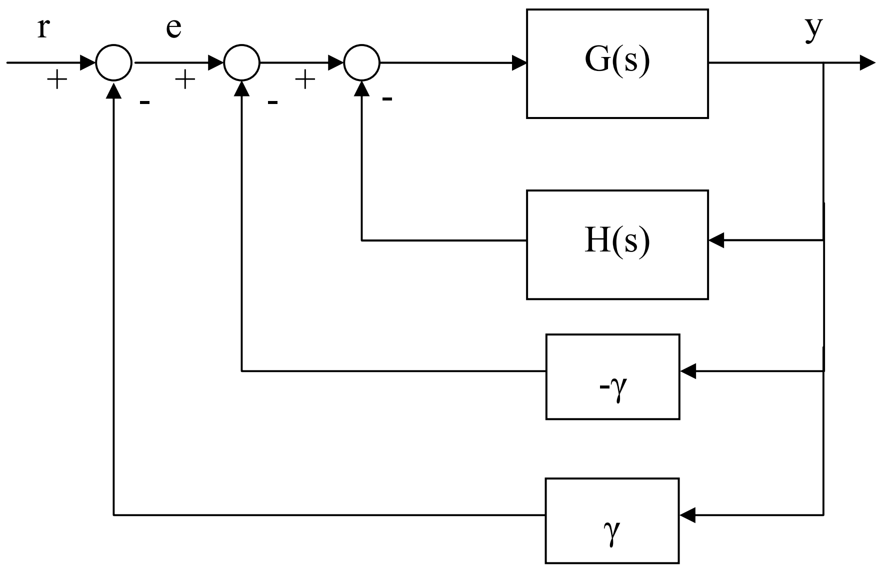
$$E(s) = \left(\frac{1}{1+\dfrac{\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)}} \right) R(s) = \left(\frac{1}{1+G_{EQ}(s)} \right) R(s) = G_E(s) R(s)$$

e quindi la funzione di trasferimento dell'errore vale

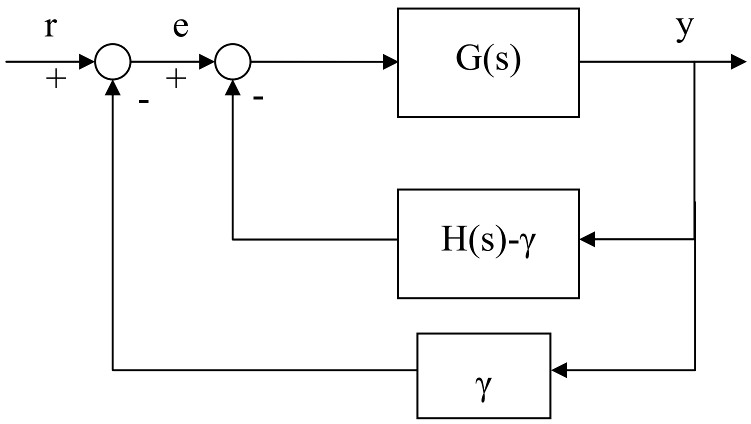
$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_{EQ}(s)}.$$

Vediamo un metodo grafico alternativo a quello analitico per la determinazione della funzione di trasferimento dell'errore in sistemi in retroazione non unitaria.

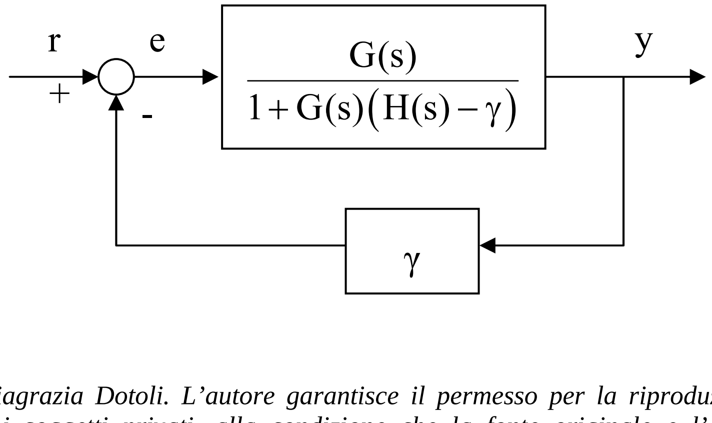
Uno schema a blocchi equivalente a quello del sistema dato può essere ottenuto aggiungendo due rami di retroazione uguali ed opposti.



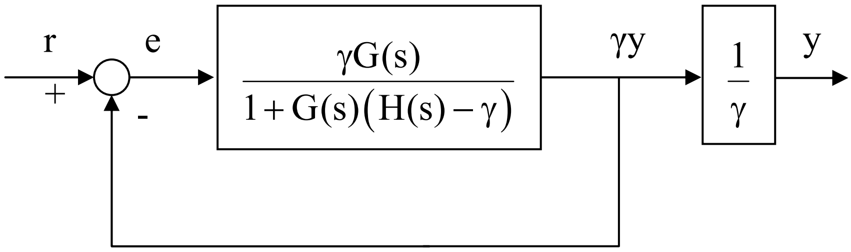
In questo modo a valle del primo sommatore si ottiene il segnale errore. Risolvendo il parallelo più interno si ha quindi il diagramma a blocchi equivalente rappresentato di seguito.



Risolviamo ora l'anello più interno.



Questo schema equivale al seguente, che ha retroazione unitaria con uscita γy ai fini dell'errore.



Perciò la funzione di trasferimento dell'errore tra r(t) e γy(t) vale:

$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_{EQ}(s)}$$

con

$$G_{EQ}(s) = \frac{\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)}.$$

In definitiva la funzione di trasferimento $G_{EQ}(s)$ fa le veci della funzione di trasferimento del ramo diretto G(s) (che si otteneva nella formula per il sistema con retroazione unitaria) nella funzione di trasferimento dell'errore quando si ha un sistema con retroazione non unitaria.

Evidentemente, si ha

$$G_{EQ}(s)=G(s)$$

quando la retroazione è unitaria e si sceglie γ=1 nella definizione della funzione errore.

Riassumendo, i risultati trovati per la funzione di trasferimento dell'errore nel caso di retroazione unitaria valgono anche per sistemi in retroazione non unitaria, con l'accortezza di sostituire alla funzione di trasferimento G(s) la funzione di trasferimento $G_{EQ}(s)$, che evidentemente dipende dal ramo diretto ma anche dal trasduttore, nonché da come è definito l'errore (ossia dalla scelta della costante γ).

Anche nel caso di retroazione non unitaria, per mezzo della funzione di trasferimento dell'errore è dunque possibile calcolare l'andamento dell'errore e(t). È sufficiente antitrasformare il prodotto

$$E(s) = G_E(s)R(s).$$

Ancora una volta dell'andamento di e(t) ci interessa principalmente il valore a regime o asintotico, che si può agevolmente calcolare con il teorema del valore finale. Si individuano così l'errore di posizione, velocità e accelerazione del sistema in anello chiuso in retroazione non unitaria.

Applicando tale teorema si ottengono gli stessi risultati visti per il sistema con retroazione unitaria, con la differenza che in questo caso il tipo del sistema non è definito sulla funzione di trasferimento G(s) del ramo diretto ma è il tipo della funzione di trasferimento equivalente $G_{EQ}(s)$, che congloba le informazioni su tutto il sistema e su come è definito lo stesso segnale errore:

$$G_{EQ}(s) = \frac{\gamma G(s)}{1 + G(s)\left(H(s) - \gamma\right)}.$$

Ne consegue dunque che l'errore di posizione vale:

$$e_P = \frac{1}{1 + K_P}$$

essendo K_P la costante di posizione del sistema, definita come segue:

$$K_P = \lim_{s \to 0}\left(G_{EQ}(s)\right).$$

Analogamente l'errore di velocità del sistema vale:

$$e_V = \frac{1}{K_V}$$

essendo K_V la costante di velocità del sistema, definita come segue:

$$K_V = \lim_{s \to 0}\left(s \cdot G_{EQ}(s)\right).$$

Inoltre l'errore di accelerazione vale:

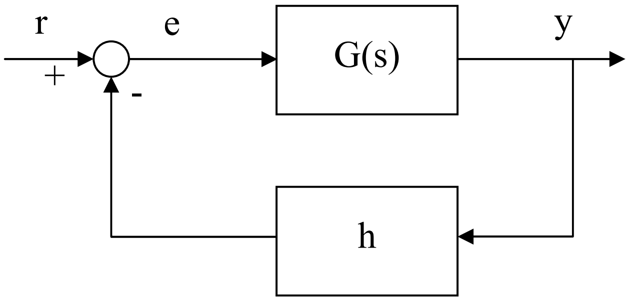
$$e_A = \frac{1}{K_A}$$

essendo K_A la costante di accelerazione del sistema, definita come segue:

$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G_{EQ}(s)\right).$$

Un caso particolare è quello in cui il trasduttore abbia funzione di trasferimento puramente algebrica:

$$H(s)=h.$$



In tal caso conviene definire l'errore scegliendo γ=h:

$$e(t)=r(t)-hy(t)$$

ossia come il segnale a valle del sommatore, per cui si ha una funzione di trasferimento equivalente:

$$G_{EQ}(s) = \frac{\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)} = \frac{hG(s)}{1+G(s)\left(h-h\right)} = hG(s)$$

che ha evidentemente lo stesso tipo, ossia lo stesso numero di poli nell'origine, della funzione di trasferimento G(s).

Il sistema si comporta dunque in termini di precisione come un sistema avente retroazione unitaria (e tutte le deduzioni viste sugli errori a regime sono valide), ma in questo caso la funzione di trasferimento dell'errore è leggermente variata, essendo:

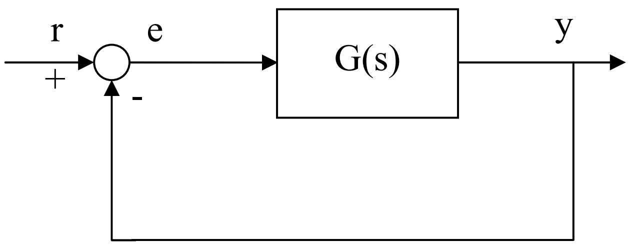
$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + hG(s)}.$$

In definitiva, la precisione di un sistema in retroazione qualsiasi migliora aumentando il guadagno e il tipo del sistema. Tali parametri vengono in generale definiti con riferimento alla funzione di trasferimento di anello equivalente $G_{EQ}(s)$, che per retroazione unitaria o statica coincide o ha caratteristiche analoghe a quelle della funzione di trasferimento del ramo diretto G(s).

ESEMPIO

Dopo aver definito la variabile errore, si determinino il tipo, la costante di posizione, velocità e accelerazione nonché l'errore di posizione, velocità e accelerazione del sistema in figura, essendo

$$G(s)=\frac{s+1}{s^3+2s^2}.$$



Omettiamo la verifica della stabilità asintotica del sistema in anello chiuso, che è facilmente effettuabile con il criterio di Routh.

Il sistema è in retroazione unitaria, pertanto l'errore vale e(t)=r(t)-y(t) e il tipo del sistema è il numero di poli nell'origine della funzione di trasferimento del ramo diretto, in questo caso pari a due.

Si ha inoltre

$$e_P=\frac{1}{1+K_P}$$

essendo Kp la costante di posizione del sistema, definita come segue:

$$K_P=\lim_{s\to 0}\left(G(s)\right)=\lim_{s\to 0}\frac{s+1}{s^3+2s^2}=+\infty.$$

Pertanto $e_P=1/K_P=0$, come prevedibile avendo il sistema tipo due.

Si ha poi

$$e_V=\frac{1}{K_V}$$

essendo K_V la costante di velocità del sistema, definita come segue:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot G(s)\right) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1)}{s^3 + 2s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{s^2 + 2s} = +\infty .$$

Pertanto $e_V=1/K_V=0$, come prevedibile avendo il sistema tipo due.

Inoltre l'errore di accelerazione vale:

$$e_A = \frac{1}{K_A}$$

essendo K_A la costante di accelerazione del sistema, definita come segue:

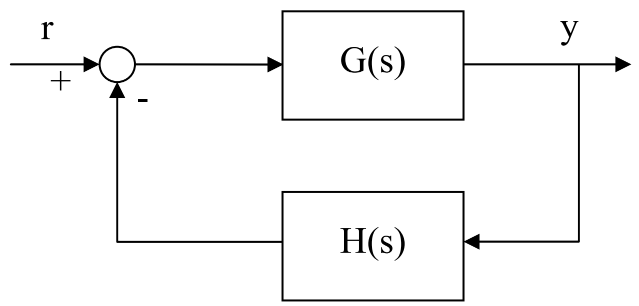
$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G(s)\right) = \lim_{s\to 0} \frac{s^2(s+1)}{s^3 + 2s^2} = \lim_{s\to 0} \frac{s+1}{s+2} = \frac{1}{2} .$$

Pertanto $e_A=1/K_A=2$, che è un valore finito, come prevedibile avendo il sistema tipo due.

ESEMPIO

Dopo aver definito la variabile errore, si determinino il tipo, la costante di posizione, velocità e accelerazione nonché l'errore di posizione, velocità e accelerazione del sistema in figura, essendo

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2\left(s+\frac{5}{3}\right)},\ H(s)=s+2.$$



Omettiamo la verifica della stabilità asintotica del sistema in anello chiuso, che è facilmente effettuabile con il criterio di Routh.

In questo caso il sistema è in retroazione non unitaria, pertanto l'errore vale e(t)=r(t)-γy(t). Si sceglie γ=H(0)=2, quindi e(t)=r(t)-2y(t).

Poiché il sistema è in retroazione non unitaria, il tipo del sistema è il numero di poli nell'origine della funzione di trasferimento equivalente:

$$G_{EQ}(s)=\frac{\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)}=\frac{2\frac{s+1}{s^2\left(s+\frac{5}{3}\right)}}{1+\frac{s+1}{s^2\left(s+\frac{5}{3}\right)}\left(s+2-2\right)}=\frac{2\frac{s+1}{s^2\left(s+\frac{5}{3}\right)}}{1+\frac{s+1}{s\left(s+\frac{5}{3}\right)}}=$$

$$=\frac{2(s+1)}{s^2\left(s+\frac{5}{3}\right)+s(s+1)}=\frac{2(s+1)}{s\left(s^2+\frac{8}{3}s+1\right)}$$

pertanto il tipo del sistema è uno.

Si ha inoltre

$$e_P=\frac{1}{1+K_P}$$

essendo Kp la costante di posizione del sistema, definita come segue:

$$K_P = \lim_{s\to 0}\left(G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{2(s+1)}{s\left(s^2+\frac{8}{3}s+1\right)} = +\infty\,.$$

Pertanto $e_P=1/K_P=0$, come prevedibile avendo il sistema tipo uno.

Si ha poi

$$e_V = \frac{1}{K_V}$$

essendo K_V la costante di velocità del sistema, definita come segue:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(sG_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{2(s+1)}{\left(s^2+\frac{8}{3}s+1\right)} = 2\,.$$

Pertanto $e_V=1/K_V=1/2$, che è un valore finito, come prevedibile avendo il sistema tipo uno.

Inoltre l'errore di accelerazione vale:

$$e_A = \frac{1}{K_A}$$

essendo K_A la costante di accelerazione del sistema, definita come segue:

$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2\cdot G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{2s(s+1)}{\left(s^2+\frac{8}{3}s+1\right)} = 0\,.$$

Pertanto $e_A=1/K_A=+\infty$, come prevedibile avendo il sistema tipo uno.

ESEMPIO

Un sistema retroazionato presenta il legame ingresso-uscita, calcolato dopo la riduzione dello schema a blocchi, riportato in figura.

$$r \longrightarrow \boxed{\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2+20s+20}} \longrightarrow y$$

Omettiamo la verifica della stabilità asintotica del sistema, che è facilmente effettuabile estraendo le radici del denominatore della funzione di trasferimento.

Definendo l'errore di precisione come segue:

$$e(t)=r(t)-2y(t)$$

si determinino l'errore di posizione, velocità e accelerazione, nonché il tipo del sistema.

Da come è definito l'errore del sistema si deduce che il sistema non è in retroazione unitaria. Si ha:

$$E(s) = G_E(s)R(s)$$

con

$$G_E(s) = \frac{1}{1+G_{EQ}(s)}.$$

Vediamo tre possibili metodi di risoluzione del problema.

Trasformando l'espressione dell'errore secondo Laplace si ha:

$$E(s)=R(s)-2Y(s)=R(s)-2G_0(s)R(s)$$

ossia

$$E(s) = R(s) - 2\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2+20s+20}R(s) = \frac{s^3+2s^2}{s^3+2s^2+20s+20}R(s).$$

Pertanto

$$\frac{1}{1+G_{EQ}(s)} = \frac{s^3+2s^2}{s^3+2s^2+20s+20} \Rightarrow 1+G_{EQ}(s) = \frac{s^3+2s^2+20s+20}{s^3+2s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_{EQ}(s) = \frac{s^3+2s^2+20s+20}{s^3+2s^2} - 1 = \frac{s^3+2s^2+20s+20-s^3-2s^2}{s^2(s+2)} = \frac{20(s+1)}{s^2(s+2)}$$

Poiché il sistema è in retroazione non unitaria, il tipo del sistema è il numero di poli nell'origine della funzione di trasferimento equivalente, pertanto il tipo del sistema è due.

Si ha inoltre

$$e_P = \frac{1}{1+K_P}$$

essendo K_P la costante di posizione del sistema, definita come segue:

$$K_P = \lim_{s\to 0}\left(G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{20(s+1)}{s^2(s+2)} = +\infty\ .$$

Pertanto $e_P=1/K_P=0$, come prevedibile avendo il sistema tipo due.

Si ha poi

$$e_V = \frac{1}{K_V}$$

essendo K_V la costante di velocità del sistema, definita come segue:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(sG_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{20(s+1)}{s(s+2)} = +\infty\,.$$

Pertanto $e_V=1/K_V=0$, che è un valore finito, come prevedibile avendo il sistema tipo due.

Inoltre l'errore di accelerazione vale:

$$e_A = \frac{1}{K_A}$$

essendo K_A la costante di accelerazione del sistema, definita come segue:

$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\frac{20(s+1)}{(s+2)} = 10\,.$$

Pertanto e_A=1/K_A=0.1, che è un valore finito, come prevedibile avendo il sistema tipo due.

Un altro metodo di risoluzione del problema si basa sul teorema del valore finale. Si ha:

$$E(s) = \frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 20s + 20} R(s)\,.$$

Applicando il teorema del valore finale si ha quindi:

$$e_P = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s\frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 20s + 20}\frac{1}{s}\right) = 0$$

$$e_V = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s\frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 20s + 20}\frac{1}{s^2}\right) = 0$$

$$e_A = \lim_{s\to 0}\left(sE(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s\frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 20s + 20}\frac{1}{s^3}\right) =$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\frac{s+2}{s^3 + 2s^2 + 20s + 20}\right) = \frac{1}{10}$$

Inoltre si osserva che vale:

$$E(s) = \left(1 - 2G_0(s)\right)R(s) = \frac{1}{1 + G_{EQ}(s)}R(s) = \frac{s^3 + 2s^2}{s^3 + 2s^2 + 20s + 20}R(s)\,.$$

Si deduce quindi ancora:

$$G_{EQ}(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 20s + 20}{s^3 + 2s^2} - 1 = \frac{20s + 20}{s^3 + 2s^2} = \frac{20(s+1)}{s^2(s+2)}$$

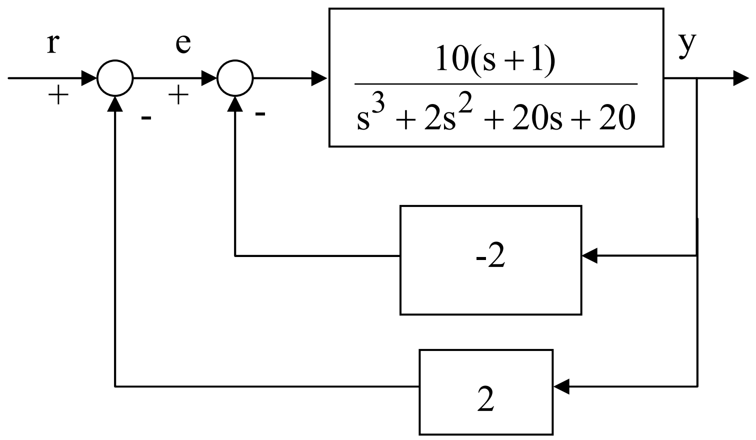
e il tipo del sistema è evidentemente 2, conclusione confermata dal fatto che sono nulli l'errore di posizione e velocità, mentre è finito quello di accelerazione.

Vediamo un ultimo metodo grafico alternativo per risolvere il problema.

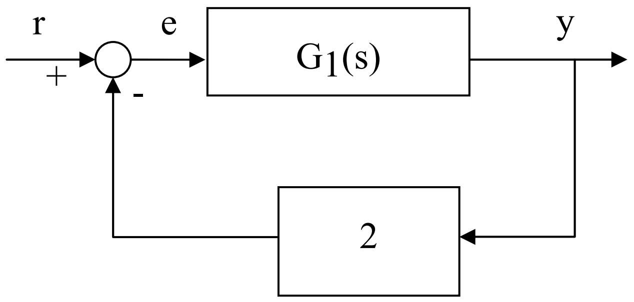
L'errore di precisione vale:

$$e(t)=r(t)-2y(t)$$

perciò introduciamo un ramo di retroazione in modo da ottenere la variabile errore a valle del sommatore.



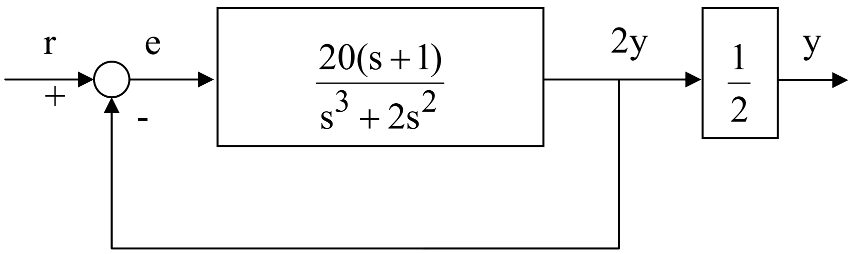
Risolvendo l'anello più interno si ha:



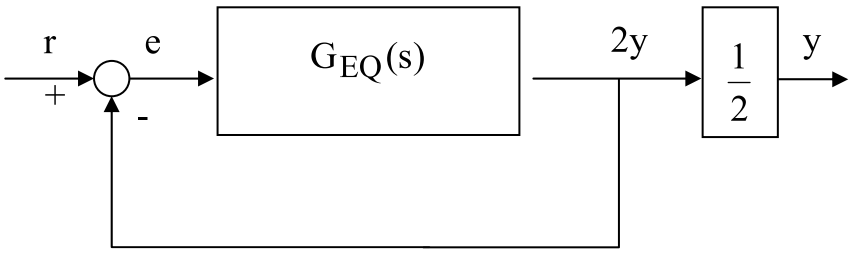
dove

$$G_1(s)=\frac{\dfrac{10(s+1)}{s^3+2s^2+20s+20}}{1+\dfrac{10(s+1)}{s^3+2s^2+20s+20}(-2)}=\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2+20s+20-20s-20}=\frac{10(s+1)}{s^3+2s^2}.$$

Questo schema equivale al seguente, che ha retroazione unitaria ed uscita 2y ai fini dell'errore.



ossia



Perciò la funzione di trasferimento dell'errore vale:

$$G_E(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+G_{EQ}(s)}$$

con

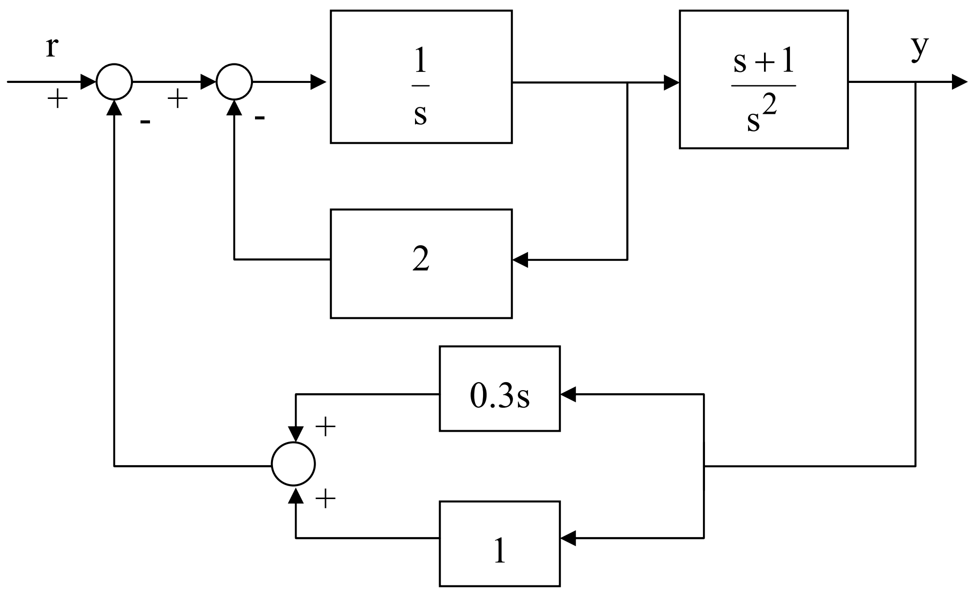
$$G_{EQ}(s)=\frac{20(s+1)}{s^3+2s^2}=2G_1(s).$$

Il sistema è dunque di tipo due, ed ha errore di posizione e velocità nullo. L'errore di accelerazione è invece finito, pari all'inverso della costante di accelerazione:

$$K_A = \lim_{s\to 0}\left(s^2 \cdot G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{20(s+1)}{(s+2)}\right) = 10\,, \quad e_A = \frac{1}{K_A} = \frac{1}{10}\,.$$

ESEMPIO

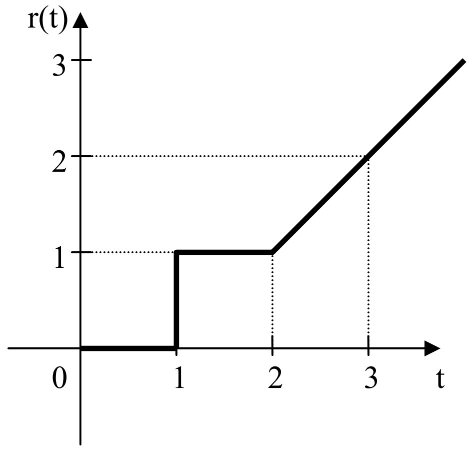
Si determini l'errore a regime del sistema in figura in risposta al segnale r(t) rappresentato di seguito.



Omettiamo la verifica della stabilità asintotica del sistema in anello chiuso, che è facilmente effettuabile con il criterio di Routh.

Si chiede di calcolare l'errore a regime ottenuto in corrispondenza dell'ingresso:

$$r(t)=1(t-1)+(t-2)\cdot 1(t-2).$$



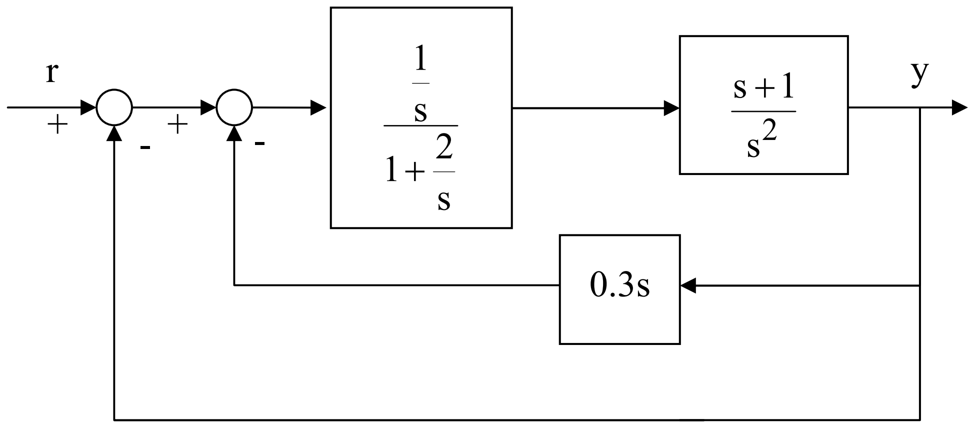
Pertanto, per il principio di sovrapposizione degli effetti (dovuto alla linearità del sistema) e per la tempoinvarianza del sistema si ha:

$$e_\infty = e_P + e_V = e_V$$

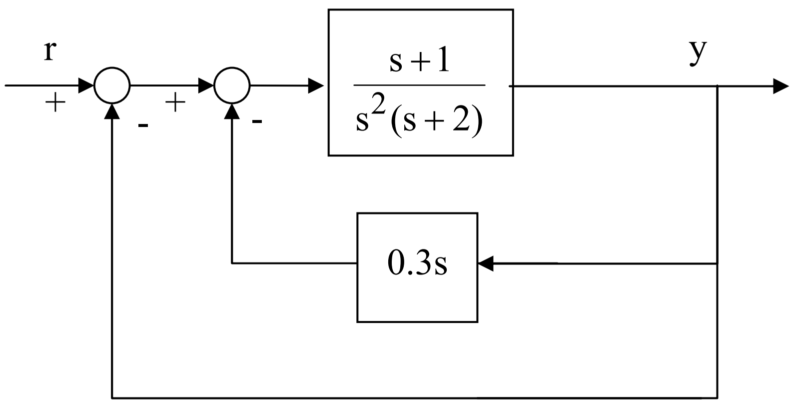
dove la seconda uguaglianza discende dal fatto che si hanno i seguenti casi possibili: o l'errore di posizione è finito e quello di velocità è infinito (sistema di tipo 0); o l'errore di posizione è nullo e quello di velocità è finito (sistema di tipo 1), oppure sia l'errore di posizione che quello di velocità sono nulli (sistema di tipo 2 o superiore).

Risolviamo il diagramma a blocchi riorganizzando il parallelo e risolvendo l'anello interno sul ramo diretto.

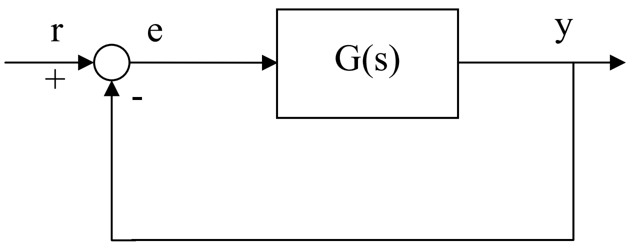
Si ha il seguente schema a blocchi equivalente.



ossia



Risolvendo l'anello più interno si ottiene dunque un sistema in retroazione unitaria.



In questo schema la variabile a valle della giunzione sommante è l'errore

$$e(t)=r(t)-y(t)$$

e la funzione di trasferimento del ramo diretto vale

$$G(s)=\frac{\dfrac{s+1}{s^2(s+2)}}{1+\dfrac{s+1}{s^2(s+2)}0.3s}=\frac{s+1}{s^2(s+2)+0.3s(s+1)}=\frac{s+1}{s^3+2.3s^2+0.3s}=\frac{s+1}{s(s^2+2.3s+0.3)}$$

Quindi il sistema è di tipo uno e si ha e_P=0. Inoltre l'errore di velocità vale

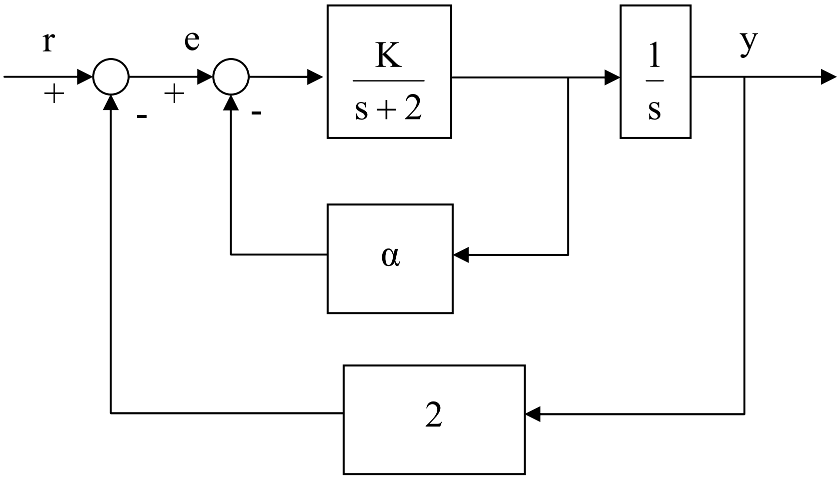
$$e_V=\frac{1}{K_V}\ \text{con}\ K_V=\lim_{s\to 0}\left(s\cdot G(s)\right)=\lim_{s\to 0}\left(\frac{s+1}{s^2+2.3s+0.3}\right)=\frac{1}{0.3}.$$

In definitiva l'errore a regime in risposta all'ingresso r(t) vale:

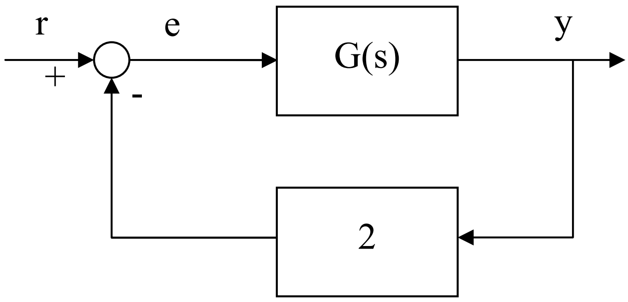
$$e_\infty=e_V=\frac{1}{K_V}=0.3.$$

ESEMPIO

Si determinino i parametri positivi K e α in modo che, per il sistema in figura, siano soddisfatte le seguenti specifiche: risposta al gradino oscillatoria con coefficiente di smorzamento δ≥0.5, errore di velocità $e_V \le 0.1$, essendo l'errore e(t) la variabile a valle del primo sommatore come in figura. Con i valori di K e α stabiliti si determini, infine, il tempo di assestamento al 2% del sistema.



Evidentemente il sistema equivale a un sistema con retroazione non unitaria statica:



con

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s+2}}{1+\frac{K}{s+2}\alpha} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K}{s\left(s+(K\alpha+2)\right)}.$$

Omettiamo la verifica della stabilità asintotica del sistema in anello chiuso, che è facilmente effettuabile con il criterio di Routh.

Si ha:

$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_{EQ}(s)}$$

con

$$G_{EQ}(s) = \frac{\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)} = \frac{2G(s)}{1+G(s)\left(2-2\right)} = 2G(s) = \frac{2K}{s\left(s+(K\alpha+2)\right)}.$$

Poiché $G_{EQ}(s)$ presenta un polo nell'origine, il sistema è di tipo uno con

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{2K}{(s+K\alpha+2)}\right) = \frac{2K}{K\alpha+2}$$

da cui si ottiene la condizione

$$e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{K\alpha+2}{2K} \leq 0.1.$$

La funzione di trasferimento in anello chiuso vale

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+2G(s)} = \frac{K}{s^2 + (2+K\alpha)s + 2K} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega_n{}^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

dove

$$\begin{cases} \delta\omega_n = \dfrac{2+K\alpha}{2} \\ \omega_n{}^2 = 2K \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\delta = \frac{2+K\alpha}{2\omega_n} = \frac{2+K\alpha}{2\sqrt{2K}}$$

e quindi le condizioni sul coefficiente di smorzamento diventano:

$$0.5 \le \delta < 1 \Leftrightarrow 0.5 \le \frac{2+K\alpha}{2\sqrt{2K}} < 1$$

dove la seconda disuguaglianza deriva dal fatto che si richiede una risposta indiciale oscillatoria, ovvero dei poli in anello chiuso complessi e coniugati (sistema sottosmorzato).

Si ha quindi il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{2+K\alpha}{2K} \le \dfrac{1}{10} \\ \dfrac{2+K\alpha}{2\sqrt{2K}} \ge \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2+K\alpha}{2\sqrt{2K}} < 1 \end{cases} .$$

o anche, poiché K>0 per ipotesi:

$$\begin{cases} 2 + K\alpha \leq 0.2K \\ 2 + K\alpha \geq \sqrt{2K} \\ 2 + K\alpha < 2\sqrt{2K} \end{cases}.$$

Consideriamo la prima e l'ultima disequazione. Evidentemente l'ultima disequazione è superflua se risulta:

$$0.2K < 2\sqrt{2K}$$

che è verificata se vale

$$\sqrt{K} < 10\sqrt{2}$$

ossia per

$$K < 200.$$

In tal caso, perché il sistema abbia soluzioni deve risultare:

$$\begin{cases} 0.2K \geq \sqrt{2K} \\ K < 200 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 0.2\sqrt{K} \geq \sqrt{2} \\ K < 200 \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} \sqrt{K} \geq 5\sqrt{2} \\ K < 200 \end{cases}$$

che equivale a

$$50 \leq K < 200.$$

Viceversa, se K≥200, è la prima disequazione ad essere superflua e il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2+K\alpha \geq \sqrt{2K} \\ 2+K\alpha < 2\sqrt{2}K \\ K \geq 200 \end{cases}.$$

Perché il sistema abbia soluzioni deve ora risultare:

$$\begin{cases} \sqrt{2K} < 2\sqrt{2}K \\ K \geq 200 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 1 < 2\sqrt{K} \\ K \geq 200 \end{cases}$$

o anche

$$\begin{cases} K > 0.25 \\ K \geq 200 \end{cases}$$

che equivale a

$$K \geq 200.$$

In definitiva le soluzioni del sistema sono le seguenti:

$$\begin{cases} \sqrt{2K} \leq 2+K\alpha \leq 0.2K \\ 50 \leq K < 200 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \sqrt{2K} \leq 2+K\alpha < 2\sqrt{2}K \\ K \geq 200 \end{cases}$$

o, in altri termini

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2K}-2}{K} \leq \alpha \leq \dfrac{0.2K-2}{K} \\ 50 \leq K < 200 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2K}-2}{K} \leq \alpha < \dfrac{2\sqrt{2}K-2}{K} \\ K \geq 200 \end{cases}.$$

Supponiamo ad esempio di scegliere K=50. Il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2+50\alpha \le 10 \\ 2+50\alpha \ge 10 \\ 2+50\alpha < 20 \end{cases},$$

ossia

$$2+50\alpha = 10$$

che ha la sola soluzione $\alpha = 0.16$.

In tal caso la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa

$$G_0(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{s^2 + 10s + 100}$$

e si ha:

$$\omega_n = 10,\ \delta = 0.5$$

con i poli del sistema posti in

$$p_{1/2} = -5 \pm j5\sqrt{3}$$

e un errore di velocità limite:

$$e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{K\alpha + 2}{2K} = 0.1.$$

Il sistema presenta inoltre un tempo di assestamento al 2%:

$$t_s = \frac{4}{\delta\omega_n} = 0.80$$

un tempo di picco e di salita rispettivamente pari a

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{5\sqrt{3}} \simeq 0.36, \quad t_R = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos\frac{1}{2}}{5\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{15\sqrt{3}} \simeq 0.24$$

e una massima sovraelongazione percentuale

$$M_P = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100 e^{-\frac{\pi}{\sqrt{3}}} \simeq 16.3\%.$$

Se invece si sceglie K=100, il sistema diventa:

$$\begin{cases} 2 + 100\alpha \leq 20 \\ 2 + 100\alpha \geq \sqrt{200} \end{cases}$$

da cui

$$0.12 \simeq \frac{\sqrt{200} - 2}{100} \leq \alpha \leq \frac{18}{100} = 0.18.$$

Scegliendo ancora $\alpha = 0.16$, la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa

$$G_0(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{200}{s^2 + 18s + 200}$$

e si ha:

$$\omega_n = \sqrt{200} \simeq 14.14, \ \delta = \frac{18}{2\omega_n} \simeq 0.63,$$

con i poli del sistema posti in

$$p_{1/2} = -9 \pm j\sqrt{119}$$

e un errore di velocità leggermente migliore rispetto al caso precedente:

$$e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{K\alpha + 2}{2K} = \frac{18}{200} \simeq 0.09.$$

Il sistema è più rapido a raggiungere il regime, infatti presenta un tempo di assestamento al 2%:

$$t_S = \frac{4}{\delta\omega_n} = 0.44\,.$$

Anche il transitorio è più rapido, presentando un tempo di picco e di salita rispettivamente pari a

$$t_P = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\sqrt{119}} \simeq 0.29\,,\;\; t_R = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos 0.63}{\sqrt{119}} \simeq 0.21$$

e una massima sovraelongazione percentuale inferiore

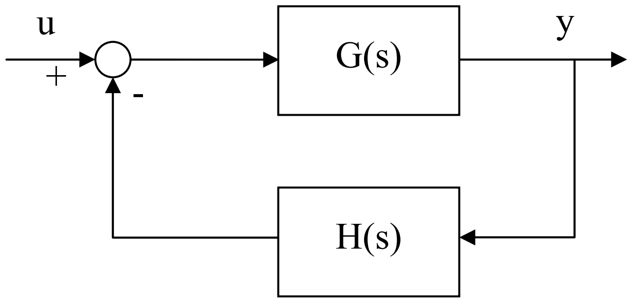
$$M_P = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \simeq 7.8\%\,.$$

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G(s) = \frac{k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)},\ H(s) = s+2,\ k>0,\ p>0.$$

Dopo aver calcolato la funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema in anello chiuso, se ne verifichi la stabilità asintotica nelle ipotesi k>0 e p>0.
Definito l'errore di precisione come e(t)=u(t)-3y(t), si determini la relazione che deve intercorrere tra i parametri p e k affinché si abbia un errore di posizione $e_P=0.1$.
Si determini la relazione che deve intercorrere tra i parametri p e k perché si abbia un errore di velocità finito e si calcoli quest'ultimo in tale caso. Infine si dica se è possibile ottenere un errore di accelerazione finito per tale sistema.



La funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\dfrac{k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)}}{1+\dfrac{k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)}(s+2)} = \frac{k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)+k(s+3)(s+2)}$$

quindi l'equazione caratteristica del sistema è

$$(s+1)^2(s+p)+k(s+3)(s+2) = 0$$

o anche

$$s^3+(p+k+2)s^2+(2p+5k+1)s+(p+6k) = 0.$$

Il lemma di Routh è verificato, quindi il sistema può essere asintoticamente stabile.

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & 1 & 2p+5k+1 \\
s^2 & p+k+2 & p+6k \\
s^1 & \dfrac{2p^2+5k^2+7kp+4p+5k+2}{p+k+2} & \\
s^0 & p+6k &
\end{array}
$$

Evidentemente nella prima colonna vi sono tre permanenze (essendo per ipotesi k>0 e p>0), dunque il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per qualsiasi valore dei parametri p e k positivi.

La funzione di trasferimento dell'errore vale inoltre

$$G_E(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G_{EQ}(s)}$$

dove

$$G_{EQ}(s)=\frac{\gamma G(s)}{1+G(s)\left(H(s)-\gamma\right)} = \frac{3\dfrac{k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)}}{1+\dfrac{k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)}\left(s+2-3\right)} =$$

$$= \frac{3k(s+3)}{(s+1)^2(s+p)+k(s+3)(s-1)} = \frac{3ks+9k}{s^3+(p+k+2)s^2+(2p+2k+1)s+(p-3k)}.$$

Quindi la costante di posizione vale

$$K_P = \lim_{s\to 0}\left(G_{EQ}(s)\right) = \frac{9k}{p-3k}.$$

Ne consegue che

$$e_P = \frac{1}{1+K_P} = \frac{1}{10}$$

se

$$K_P = \frac{9k}{p-3k} = 9$$

che ha soluzione per

p=4k.

Se invece si richiede un errore di velocità finito, allora l'errore di posizione deve essere nullo, dovendo essere la $G_{EQ}(s)$ di tipo 1, quindi deve essere

$$K_P = \frac{9k}{p-3k} \to \infty$$

ossia

p=3k

che indica proprio l'annullarsi del termine noto del denominatore della $G_{EQ}(s)$ e quindi un tipo pari a 1. In tal caso si ha una costante di velocità finita:

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot G_{EQ}(s)\right) = \frac{9k}{2p+2k+1} = \frac{9k}{2\cdot 3k+2k+1} = \frac{9k}{8k+1}$$

e quindi l'errore di velocità vale

$$e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{8k+1}{9k}.$$

Osserviamo infine che non è possibile avere un errore di accelerazione finito, poiché in tal caso il tipo della $G_{EQ}(s)$ dovrebbe essere pari a due. Ciò accade solo se il termine noto e il coefficiente del termine di grado uno nel denominatore di tale funzione di trasferimento si annullano contemporaneamente, ossia per:

$$\begin{cases} p - 3k = 0 \\ 2p + 2k + 1 = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} p = 3k \\ 8k + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha soluzione unicamente per

$$\begin{cases} k = -\dfrac{1}{8} \\ p = -\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

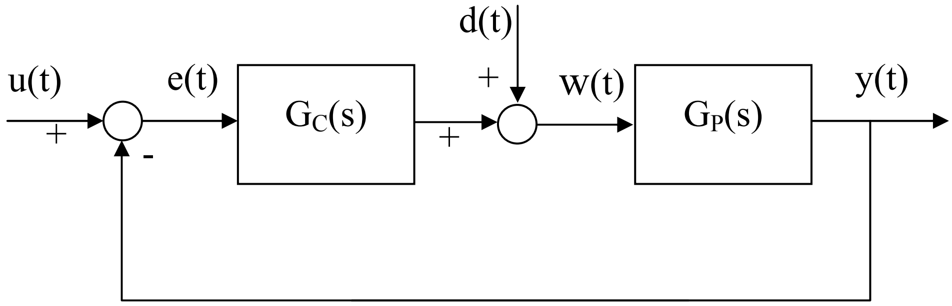
che non sono valori consentiti per i parametri del sistema.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_P(s) = \frac{10}{s^2 + s + 20} \qquad \text{e} \qquad G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}\text{, con } K_P, K_I > 0.$$

Si determinino le condizioni che le costanti K_P e K_I devono soddisfare affinché il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile.
Detta e(t) la variabile errore a valle del sommatore, sia $e(t)=e_u(t)+e_d(t)$, dove $e_u(t)$ ed $e_d(t)$ sono le componenti dell'errore dovute rispettivamente al solo ingresso ed al solo disturbo. Si calcoli il valore asintotico di e(t) quando u(t) e d(t) sono dei segnali a rampa lineare unitaria.



La funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)} = \frac{\dfrac{10(K_P s + K_I)}{s(s^2+s+20)}}{1+\dfrac{10(K_P s + K_I)}{s(s^2+s+20)}} = \frac{10K_P s + 10K_I}{s^3+s^2+(20+10K_P)s+10K_I}$$

quindi l'equazione caratteristica del sistema è

$$s^3+s^2+(20+10K_P)s+10K_I = 0\,.$$

Il lemma di Routh è verificato, quindi il sistema può essere asintoticamente stabile.

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

s^3	1	$20+10K_P$
s^2	1	$10K_I$
s^1	$20+10K_P-10K_I$	
s^0	$10K_I$	

Perché nella prima colonna vi siano tre permanenze e il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile, si richiede dunque:

$$2+K_P-K_I>0$$

ossia

$$K_I<2+K_P.$$

Osserviamo ora che l'errore del sistema, che è in retroazione unitaria, è espresso come:

$$e(t)=u(t)-y(t)=u(t)-y_u(t)-y_d(t)$$

dove si è applicato il principio di sovrapposizione degli effetti. Si ha dunque:

$$e(t)=e_u(t)+e_d(t)$$

che esprime appunto il principio di sovrapposizione degli effetti, essendo

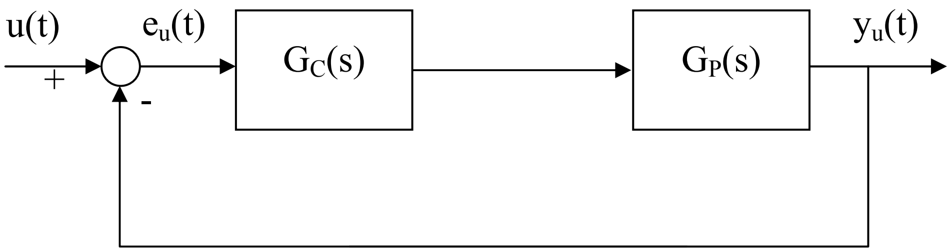
$$e_u(t)=u(t)-y_u(t)$$

la componente dell'errore dovuta al solo ingresso e

$$e_d(t)=0-y_d(t)=-y_d(t)$$

la componente dell'errore dovuta al solo disturbo.

Per calcolare la componente dell'errore dovuta al solo ingresso consideriamo il sistema privo di disturbo. Si ha evidentemente lo schema seguente:



Il sistema è in retroazione unitaria e quindi di tipo pari al tipo di

$$G_C(s)G_P(s)=\frac{10(K_P s+K_I)}{s(s^2+s+20)}$$

che è uno (è presente un polo nell'origine). Ne consegue che l'errore a regime è pari all'errore di velocità

$$e_u(\infty) = e_V = \frac{1}{K_V}$$

dove la costante di velocità vale

$$K_V = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot G_C(s)G_P(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{10(K_P s + K_I)}{s(s^2 + s + 20)}\right) = \frac{K_I}{2}$$

da cui si ottiene:

$$e_u(\infty) = e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{2}{K_I}.$$

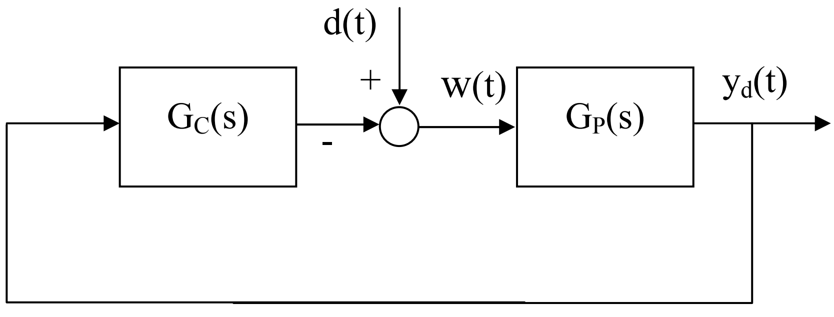
Alternativamente possiamo notare che la funzione di trasferimento dell'errore vale:

$$G_{E_u}(s) = \frac{E_u(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_C(s)G_P(s)} = \frac{s(s^2 + s + 20)}{s(s^2 + s + 20) + 10(K_P s + K_I)}$$

da cui si calcola facilmente la componente asintotica corrispondente, che fornisce nuovamente il risultato precedente

$$e_u(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot E_u(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{s(s^2 + s + 20)}{s(s^2 + s + 20) + 10(K_P s + K_I)} \cdot \frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{K_I}.$$

Calcoliamo ora la componente dell'errore dovuta al solo disturbo, ovvero non considerando l'ingresso. Si ha evidentemente lo schema che segue.



Si ha quindi

$$e(t) = -y_d(t)$$

da cui

$$E_d(s) = -Y_d(s) = -\frac{G_P(s)}{1+G_P(s)G_C(s)} D(s) = -\frac{10s}{s(s^2+s+20)+10(K_P s+K_I)} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Si calcola quindi facilmente la componente asintotica corrispondente

$$e_d(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot E_d(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(-s \cdot \frac{10s}{s(s^2+s+20)+10(K_P s+K_I)} \cdot \frac{1}{s^2}\right) = -\frac{1}{K_I}.$$

Si ha dunque un errore asintotico complessivo

$$e(\infty) = e_u(\infty) + e_d(\infty) = \frac{2}{K_I} - \frac{1}{K_I} = \frac{1}{K_I}$$

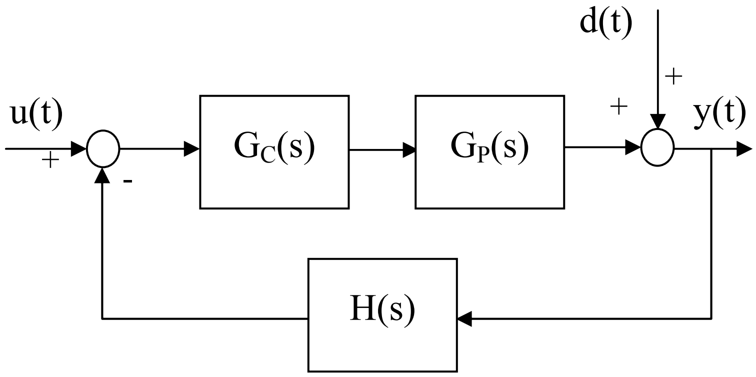
che quindi diminuisce all'aumentare della costante integrale del controllore PI.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_P(s) = \frac{1}{1+10s}, \; G_C(s) = K, \; H(s)=s+2 \text{ con } K>0.$$

Supposto che l'ingresso e il disturbo siano due gradini di ampiezza unitaria, si determini il valore di K per il quale l'uscita a regime $y_d(+\infty)$ prodotta dal disturbo d(t) è il 5% dell'uscita a regime $y_u(+\infty)$ dovuta all'ingresso u(t), ovvero risulta $y(+\infty)=y_u(+\infty)+y_d(+\infty)=1.05y_u(\infty)$.
Con il valore di K determinato, supposto ora l'ingresso U(s)=1/s e D(s)=0.1/s, si calcoli il valore finale raggiunto dall'errore $e(t)=r(t)-2y(t)=e_u(t)+e_d(t)$, dove $e_u(t)$ ed $e_d(t)$ sono le componenti dell'errore dovute rispettivamente al solo ingresso ed al solo disturbo.



La funzione di trasferimento del sistema in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1+G_C(s)G_P(s)} = \frac{\frac{K}{1+10s}}{1+\frac{K(s+2)}{1+10s}} = \frac{K}{(10+K)s+2K+1}$$

pertanto il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile per qualsiasi valore di K>0.

Applichiamo il principio di sovrapposizione degli effetti. Se l'ingresso è un gradino unitario il valore a regime dell'uscita dovuta al solo ingresso vale, per il teorema del valore finale:

$$y_u(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY_u(s) = \lim_{s\to 0} sG_0(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{K}{(10+K)s+2K+1} = \frac{K}{2K+1}.$$

Analogamente se il disturbo è un gradino unitario il valore a regime dell'uscita dovuta al solo disturbo vale, per il teorema del valore finale:

$$y_d(+\infty) = \lim_{s\to 0} sY_d(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G_C(s)G_P(s)H(s)}\frac{1}{s} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+\frac{K(s+2)}{1+10s}} = \lim_{s\to 0} \frac{1+10s}{(10+K)s+2K+1} = \frac{1}{2K+1}.$$

Pertanto imponiamo:

$$\frac{1}{2K+1} = 0.05\frac{K}{2K+1} \Rightarrow 1 = \frac{5}{100}K \Rightarrow K = 20.$$

Osserviamo ora che l'errore del sistema, che è in retroazione non unitaria, è espresso come:

$$e(t)=u(t)-\gamma y(t)=u(t)-2y(t)=u(t)-2y_u(t)-2y_d(t)$$

dove si è applicato il principio di sovrapposizione degli effetti. Si ha dunque:

$$e(t)=e_u(t)+e_d(t)$$

che esprime appunto il principio di sovrapposizione degli effetti, essendo

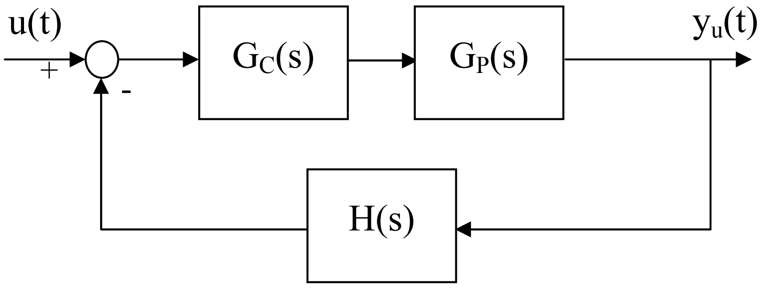
$$e_u(t)=u(t)-2y_u(t)$$

la componente dell'errore dovuta al solo ingresso e

$$e_d(t)=0-2y_d(t)=-2y_d(t)$$

la componente dell'errore dovuta al solo disturbo.

Per calcolare la componente dell'errore dovuta al solo ingresso consideriamo il sistema privo di disturbo. Si ha evidentemente lo schema seguente:



Il sistema è in retroazione non unitaria e quindi di tipo pari al tipo di

$$G_{EQ}(s) = \frac{2G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)(H(s) - 2)} = \frac{2\frac{K}{1+10s}}{1 + \frac{K}{1+10s}(s + 2 - 2)} = \frac{40}{30s + 1},$$

dove si è tenuto conto della scelta K=20, che è zero (non sono presenti poli nell'origine). Ne consegue che l'errore a regime è pari all'errore di posizione che è finito e si scrive

$$e_u(+\infty) = e_P = \frac{1}{1 + K_P}$$

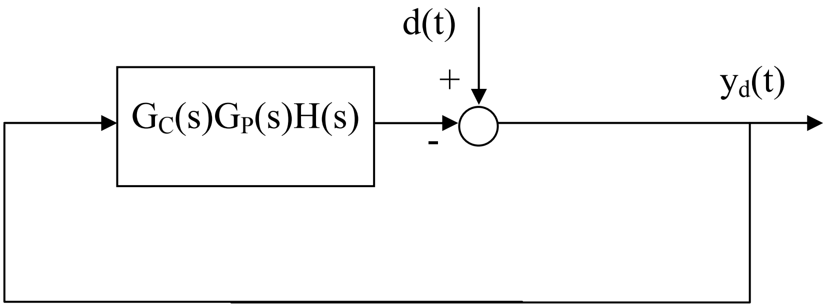
dove la costante di posizione vale

$$K_P = \lim_{s \to 0}\left(G_{EQ}(s)\right) = \lim_{s \to 0}\left(\frac{40}{30s + 1}\right) = 40$$

da cui si ottiene:

$$e_u(+\infty) = e_P = \frac{1}{1 + K_P} = \frac{1}{41} \simeq 0.0244\,.$$

Calcoliamo ora la componente dell'errore dovuta al solo disturbo, ovvero non considerando l'ingresso. Si ha evidentemente lo schema che segue.



Si ha quindi

$$e(t) = -2y_d(t)$$

da cui

$$E_d(s) = -2Y_d(s) = -\frac{2}{1+G_P(s)G_C(s)H(s)}D(s) =$$

$$= -\frac{2}{1+\dfrac{20(s+2)}{1+10s}} \cdot \frac{0.1}{s} = -\frac{-0.2(1+10s)}{s(30s+41)}$$

Si calcola quindi facilmente la componente asintotica corrispondente

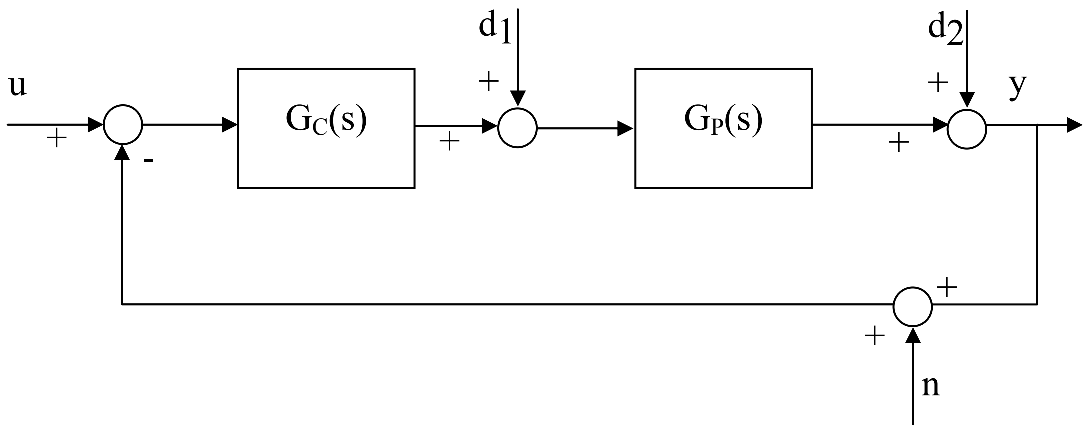
$$e_d(+\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot E_d(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s\frac{-0.2(1+10s)}{s(30s+41)}\right) = -\frac{0.2}{41} \simeq 0.0049 .$$

Si ha dunque un errore asintotico complessivo

$$e(+\infty) = e_u(+\infty) + e_d(+\infty) \simeq 0.0244 - 0.0049 = 0.0195 .$$

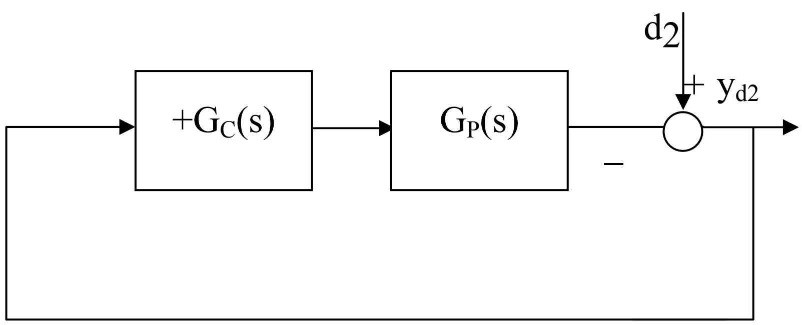
SENSIBILITÀ AI DISTURBI

Consideriamo il generico schema di controllo in catena chiusa, in cui sono presenti diversi disturbi. Questi vengono distinti in *disturbi di carico* o sull'uscita, posti in uscita al plant come $d_2(t)$, *disturbi sull'attuatore*, posti in uscita all'organo di controllo o attuatore come $d_1(t)$, e *rumore di misura*, posti sul ramo di retroazione e dovuti alla non idealità del trasduttore come $n(t)$. Per semplicità consideriamo un sistema in retroazione unitaria, ma i risultati seguenti sono validi anche per retroazione non unitaria.



Nel seguito mostriamo come i disturbi sul ramo diretto siano più facilmente reiettabili a regime permanente rispetto ai disturbi posti sul ramo di retroazione.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, consideriamo inizialmente la sola presenza del disturbo $d_2(t)$. Lo schema equivalente del sistema è il seguente.



Si osserva che la componente della risposta dovuta a questo disturbo vale:

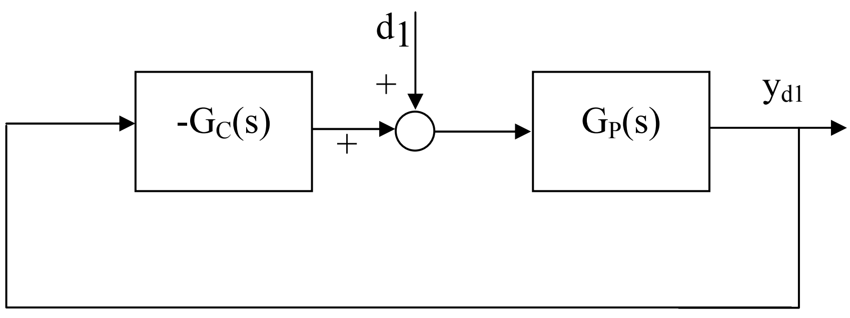
$$Y_{d_2}(s) = \frac{1}{1 + G_P(s)G_C(s)} D_2(s).$$

Si osserva che la funzione di trasferimento tra disturbo e uscita corrispondente è pari alla funzione di trasferimento dell'errore per il sistema in retroazione unitaria. Si ottengono quindi delle conclusioni analoghe a quelle viste per la precisione a regime con il principio del modello interno.

Ad esempio, supponiamo che il disturbo d_2 sia un segnale canonico del tipo gradino, rampa lineare ecc. Ne consegue che per reiettare completamente il disturbo in regime permanente (ossia per annullare la componente asintotica di y_{d2}) le funzioni di trasferimento che si trovano a monte di d_2 (ossia il plant e il regolatore) devono contenere complessivamente un numero di poli nell'origine almeno uguale al numero di modi introdotti da d_2 (ad esempio un polo in s=0 se il disturbo è un gradino, due poli nell'origine se d_2 è un segnale a rampa lineare unitaria e così via).

Se invece il numero di poli nell'origine delle funzioni di trasferimento che si trovano a monte di d_2 è inferiore di una unità al numero di modi introdotti da d_2, allora la componente asintotica di y_{d2} è finita ed è tanto minore quanto più grande è il guadagno della funzione di trasferimento (ad esempio un polo in s=0 se il disturbo è una rampa lineare unitaria, due poli nell'origine se d_2 è un segnale a rampa parabolica unitaria e così via).

Consideriamo ora il caso della sola presenza del disturbo $d_1(t)$. Lo schema equivalente del sistema è il seguente.



Si osserva che la risposta dovuta a questo disturbo vale:

$$Y_{d_1}(s) = \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_C(s)} D_1(s).$$

Come nel caso precedente, supponiamo che il disturbo d_1 sia un segnale canonico del tipo gradino, rampa lineare ecc.

In questo caso la funzione di trasferimento è un po' diversa da quella precedente. Considerando il teorema del valore finale si giunge tuttavia a conclusioni simili rispetto a quelle tratte per il disturbo di carico d_2.

In particolare, si deduce che per reiettare completamente il disturbo in regime permanente (ossia per annullare la componente asintotica di y_{d1}) la funzione di trasferimento che si trova a monte di d_1 (ossia il solo regolatore) deve contenere un numero di poli nell'origine almeno uguale al numero di modi introdotti da d_1.

Infatti, se $G_C(s)$ ha uno o più poli nell'origine, allora si ha:

$$\lim_{s \to 0} \left(Y_{d_1}(s) \right) = \lim_{s \to 0} \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s)G_C(s)} D_1(s) = \lim_{s \to 0} \frac{G_P(s)}{G_P(s)G_C(s)} D_1(s) = \lim_{s \to 0} \frac{D_1(s)}{G_C(s)}$$

e dunque a regime il disturbo vale

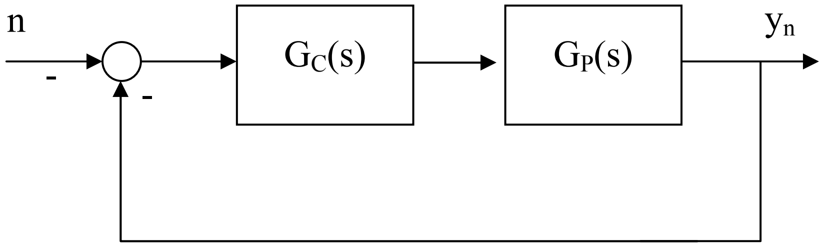
$$y_{d_1}(+\infty) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot Y_{d_1}(s) \right) = \lim_{s \to 0} \left(s \cdot \frac{D_1(s)}{G_C(s)} \right) = 0$$

se $G_c(s)$ contiene un numero di poli nell'origine almeno pari a quelli di $D_1(s)$.

Se invece il numero di poli nell'origine della funzione di trasferimento che si trova a monte di d_1 è inferiore di una unità al numero di modi introdotti da d_1, allora la componente asintotica di y_{d1} è finita ed è tanto minore quanto più grande è il guadagno della funzione di trasferimento.

In definitiva, si conclude che tanto più spostato verso l'ingresso è un disturbo sul ramo diretto, tanto più difficile è da reiettare. Ad esempio, nel caso di un disturbo a gradino sull'uscita di un servomeccanismo di posizione, esso è facilmente reiettato grazie al polo nell'origine del plant. Viceversa, se il disturbo è sul regolatore, la presenza del polo nell'origine nel plant non è di alcuna utilità per il miglioramento della risposta.

Consideriamo infine il caso di un disturbo presente sul ramo di retroazione n(t). Lo schema equivalente del sistema è il seguente.



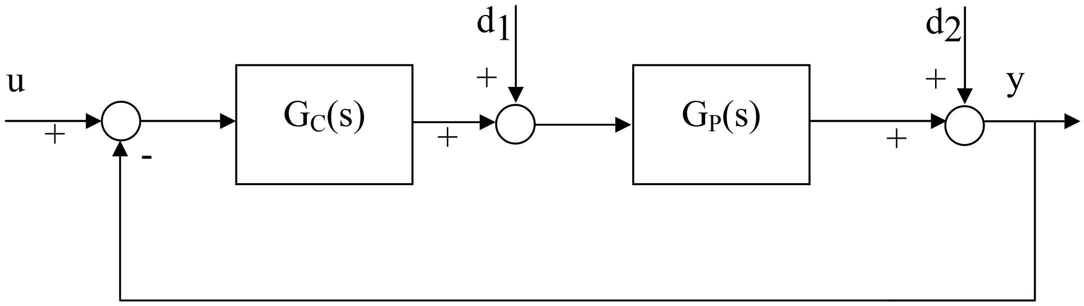
Si osserva che la risposta dovuta a questo disturbo vale:

$$Y_n(s) = -\frac{G_P(s)G_C(s)}{1+G_P(s)G_C(s)}N(s) = -G_0(s)N(s).$$

Ne consegue che tutti i tentativi di reiettare a regime tale componente della risposta si riflettono sulla forma di $G_0(s)$ e quindi sull'uscita vera e propria del sistema. Il disturbo è trattato quindi come un ingresso. Dunque l'unica possibilità per reiettare tale componente è migliorare la qualità del ramo di retroazione, con dei trasduttori di buon livello (si elimina così il problema alla base).

Si osserva comunque che solitamente il rumore è composto da armoniche in alta frequenza, mentre i segnali di interesse (gli ingressi e le uscite del sistema) sono generalmente localizzati in bassa frequenza. Poiché la funzione di trasferimento di un sistema realistico è generalmente di tipo passabasso, ossia ha delle caratteristiche attenuatrici alle alte frequenze (il modulo del suo diagramma di Bode diminuisce in alta frequenza), allora alle frequenze di interesse avviene una naturale 'depurazione' dal rumore dei segnali di interesse.

ESEMPIO



Nel sistema in figura sia

$$G_P(s) = \frac{100}{s(s+1)},\ G_C(s) = \frac{k}{s^n(1+\tau s)},\ k>0,\ \tau>0,\ n \in \mathbb{N}.$$

I disturbi valgono inoltre

$$d_1(t) = 1(t),\ d_2(t) = t \cdot 1(t).$$

Si progetti il regolatore (i parametri k, n, τ) in modo da reiettare completamente a regime i due disturbi.

Evidentemente la reiezione completa del disturbo a gradino sull'attuatore d_1 richiede che questo contenga almeno un polo nell'origine (n=1). Si ha infatti:

$$Y_{d_1}(s) = \frac{G_P(s)}{1+G_P(s)G_C(s)} \cdot D_1(s) = \frac{\frac{100}{s(s+1)}}{1+\frac{100}{s(s+1)} \cdot \frac{k}{s^n(1+\tau s)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{100 s^{n-1}(1+\tau s)}{s^{n+1}(s+1)(1+\tau s)+100k}$$

e quindi la componente asintotica della risposta al disturbo vale:

$$y_{d_1}(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot Y_{d_1}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{100 s^n(1+\tau s)}{s^{n+1}(s+1)(1+\tau s)+100k}\right) = 0$$

se n è almeno pari ad uno, ossia è non nullo.

Analogamente, la reiezione completa del disturbo di carico a rampa d_2 richiede che nelle funzioni di trasferimento che lo precedono ci siano almeno due poli nell'origine. Essendone già presente uno nel plant, si richiede che il regolatore contenga almeno un polo nell'origine (n=1). Si ha infatti:

$$Y_{d_2}(s) = \frac{1}{1+G_P(s)G_C(s)} \cdot D_2(s) = \frac{1}{1+\frac{100}{s(s+1)} \cdot \frac{k}{s^n(1+\tau s)}} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{s^{n-1}(s+1)(1+\tau s)}{s^{n+1}(s+1)(1+\tau s)+100k}$$

e quindi la componente asintotica della risposta al disturbo vale:

$$y_{d_2}(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot Y_{d_2}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{s^n(s+1)(1+\tau s)}{s^{n+1}(s+1)(1+\tau s)+100k}\right) = 0$$

ancora se n è almeno pari ad uno.

In definitiva, per reiettare completamente i disturbi a regime in questo sistema, qualunque sia il guadagno del regolatore e il valore della sua costante di tempo, è necessario che il controllore contenga almeno un polo nell'origine, in modo che a regime l'effetto dei disturbi sia nullo.

Supponiamo ora che il regolatore sia privo di poli nell'origine (n=0). Si ha in tal caso:

$$y_{d_1}(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot Y_{d_1}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{100(1+\tau s)}{s^1(s+1)(1+\tau s)+100k}\right) = \frac{1}{k}$$

dunque l'effetto a regime del disturbo sull'attuatore è contenibile solo aumentando il guadagno del regolatore, ossia della funzione di trasferimento a monte di tale disturbo.

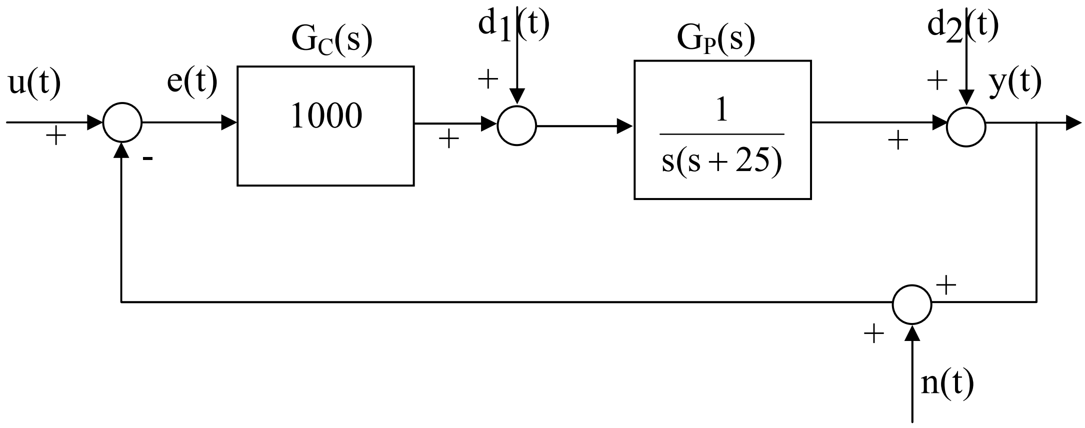
Si ha poi

$$y_{d_2}(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot Y_{d_2}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{(s+1)(1+\tau s)}{s^1(s+1)(1+\tau s)+100k}\right) = \frac{1}{100k}$$

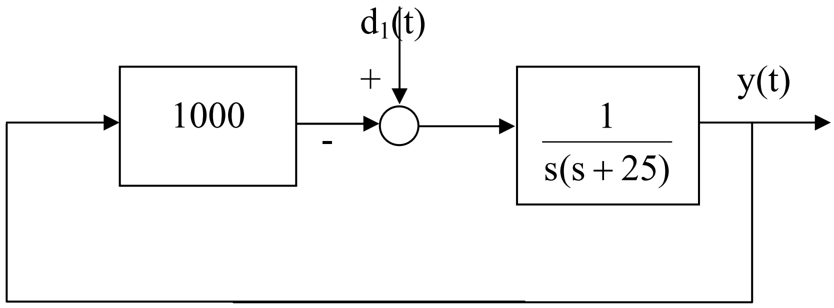
dunque l'effetto a regime del disturbo di carico è contenibile sia aumentando il guadagno del regolatore (k) che quello del plant stesso (che vale 100), ossia incrementando il guadagno della funzione di trasferimento complessiva a monte di tale disturbo.

ESEMPIO

Nel sistema in figura, si determini la componente a regime dell'errore e(t) dovuta ai tre disturbi $d_1(t)=1(t)$, $d_2(t)=1(t)$, $n(t)=10^{-2}\cdot 1(t)$.



Per il principio di sovrapposizione degli effetti calcoliamo la componente dell'errore dovuta al solo disturbo $d_1(t)$. Si ottiene lo schema seguente.



Si ha quindi

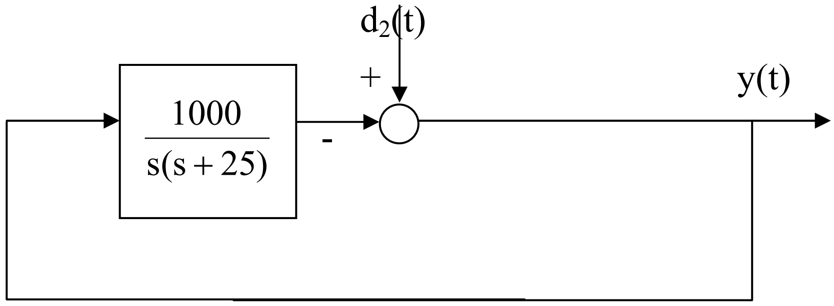
$$E_{d_1}(s) = -Y_{d_1}(s) = -\frac{\frac{1}{s(s+25)}}{1+1000\frac{1}{s(s+25)}}D_1(s) = -\frac{1}{s(s+25)+1000}\cdot\frac{1}{s}$$

da cui si calcola facilmente la componente asintotica corrispondente

$$e_{d_1}(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot E_{d_1}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(-s \cdot \frac{1}{s(s+25)+1000} \cdot \frac{1}{s}\right) = -\frac{1}{1000} = -0.001\,.$$

Si osserva dunque che la componente asintotica dell'errore dovuta al solo disturbo d_1 è finita. In effetti il disturbo d_1 contiene un polo nell'origine (d_1 è un gradino) e il controllore non ha poli nell'origine, ossia vi è una differenza di una unità tra il 'tipo' del disturbo e quello del regolatore, cui corrisponde sempre un errore a regime dovuto al solo disturbo finito.

Determiniamo ora l'errore dovuto al solo $d_2(t)$. Si ottiene lo schema seguente.



Si ha quindi

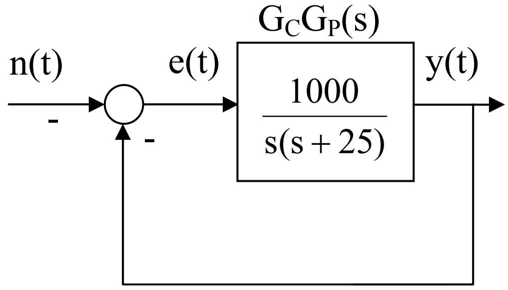
$$E_{d_2}(s) = -Y_{d_2}(s) = -\frac{1}{1+1000\dfrac{1}{s(s+25)}} D_2(s) = -\frac{s(s+25)}{s(s+25)+1000} \cdot \frac{1}{s}$$

da cui si calcola facilmente la componente asintotica corrispondente

$$e_{d_2}(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot E_{d_2}(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(-s \cdot \frac{s(s+25)}{s(s+25)+1000} \cdot \frac{1}{s}\right) = 0\,.$$

Si osserva dunque che la componente asintotica dell'errore dovuta al solo disturbo d_2 è nulla. In effetti sia il disturbo d_2 (che è un gradino) che e la funzione di trasferimento a monte di tale segnale contengono un polo nell'origine, pertanto come è noto l'errore a regime dovuto al solo disturbo è nullo.

Determiniamo infine la componente dell'errore dovuta al solo disturbo n(t). Si ottiene lo schema seguente.



Si ha quindi

$$E_n(s) = -Y_n(s) = \frac{1000\dfrac{1}{s(s+25)}}{1+1000\dfrac{1}{s(s+25)}} N(s) = \frac{1000}{s(s+25)+1000} \cdot \frac{10^{-2}}{s}$$

da cui si calcola facilmente la componente asintotica corrispondente

$$e_n(\infty) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot E_n(s)\right) = \lim_{s\to 0}\left(s \cdot \frac{1000}{s(s+25)+1000} \cdot \frac{10^{-2}}{s}\right) = 0.01.$$

Si osserva dunque che la componente asintotica dell'errore dovuta al solo disturbo n è finita.

In definitiva si ha un errore a regime complessivo dovuto ai tre disturbi pari a:

$$e_{d_1}(\infty) + e_{d_2}(\infty) + e_n(\infty) = -0.001 + 0 + 0.010 = +0.009$$

SENSIBILITÀ ALLE VARIAZIONI PARAMETRICHE

Nella progettazione di un sistema di controllo è importante considerare l'effetto sul comportamento del sistema della variazione di qualche parametro, dovuta a derive di temperatura o all'influenza del cambiamento delle condizioni ambientali o anche all'invecchiamento dei componenti, o infine a un semplice errore nella misura di tale parametro.

Idealmente, infatti, l'effetto di una tale variazione dovrebbe essere nullo sul sistema. Nei sistemi reali naturalmente ciò non si verifica, e la misura dell'effetto delle variazioni parametriche viene detta *sensibilità alle variazioni parametriche*.

Evidentemente, quanto maggiore è la sensibilità del sistema rispetto alla variazione di un parametro, tanto meno desiderabile è la variazione di tale parametro.

Ad esempio, si consideri la funzione della variabile K contenente il parametro a

$$F(K) = \frac{K}{K+a}.$$

Se a=100, allora F(10)=0.091.

Se a triplica (a=300), allora F(10)=0.032. Dunque ad una variazione percentuale relativa del parametro a pari a

$$\frac{\Delta a\%}{a} = \frac{300-100}{100} \cdot 100 = +200\%$$

corrisponde una variazione percentuale relativa di F pari a

$$\frac{\Delta F\%}{F} = \frac{0.032-0.091}{0.091} \cdot 100 = -65\%$$

per cui F ha una sensibilità ridotta alla variazione del parametro a, misurabile come segue:

$$S_a^F = \frac{\dfrac{\Delta F\%}{F}}{\dfrac{\Delta a\%}{a}} = \frac{-65\%}{200\%} = -0.325$$

Nel seguito vediamo come uno dei vantaggi del controllo in retroazione consista proprio nella riduzione della sensibilità alle variazioni parametriche.

Sia dunque F(s) una funzione di trasferimento dipendente da un parametro p. La sensibilità della funzione alla variazione di tale generico parametro si definisce come il limite del rapporto tra la variazione relativa della funzione e la variazione relativa del parametro quando la variazione di quest'ultimo tende a zero:

$$S_p^F = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta F / F}{\Delta p / p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta F / \Delta p}{F / p} = \frac{\frac{\partial F}{\partial p}}{\frac{F}{p}} .$$

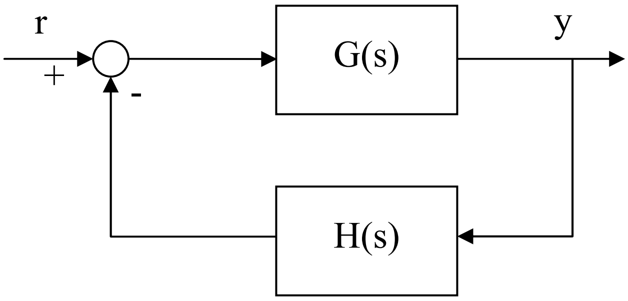
Osserviamo che vale la seguente *proprietà della catena*.

Supponiamo che F(s) sia ottenuta conglobando diverse funzioni di trasferimento (si pensi ad uno schema a blocchi ridotto ad un unico blocco), ad esempio esso contenga la generica funzione di trasferimento $F_1(s)$. Supponiamo altresì che F_1 e quindi F contenga un parametro p variabile. Si ha dunque:

$$S_p^F = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta F / \Delta p}{F / p} = \lim_{\substack{\Delta p \to 0 \\ \Delta F_1 \to 0}} \frac{\Delta F / \Delta p}{F / p} \cdot \frac{\Delta F_1 / \Delta F_1}{F_1 / F_1} =$$

$$= \lim_{\Delta F_1 \to 0} \frac{\Delta F / \Delta F_1}{F / F_1} \cdot \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta F_1 / \Delta p}{F_1 / p} = \frac{\frac{\partial F}{\partial F_1}}{\frac{F}{F_1}} \cdot \frac{\frac{\partial F_1}{\partial p}}{\frac{F_1}{p}} = S_{F_1}^F \cdot S_p^{F_1}$$

Consideriamo ad esempio un generico sistema in retroazione e valutiamo la sensibilità della funzione di trasferimento in anello chiuso rispetto ad una variazione di un parametro α di G(s) (ad esempio un polo di G(s)).



Per la regola della catena si ha:

$$S_\alpha^{G_0} = S_G^{G_0}\cdot S_\alpha^G = \frac{\frac{\partial G_0}{\partial G}}{\frac{G_0}{G}}\cdot S_\alpha^G = \frac{\frac{\partial\left(\frac{G}{1+GH}\right)}{\partial G}}{\frac{\frac{G}{1+GH}}{G}}\cdot S_\alpha^G = \frac{\frac{1+GH-GH}{(1+GH)^2}}{\frac{1}{1+GH}}\cdot S_\alpha^G = \frac{1}{1+GH}\cdot S_\alpha^G .$$

Dunque un effetto positivo della retroazione è nel fatto che è sufficiente aumentare il modulo del guadagno di anello G(s)H(s) (e quindi in particolare, ragionando per $s\to 0$, incrementare il guadagno statico, che influisce sul comportamento a regime, o aumentare il tipo della funzione di anello G(s)H(s)) per ridurre l'influenza della variazione di un parametro α presente nel ramo diretto sulla sensibilità della funzione di trasferimento di un fattore

$$\frac{1}{1+G(s)H(s)}$$

rispetto al caso di controllo in anello aperto.

Si osserva dunque che le stesse misure efficaci nella reiezione dei disturbi e nell'aumento della precisione (aumento del guadagno statico, introduzione di poli nell'origine nella funzione di trasferimento di anello) sono efficaci anche per la riduzione della sensibilità alla variazioni di parametri nel ramo diretto.

In altre parole si ha (almeno a regime, ossia per $s\to 0$):

$$S_\alpha^{G_0} \ll S_\alpha^G .$$

È invece immediato verificare che le variazioni parametriche nel ramo di retroazione sono più insidiose.

Consideriamo ancora il generico sistema in retroazione in figura e valutiamo la sensibilità della funzione di trasferimento in anello chiuso rispetto ad una variazione di un parametro β di H(s).

Per la regola della catena si ha:

$$S_{\beta}^{G_0} = S_{H}^{G_0} \cdot S_{\beta}^{H} = \frac{\frac{\partial G_0}{\partial H}}{\frac{G_0}{H}} \cdot S_{\beta}^{H} = \frac{\frac{\partial\left(\frac{G}{1+GH}\right)}{\partial H}}{\frac{G}{1+GH}\cdot\frac{1}{H}} \cdot S_{\beta}^{H} = \frac{-\frac{G^2}{(1+GH)^2}}{\frac{G}{(1+GH)H}} \cdot S_{\beta}^{H} = -\frac{GH}{1+GH} \cdot S_{\beta}^{H} = -G_0 H \cdot S_{\beta}^{H}$$

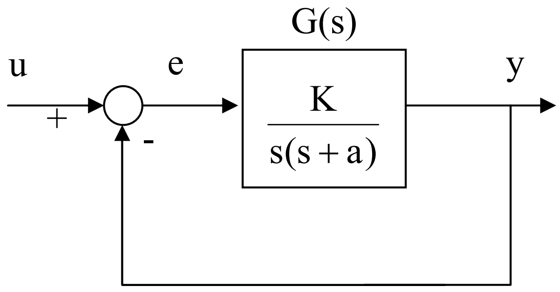
In questo caso, se si aumenta il guadagno di anello GH (attraverso un aumento del guadagno statico o l'introduzione di poli nell'origine), si ha, almeno a regime:

$$S_{\beta}^{G_0} = -\frac{GH}{1+GH} \cdot S_{\beta}^{H} \underset{s\to 0}{\simeq} -1 \cdot S_{\beta}^{H} = -S_{\beta}^{H}$$

dunque la retroazione non ha alcun effetto benefico sulla sensibilità alle variazioni di un parametro β nel ramo inverso, poiché la sensibilità tende ad essere la stessa, a meno del segno, di quella che si avrebbe in anello aperto. Come per i disturbi sul ramo di retroazione, anche per la sensibilità alla variazione dei parametri in tale ramo si conclude che il trasduttore deve essere di buona qualità.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, calcolare la sensibilità della funzione di trasferimento in anello chiuso $G_0(s)$ alla variazione del parametro a nel ramo diretto G(s).



La funzione di trasferimento in anello chiuso è:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\dfrac{K}{s(s+a)}}{1+\dfrac{K}{s(s+a)}} = \frac{K}{s(s+a)+K} = \frac{K}{s^2+as+K}$$

Applichiamo dapprima la definizione di funzione sensibilità. Si ha:

$$S_a^{G_0} = \frac{\dfrac{\partial G_0}{\partial a}}{\dfrac{G_0}{a}} = \frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{K}{s^2+as+K}\right)}{\partial a}}{\dfrac{\dfrac{K}{s^2+as+K}}{a}} = -\frac{Ks}{(s^2+as+K)^2}\cdot\frac{a(s^2+as+K)}{K} = -\frac{as}{s^2+as+K}.$$

Allo stesso risultato si giunge applicando la regola della catena per un parametro nel ramo diretto:

$$S_a^{G_0} = S_G^{G_0}\cdot S_a^G = \frac{1}{1+GH}\cdot S_a^G = \frac{1}{1+G}\cdot\frac{\dfrac{\partial G}{\partial a}}{\dfrac{G}{a}} = \frac{1}{1+\dfrac{K}{s(s+a)}}\cdot\frac{\dfrac{\partial\left(\dfrac{K}{s(s+a)}\right)}{\partial a}}{\dfrac{K}{as(s+a)}} =$$

$$= \frac{as^2(s+a)^2}{K(s(s+a)+K)}\cdot\frac{(-Ks)}{s^2(s+a)^2} = -\frac{as}{(s^2+as+K)}$$

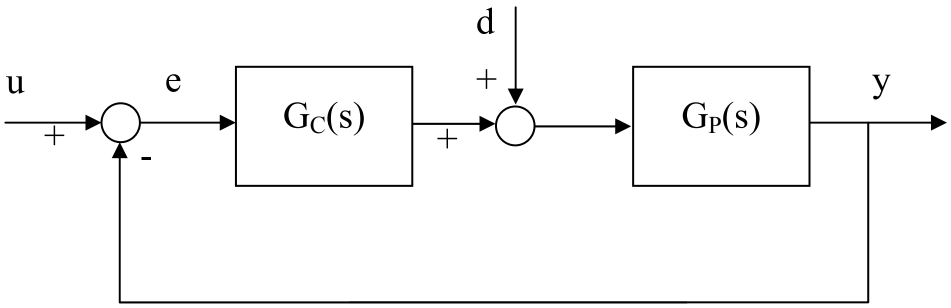
Si osserva che la funzione di sensitività diminuisce all'aumentare del guadagno K. Essa inoltre tende a zero per $s\to 0$, ossia sussiste la notevole proprietà che a regime il sistema presenta sensibilità al parametro a nulla.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_P(s) = \frac{10}{s^2 + s + 20} \qquad \text{e} \qquad G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}, \text{ con } K_P, K_I > 0.$$

Si calcolino le sensibilità alle variazioni parametriche $S_{K_I}^{G_0}$ e $S_{K_P}^{G_0}$, essendo $G_0(s)$ la funzione di trasferimento in anello chiuso.



Ai fini del calcolo della sensibilità alle variazioni parametriche il disturbo d è ovviamente considerato nullo.

La funzione di trasferimento in anello chiuso è

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)},$$

dove si è posto $G(s)=G_C(s)G_P(s)$. Applicando la regola della catena si ha:

$$S_{K_I}^{G_0} = S_G^{G_0} \cdot S_{G_C}^{G} \cdot S_{K_I}^{G_C}.$$

Si sa inoltre che, trattandosi di un sistema in retroazione unitaria, vale la relazione:

$$S_G^{G_0} = \frac{1}{1+G} = \frac{1}{1 + G_C G_P} = \frac{1}{1 + \dfrac{10(K_P s + K_I)}{s(s^2 + s + 20)}} = \frac{s(s^2 + s + 20)}{s(s^2 + s + 20) + 10(K_P s + K_I)}.$$

Inoltre vale la relazione:

$$S_{G_C}^{G} = \frac{\frac{\delta G}{\delta G_C}}{\frac{G}{G_C}} = \frac{\frac{\delta(G_C G_P)}{\delta G_C}}{\frac{G_C G_P}{G_C}} = \frac{G_P}{G_P} = 1$$

Ricaviamo ora

$$S_{K_I}^{G_C} = \frac{\frac{\delta G_C}{\delta K_I}}{\frac{G_C}{K_I}} = \frac{\frac{\delta\left(K_P + \frac{K_I}{s}\right)}{\delta K_I}}{\frac{K_P s + K_I}{K_I s}} = \frac{K_I s}{K_P s + K_I} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_I}{K_P s + K_I}.$$

Si ha in definitiva:

$$S_{K_I}^{G_0} = S_G^{G_0} \cdot S_{G_C}^{G} \cdot S_{K_I}^{G_C} = \frac{s(s^2+s+20)}{s(s^2+s+20)+10(K_P s + K_I)} \cdot 1 \cdot \frac{K_I}{K_P s + K_I} =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{10(K_P s + K_I)}{s(s^2+s+20)}} \cdot \frac{1}{1+\frac{K_P s}{K_I}}.$$

Si osserva che per via del polo nell'origine del regolatore la sensibilità di $G_0(s)$ alle variazioni di K_I a regime ($s \to 0$) tende a zero. Inoltre la sensibilità di $G_0(s)$ alle variazioni di tale parametro è tanto più piccola quanto più grande è il parametro K_P.

In modo del tutto analogo è possibile discutere la sensibilità alle variazioni parametriche del parametro K_P. Applichiamo nuovamente la regola della catena per la seconda funzione richiesta:

$$S_{K_P}^{G_0} = S_G^{G_0} \cdot S_{G_C}^{G} \cdot S_{K_P}^{G_C}.$$

Ricaviamo ora

$$S_{K_P}^{G_C} = \frac{\dfrac{\delta G_C}{\delta K_P}}{\dfrac{G_C}{K_P}} = \frac{\dfrac{\delta\left(K_P + \dfrac{K_I}{s}\right)}{\delta K_P}}{\dfrac{K_P + \dfrac{K_I}{s}}{K_P}} = \frac{1}{\dfrac{K_P s + K_I}{K_P s}} = \frac{K_P s}{K_P s + K_I}.$$

Si ha in definitiva:

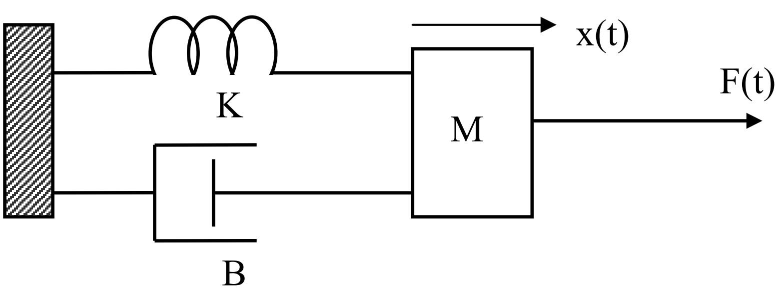
$$S_{K_P}^{G_0} = S_G^{G_0} \cdot S_{G_C}^{G} \cdot S_{K_I}^{G_C} = \frac{s(s^2+s+20)}{s(s^2+s+20)+10(K_P s + K_I)} \cdot 1 \cdot \frac{K_P s}{K_P s + K_I} =$$

$$= \frac{1}{1 + \dfrac{10(K_P s + K_I)}{s(s^2+s+20)}} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{K_I}{K_P s}}.$$

Si osserva nuovamente che per via del polo nell'origine del regolatore anche la sensibilità di $G_0(s)$ alle variazioni del parametro K_P a regime ($s \to 0$) tende a zero. Inoltre la sensibilità $G_0(s)$ alle variazioni di tale parametro è tanto più piccola quanto più grande è il parametro K_I.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, calcolare la sensibilità della funzione di trasferimento in anello chiuso $G(s) = \dfrac{X(s)}{F(s)}$ in relazione alla variazione dei parametri M e B, rispettivamente.



Il sistema si può risolvere scrivendo per ispezione l'equilibrio meccanico orizzontale con il metodo delle maglie. Si ha un'unica 'maglia', ossia un'unica massa indipendente M per la quale si scrive l'equivalente meccanico della legge di Kirchoff delle tensioni:

$$\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{impedenze}\\ \text{collegate alla}\\ \text{massa}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{Spostamento}\\ \text{della massa}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{Somma delle}\\ \text{forze applicate}\\ \text{alla massa}\end{pmatrix}$$

ossia

$$(Ms^2+Bs+K)\cdot X(s)=F(s)$$

da cui

$$G(s)=\frac{X(s)}{F(s)}=\frac{1}{Ms^2+Bs+K}.$$

Applichiamo ora la definizione di funzione sensibilità. Si ha:

$$S_M^G=\frac{\frac{\partial G}{\partial M}}{\frac{G}{M}}=\frac{\frac{\partial\left(\frac{1}{Ms^2+Bs+K}\right)}{\partial M}}{\frac{\frac{1}{Ms^2+Bs+K}}{M}}=\frac{-\frac{s^2}{(Ms^2+Bs+K)^2}}{\frac{\frac{1}{Ms^2+Bs+K}}{M}}=-\frac{Ms^2}{Ms^2+Bs+K}=-\frac{1}{1+\frac{B}{Ms}+\frac{K}{Ms^2}}.$$

Inoltre

$$S_B^G=\frac{\frac{\partial G}{\partial B}}{\frac{G}{B}}=\frac{\frac{\partial\left(\frac{1}{Ms^2+Bs+K}\right)}{\partial B}}{\frac{\frac{1}{Ms^2+Bs+K}}{B}}=\frac{-\frac{s}{(Ms^2+Bs+K)^2}}{\frac{\frac{1}{Ms^2+Bs+K}}{B}}=-\frac{Bs}{Ms^2+Bs+K}=-\frac{1}{1+\frac{M}{B}s+\frac{K}{Bs}}.$$

Le funzioni S^G_M e S^G_B permettono di studiare come varia la funzione di trasferimento del sistema in presenza di un errore nella misura dei parametri M o B o semplicemente in presenza di una variazione degli stessi.

Si osserva che sia la sensibilità di G(s) calcolata rispetto alla massa M che quella relativa al coefficiente di attrito B sono sempre minori di 1 in modulo al variare della variabile s e diminuiscono all'aumentare del parametro K.

Inoltre, entrambe le funzioni sensibilità tendono a zero per $s \rightarrow 0$, ossia sussiste la notevole proprietà che a regime il sistema presenta sensibilità nulla a variazioni del parametro M e del parametro B.