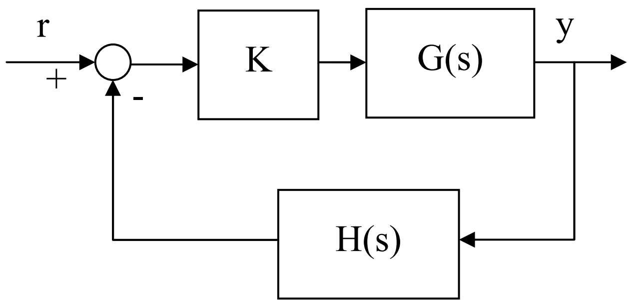
LUOGO DELLE RADICI

Il progetto accurato di un sistema di controllo richiede la conoscenza dei poli del sistema in anello chiuso e dell'influenza che su di essi hanno le variazioni dei più importanti parametri a disposizione del progettista: a tal fine risulta di notevole utilità il metodo del luogo delle radici. Si tratta di un procedimento grafico per la costruzione nel piano complesso del tracciato descritto dalle radici dell'equazione caratteristica al variare di un parametro, che solitamente è la costante di guadagno di anello.

Consideriamo un generico sistema in retroazione non unitaria, con una funzione di trasferimento sul ramo diretto G(s), un amplificatore di guadagno variabile K positivo sul ramo diretto (che funge da regolatore) e con funzione di trasferimento del ramo di retroazione (ossia del trasduttore) H(s).



L'equazione caratteristica del sistema in retroazione è:

$$1+KG(s)H(s)=0$$

Si suppone che il prodotto KG(s)H(s) sia una funzione razionale fratta posta nella forma poli-zeri come segue, con costante di guadagno positiva:

$$KG(s)H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)},\ n\geq m,$$

dove gli zeri e i poli in anello aperto z_j e p_i con j=1,…,m e i=1,…,n sono dati, mentre il parametro K può assumere valori nell'intervallo [0,+∞[. Pertanto l'equazione caratteristica del sistema in retroazione è:

$$1 + K\frac{(s-z_1)(s-z_2)...(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)...(s-p_n)} = 0\,.$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Ne consegue che al variare del parametro K da 0 a $+\infty$ le n radici dell'equazione caratteristica, ossia gli n poli in anello chiuso del sistema, cambiano. In particolare, essi descrivono un insieme di curve nel piano complesso, cui si dà il nome di luogo delle radici.

Il luogo delle radici è di grande utilità per giudicare l'effetto delle variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione. Ad esempio, se il luogo delle radici di un sistema in retroazione è tutto contenuto nel semipiano sinistro di Gauss, il progettista del sistema di controllo può scegliere a piacimento il valore del parametro di regolazione K (in base a specifiche quali ad esempio la precisione, la robustezza e la rapidità della risposta) nell'intervallo $[0,+\infty[$, sapendo che la specifica di asintotica stabilità del sistema è sempre verificata, ossia che il sistema in retroazione funziona comunque in condizioni di sicurezza.

L'equazione caratteristica è una equazione complessa nella variabile complessa s. Se il guadagno K è positivo, essa dunque equivale alle seguenti condizioni:

$$G(s)H(s) = -\frac{1}{K} \Rightarrow \qquad |G(s)H(s)| = \frac{1}{K}, \qquad \sphericalangle(G(s)H(s)) = (2\nu+1)\pi,\ \nu=0,1,\ldots,n-m-1.$$

La prima equazione è detta condizione di taratura e si scrive anche:

$$\frac{\prod_{j=1}^{m} |s - z_j|}{\prod_{i=1}^{n} |s - p_i|} = \frac{1}{K}.$$

La seconda equazione è la condizione sulle fasi o sugli argomenti e si scrive anche:

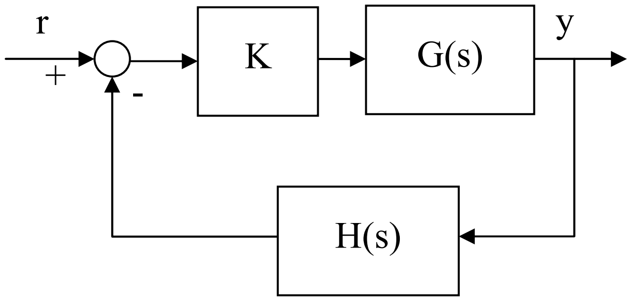
$$\sum_{j=1}^{m} \sphericalangle(s - z_j) - \sum_{i=1}^{n} \sphericalangle(s - p_i) = (2\nu+1)\pi,\ \nu=0,1,\ldots,n-m-1.$$

L'equazione relativa agli argomenti è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre la prima permette di graduare il luogo stesso in funzione di K.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO

Sia il sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:



$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(1+\tau s)}, \ K>0, \ \tau>0.$$

Per costruire il luogo delle radici del sistema si riconduce anzitutto il guadagno di anello nella forma poli-zeri:

$$KG(s)H(s) = \frac{K_1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}, \ K_1 = \frac{K}{\tau} > 0 \ (K=K_1\tau>0)$$

e si studia il luogo delle radici al variare del guadagno K_1 tra 0 e $+\infty$.

L'equazione degli argomenti si scrive:

$$\sphericalangle(K_1 G(s)H(s)) = \sphericalangle(G(s)H(s)) = (2\nu+1)\pi, \ \nu=0,1.$$

ossia

$$-\sphericalangle(s) - \sphericalangle\left(s+\frac{1}{\tau}\right) = (2\nu+1)\pi, \ \nu=0,1.$$

o anche

$$-\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$$

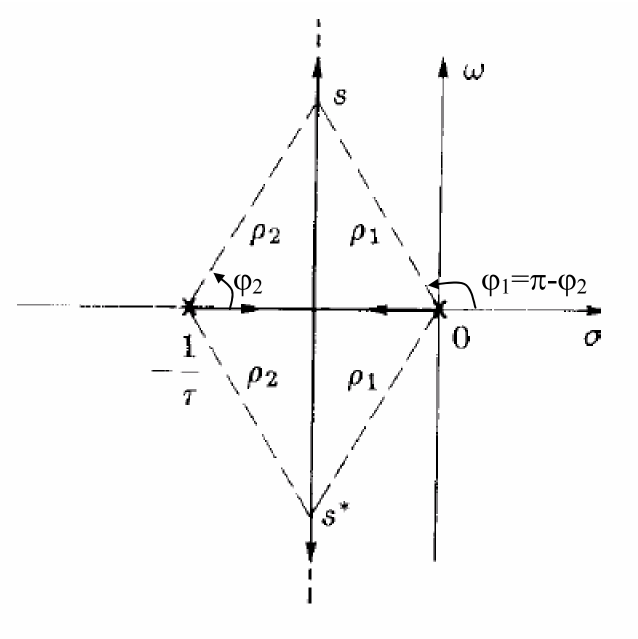
ossia

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \pi.$$

Si verifica facilmente che i punti che soddisfano l'equazione precedente (ovvero i punti per i quali gli angoli φ_1 e φ_2 sono supplementari) sono quelli del segmento sull'asse reale delimitato dai due poli del guadagno di anello e quelli dell'asse di tale segmento (si veda la figura corrispondente).

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

In particolare, per i punti di tale segmento si ha $\varphi_1 = \pi$ e $\varphi_2 = 0$, mentre per i punti dell'asse del segmento si ha che gli angoli φ_1 e φ_2 sono supplementari per costruzione.



Scrivendo poi l'equazione dei moduli si ha il valore del guadagno K_1, e quindi di K, cui corrisponde una certa posizione dei poli in anello chiuso del sistema:

$$K_1 = \frac{K}{\tau} = \left| s\left(s + \frac{1}{\tau} \right) \right| = \rho_1 \rho_2$$

da cui

$$K = \tau \rho_1 \rho_2 .$$

In particolare, in corrispondenza del punto medio dell'intervallo [-1/τ,0] si ha:

$$\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2\tau}$$

e si ottiene un polo doppio in anello chiuso (in -τ/2), corrispondente al valore del guadagno

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$K = \tau\rho_1\rho_2 = \tau \cdot \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 = \frac{1}{4\tau}.$$

Infatti per questo guadagno l'equazione caratteristica diventa:

$$1 + \frac{\frac{1}{4\tau}}{s(1+\tau s)} = 0$$

ossia

$$4\tau^2 s^2 + 4\tau s + 1 = 0$$

che, essendo il quadrato di un binomio, ha una radice doppia proprio in s=-τ/2.

Si osserva che a valori piccoli del guadagno corrispondono punti del luogo, ossia poli in anello chiuso, vicini ai poli in anello aperto (ottenuti per K=0), mentre per valori elevati del guadagno si ottengono due punti sul ramo verticale del luogo, in posizione simmetrica rispetto all'asse reale, che si allontanano al crescere del guadagno.

In definitiva, al variare del guadagno K (K_1) da 0 a $+\infty$, le radici partono dai poli in anello aperto muovendosi sull'asse reale (per 0<K<1/4τ), confluiscono nel punto $-\frac{1}{2\tau}$ (per K=1/(4τ)) e quindi si spostano simmetricamente, una verso l'alto e l'altra verso il basso, sui rami verticali del luogo, essendo complesse e coniugate (per K>1/(4τ)). Si hanno due rami, che descrivono la posizione dei due poli in anello chiuso al variare del guadagno. Essi si allontanano dai poli in anello aperto e giungono all'infinito e sono disposti simmetricamente rispetto all'asse reale.

Dalla disposizione dei rami del luogo delle radici nel piano di Gauss si deduce in conclusione che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per ogni valore del guadagno K positivo, con un transitorio che è di tipo aperiodico per bassi valori del guadagno (per 0<K≤1/(4τ)), mentre è oscillatorio per alti valori di tale parametro (per K>1/(4τ)).

Per verificare l'esattezza dei risultati determinati, possiamo risolvere l'equazione caratteristica che descrive il sistema:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$1+\frac{K_1}{s\left(s+\frac{1}{\tau}\right)}=0 \Leftrightarrow s^2+\frac{s}{\tau}+K_1=0$$

che ha soluzioni in

$$s_{1/2}=-\frac{1}{2\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}-K_1}\ .$$

In particolare, se $K_1=0$ (ossia $K=0$) le soluzioni diventano:

$$s_{1/2}=-\frac{1}{2\tau}\pm\sqrt{\frac{1}{4\tau^2}}=\begin{cases}0\\ -\frac{1}{\tau}\end{cases}$$

ossia coincidono con i poli del guadagno di anello (poli in anello aperto). Se inoltre risulta $0<K_1<\frac{1}{4\tau^2}$ (ossia $0<K<\frac{1}{4\tau}$) allora le soluzioni sono reali e sono comprese nel segmento $\left]-\frac{1}{4\tau},0\right[$. Se invece vale $K_1=\frac{1}{4\tau^2}$ (ossia $K=\frac{1}{4\tau}$) allora le soluzioni sono reali e coincidenti e valgono $-\frac{1}{2\tau}$. Ancora, per $K_1>\frac{1}{4\tau^2}$ (ossia $K>\frac{1}{4\tau}$) allora le soluzioni sono complesse e coniugate e si esprimono come segue:

$$s_{1/2}=-\frac{1}{2\tau}\pm j\sqrt{K_1-\frac{1}{4\tau^2}}\ .$$

Se infine $K_1=+\infty$ (ossia $K=+\infty$) allora le soluzioni dell'equazione diventano

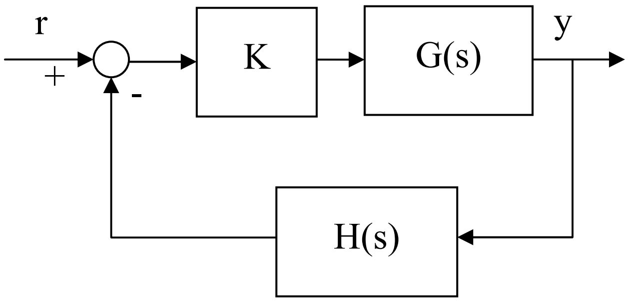
$$s_{1/2}=-\frac{1}{2\tau}\pm j\infty\ .$$

ossia non sono posizionate al finito, bensì si dispongono nei cosiddetti zeri all'infinito del guadagno di anello.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO

Sia il sistema chiuso in retroazione in figura, con il seguente guadagno di anello espresso nella forma poli-zeri:



$$KG(s)H(s)=\frac{K(s-b)}{(s+a)}, \text{ K>0, a>0, b>0.}$$

Studiamo il luogo delle radici al variare del guadagno K tra 0 e $+\infty$.

L'equazione degli argomenti si scrive:

$$\measuredangle(G(s)H(s))=(2\nu+1)\pi, \ \nu=0.$$

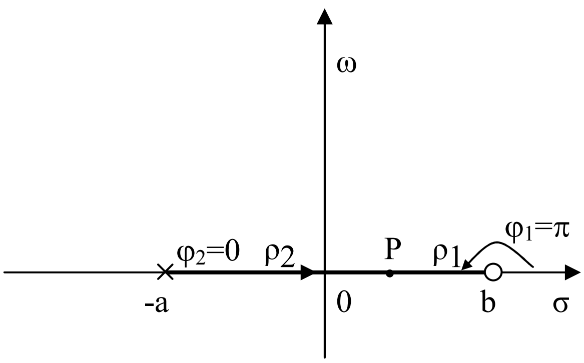
ossia

$$\measuredangle(s-a)-\measuredangle(s+b)=(2\nu+1)\pi, \ \nu=0.$$

o anche

$$\varphi_1-\varphi_2=\pi \Rightarrow \varphi_1=\varphi_2+\pi.$$

Si verifica facilmente che i soli punti P che soddisfano l'equazione precedente sono quelli del segmento sull'asse reale delimitato dallo zero e dal polo del guadagno di anello, per i quali $\varphi_1=\pi$ e $\varphi_2=0$ (si veda la figura corrispondente).



Scrivendo poi l'equazione dei moduli si ha il valore del guadagno K cui corrisponde una certa posizione dei poli in anello chiuso del sistema:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$K = \left| -\frac{(s+a)}{(s-b)} \right|$$

da cui

$$K = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Si osserva che a valori piccoli del guadagno corrisponde un polo in anello chiuso (il sistema è del primo ordine) vicino al polo in anello aperto (nel quale si ha $\rho_2 = 0$), che si ottiene proprio per K=0. Per un particolare valore del guadagno si ottiene un polo nell'origine (nella quale si ha $\rho_1 = \rho_2 = a$), mentre per valori elevati del guadagno il polo in anello chiuso è reale positivo e tende verso lo zero in s=+b (nel quale si ha $\rho_1 = 0$) all'aumentare del guadagno stesso.

In particolare, il polo nell'origine si ottiene per

$$\rho_1 = \rho_2,$$

cioè per

$$K=a/b.$$

Infatti l'equazione caratteristica si scrive:

$$s + a = K(b - s) \Leftrightarrow (1 + K)s - (Kb - a) = 0$$

la cui soluzione s=0 si ottiene annullando il termine noto.

In definitiva, al variare del guadagno K da 0 a $+\infty$ la radice dell'equazione caratteristica è descritta da un ramo che parte dal polo in anello aperto e giunge nello zero in anello aperto.

Si osserva infine che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile per K compreso tra 0 e a/b, con un transitorio che è sempre di tipo aperiodico. Per K=a/b il sistema è semplicemente stabile con un polo nell'origine, mentre per valori del guadagno maggiori di a/b il sistema è instabile.

Per verificare l'esattezza dei risultati determinati, possiamo risolvere l'equazione caratteristica che descrive il sistema:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$(1+K)s-(Kb-a)=0 \Rightarrow s=\frac{Kb-a}{K+1}.$$

In particolare, se K=0 la soluzione diventa:

$$s=-a$$

ossia coincide con il polo del guadagno di anello (polo in anello aperto). Se inoltre risulta $0<K<\frac{a}{b}$ allora la soluzione è reale negativa compresa nel segmento]-a,0[. Se invece vale $K=\frac{a}{b}$ allora la soluzione è s=0. Ancora, per $K>\frac{a}{b}$ allora la soluzione è reale positiva compresa nel segmento]0,a[. Se infine $K=+\infty$ allora l'unica soluzione ammissibile dell'equazione è

$$s=\lim_{K\to+\infty}\frac{Kb-a}{K+1}=b$$

ed è dunque posizionata nello zero al finito del guadagno di anello.

REGOLE PER IL TRACCIAMENTO DEL LUOGO DELLE RADICI

Possiamo allora generalizzare il tracciamento del luogo delle radici di un sistema in retroazione con guadagno di anello aperto KG(s)H(s) come segue.

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione.

Proprietà 1.

Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento guadagno di anello (n).

Tale proprietà discende dal fatto che il luogo studia la disposizione delle n radici dell'equazione caratteristica nel piano complesso al variare del guadagno della funzione di trasferimento di anello.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Proprietà 2.

Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

Tale proprietà formalizza il fatto che i poli in anello chiuso sono le radici di una equazione caratteristica a coefficienti reali, quindi essi sono o reali o complessi e coniugati.

Proprietà 3.

Ogni ramo parte da un polo del guadagno di anello e termina in uno zero dello stesso. In quest'ultimo caso il luogo giunge o in uno degli m zeri al finito (quindi in uno zero vero e proprio) o in uno degli n-m zeri all'infinito del guadagno di anello. I rami possono intersecarsi: in tal caso per qualche valore del guadagno si ha una radice multipla.

Questa proprietà discende dal fatto che per K=0 l'equazione caratteristica è verificata solo se l'incognita s ha il valore di un polo in anello aperto, mentre per $K \to +\infty$ essa è verificata solo se la variabile s ha il valore di uno zero in anello aperto oppure se $s \to \infty$ (infatti il guadagno di anello è sempre fisicamente realizzabile, quindi $n \geq m$).

Proprietà 4.

Se il guadagno K è positivo, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se lascia alla sua destra nel piano complesso un numero totale dispari di singolarità del guadagno di anello (ossia di poli e zeri in anello aperto).

Tale proprietà discende dall'applicazione della condizione degli argomenti.

Proprietà 5.

Se il guadagno è positivo, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo p_i in anello aperto del guadagno di anello vale:

$$\varphi_{p_i} = (2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \sphericalangle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sphericalangle(p_i - p_j), \; \nu=0,1,\ldots,n-m-1.$$

Se il guadagno è positivo, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici tende a uno zero z_i in anello aperto del guadagno di anello vale:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\varphi_{z_i} = (2\nu + 1)\pi - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \sphericalangle(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^{n} \sphericalangle(z_i - p_j),\ \nu=0,1,\ldots,n\text{-}m\text{-}1.$$

Anche questa proprietà discende dall'applicazione della condizione degli argomenti.

<u>Proprietà 6.</u>

Gli n-m rami del luogo delle radici che non giungono negli zeri in anello aperto tendono all'infinito secondo n-m asintoti. Gli asintoti del luogo formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa

$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{j=1}^{m} z_j}{n - m}$$

o anche

$$\sigma_a = -\frac{a_{n-1} - b_{m-1}}{n - m}$$

essendo a_{n-1} e b_{m-1} rispettivamente il coefficiente del termine di ordine n-1 del polinomio a denominatore del guadagno di anello G(s)H(s) e di quello di ordine m-1 del polinomio a numeratore dello stesso.

Inoltre, se il guadagno K è positivo, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu + 1)\pi}{n - m}\ (\nu=0,1,\ldots,n\text{-}m\text{-}1).$$

Tale proprietà discende dalla valutazione dell'equazione caratteristica quando $s \to \infty$.

La presente proprietà comporta una interessante conseguenza: gli asintoti di un sistema in retroazione negativa avente funzione di trasferimento di anello asintoticamente stabile e a fase minima (cioè con tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso) intersecano l'asse immaginario in punti diversi dall'origine (tranne naturalmente nei casi n-m=1 e n-m=2), il che spiega il fatto che i poli dominanti in anello chiuso (cioè quelli che per primi, all'aumentare del

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

guadagno, tendono a passare nel semipiano destro) sono di regola complessi e coniugati.

Per il tracciamento del luogo delle radici, specie per ciò che riguarda i rami corrispondenti ai poli dominanti, è utile la conoscenza dei punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario e dei relativi valori del parametro K. Poiché tali punti corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione, per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh, che fornisce il valore di K corrispondente al limite di stabilità: risolvendo l'equazione ausiliaria, si ottengono poi i valori della pulsazione in corrispondenza dei quali avviene l'intersezione con l'asse immaginario.

Per i motivi su elencati è evidente come si debba mantenere limitato il valore del guadagno del sistema. Oltre i problemi di saturazione, in genere i rami del luogo tendono a spostarsi verso il semipiano destro (ovvero verso gli asintoti) e il sistema in anello chiuso diventa instabile. In definitiva, le specifiche di stabilità e quelle di fedeltà sono solitamente conflittuali, perciò il progettista compie in genere delle scelte di compromesso nella scelta del parametro K (il quale, come è noto, dovrebbe essere il più elevato possibile per migliorare la precisione a regime).

Proprietà 7.

Una radice multipla di ordine h dell'equazione caratteristica per un valore del parametro K corrisponde ad un punto del piano complesso $s \in \mathbb{C}$ in cui, per quel valore di K, si incrociano h rami del luogo delle radici. Dunque in quel punto $s \in \mathbb{C}$, oltre all'equazione caratteristica 1+KG(s)H(s)=0, sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla (h-1)-esima:

$$\frac{d}{ds}G(s)H(s) = 0, ..., \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}}G(s)H(s) = 0.$$

Tale proprietà discende dal fatto che una radice multipla di ordine h annulla non solo il polinomio caratteristico ma anche le sue derivate fino all'ordine h-1.

Proprietà 8.

Per la precedente proprietà, una radice doppia disposta sull'asse reale corrisponde ad un punto $s \in \mathbb{R}$ in cui risulta

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\frac{d}{ds}G(s)H(s) = 0.$$

Equivalentemente, una radice doppia disposta sull'asse reale corrisponde ad un punto $s \in \mathbb{R}$ che è o di massimo locale per il guadagno K (punto di emergenza dall'asse reale) o di minimo locale per K (punto di confluenza). Pertanto, è possibile individuare una radice doppia posta sull'asse reale anche determinando tale punto di massimo o di minimo locale. Questo si individua analiticamente cercando i valori reali di s che rendono nulli i differenziali di K, ossia per

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{ds}G(s)H(s) = 0.$$

Poiché le precedenti due equazioni possono presentare grado elevato e dunque essere difficilmente risolvibili manualmente, un procedimento alternativo consiste nel risolvere la prima delle due precedenti relazioni per punti, ovvero calcolando il guadagno K dall'equazione caratteristica

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

per i diversi punti del luogo in un dato segmento sull'asse reale e individuando con approssimazione fissata il punto di massimo locale (punto di emergenza) o di minimo locale (punto di confluenza) in tale *range*.

Tabella di taratura

s	K
s_1	K_1
…	…
…	…
s_2	K_2

Tale procedimento viene detto metodo di taratura del luogo. In altre parole, esso consiste nel costruire la cosiddetta tabella di taratura, che riporta in un prefissato intorno dell'asse reale $[s_1,s_2]$, in cui è plausibile che sia presente un punto di minimo (confluenza) o di massimo (emergenza) locale, i valori corrispondenti del guadagno K calcolati secondo la precedente equazione di taratura. In tal modo si determina una

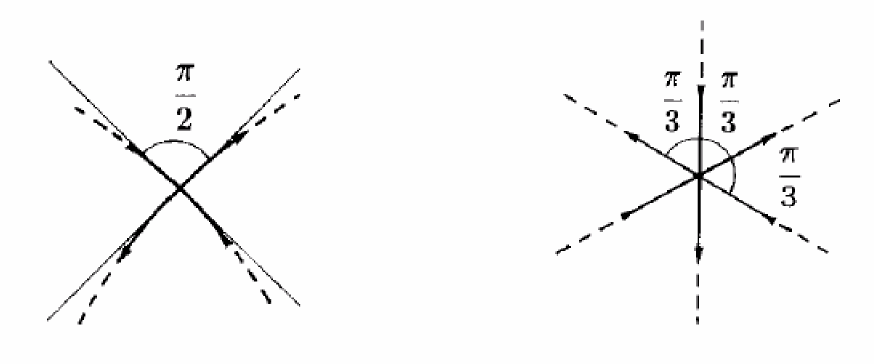
Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

approssimazione più o meno precisa del punto di massimo o minimo cercato e del corrispondente valore del guadagno K.

Proprietà 9.

In corrispondenza di una radice multipla di ordine h il luogo presenta h rami entranti e h uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di π/h radianti.

In particolare, i due rami che convergono in (divergono da) un punto corrispondente ad una radice doppia vi convergono (ne divergono) da due direzioni opposte. Nel punto in cui i rami convergono (divergono) si originano altri due rami, che ne divergono (vi convergono) ancora secondo direzioni opposte, disposte a 90 gradi rispetto alle direzioni di arrivo dei primi.



Proprietà 10.

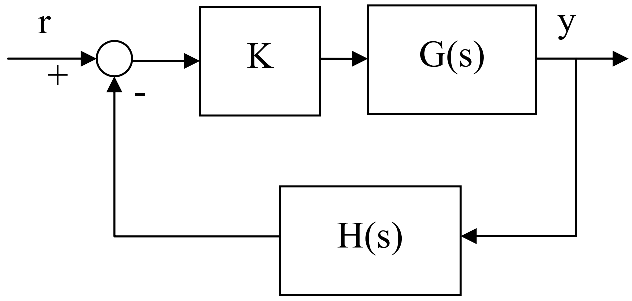
Le (eventuali) intersezioni del luogo con l'asse immaginario sono contenute nell'insieme (eventualmente vuoto) delle soluzioni dell'equazione caratteristica ottenuto (ove possibile) annullando per un valore positivo del guadagno K una riga dispari e/o la riga di ordine zero della tabella di Routh associata.

Infatti il metodo del luogo delle radici e il metodo del criterio di Routh per l'analisi di stabilità di un sistema forniscono gli stessi risultati. Inoltre, come è noto dal criterio di Routh, se esistono valori positivi del guadagno K che annullano una riga dispari o la riga di ordine zero della tabella di Routh, per tali valori del guadagno alcuni poli in anello chiuso sono disposti simmetricamente rispetto all'origine. È dunque sufficiente determinare tali poli per verificare se essi sono sull'asse immaginario. In caso affermativo, il guadagno corrispondente individua la condizione di stabilità critica.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:



$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}, \; K>0.$$

Il luogo ha n=3 rami, che partono dai poli in anello aperto s=0, s=-1, s=-2 e giungono negli n-m=3 zeri all'infinito secondo le direzioni asintotiche.

Inoltre fa parte del luogo l'insieme dei punti sull'asse reale $]-\infty,-2]\cup[-1,0]$. Perciò gli angoli di partenza dai poli s=0, s=-1 e s=-2 sono rispettivamente π, 0, π.

I tre rami tendono agli asintoti, che si intersecano nel centro stella di valore

$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

ed hanno le direzioni asintotiche

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

ossia di 60, 180 e 300 gradi.

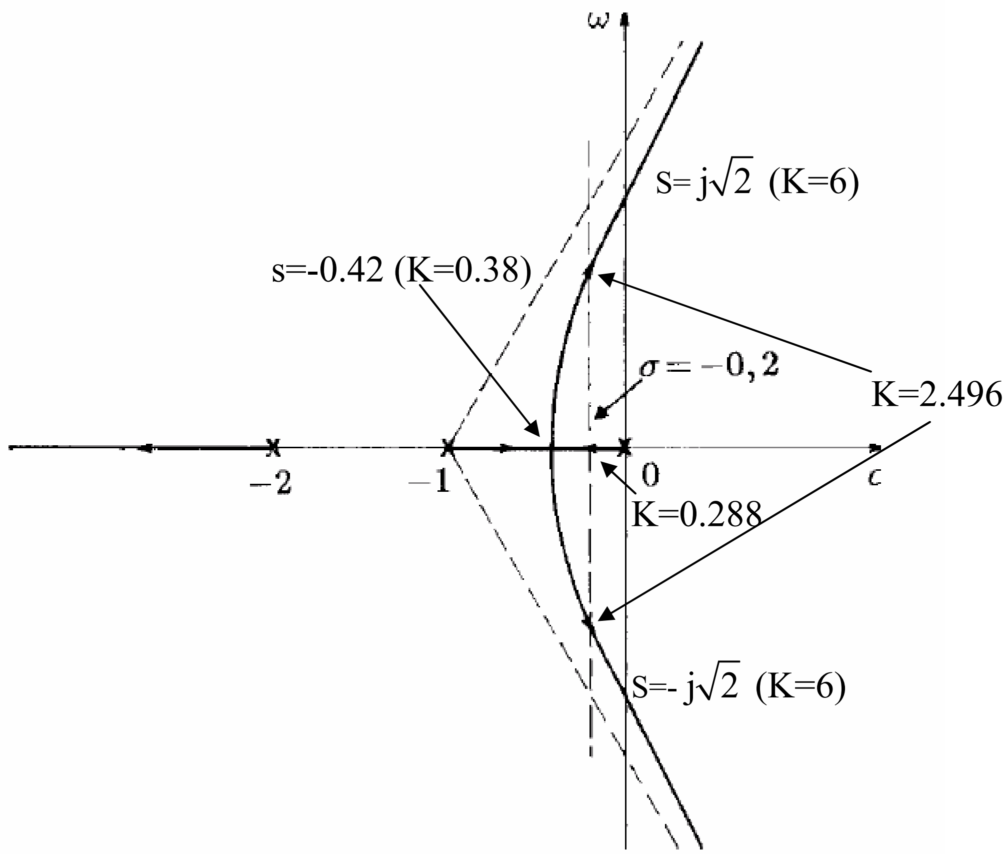
Il luogo ha evidentemente un punto doppio di diramazione o emergenza sull'asse reale, che è un punto di massimo locale per il guadagno K. Tale radice doppia si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{ds}G(s)H(s) = 0 \Leftrightarrow 3s^2 + 6s + 2 = 0$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Essa ha due soluzioni reali, una delle quali non appartiene al luogo. L'altra, che costituisce il punto di diramazione cercato, è in s=-0.42. Sostituendo tale valore nell'equazione caratteristica si ottiene il corrispondente valore del guadagno

$$K = -\left.\frac{1}{G(s)H(s)}\right|_{s=-0.42} = -s(s+1)(s+2)\big|_{s=-0.42} \simeq 0.38 .$$



Osserviamo che il sistema in anello chiuso è condizionatamente stabile: all'aumentare del guadagno K il sistema diventa instabile, poiché due dei tre rami del luogo delle radici si spostano dal semipiano sinistro a quello destro nel piano di Gauss.

Individuiamo tale limite di stabilità applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica vale:

$$s(s+1)(s+2) + K = 0$$

ossia

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$s^3 + 3s^2 + 2s + K = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 3 & K \\ s^1 & 6-K & \\ s^0 & K & \end{array}$$

Si osserva che per K=6 si annulla una riga dispari della tabella, preceduta da una permanenza. Si ha dunque un polo in anello chiuso reale negativo e due radici aggiuntive che soddisfano l'equazione ausiliaria:

$$3s^2 + K = 0\text{, con K=6}$$

ossia disposte in

$$s = \pm j\sqrt{2}\,.$$

Si conclude che il sistema è asintoticamente stabile per 0<K<6 (con radici tutte reali per 0<K≤0.38 e complesse e coniugate per 0.38<K<6), semplicemente stabile per K=6 (con una radice reale negativa e due immaginarie pure) e instabile per K>6 (con una radice reale negativa e due complesse e coniugate a parte reale positiva).

Il procedimento indicato può servire anche per determinare le intersezioni del luogo delle radici con una retta verticale s=-σ diversa dall'asse immaginario, semplicemente utilizzando il metodo di Routh traslato. Calcoliamo ad esempio le intersezioni del luogo delle radici con la retta verticale s=-0.2. Ponendo z=s+0.2 e sostituendo s=z-0.2 si ha il nuovo polinomio caratteristico

$$z^3 + 2.4z^2 + 0.92z + (K - 0.288) = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} z^3 & 1 & 0.92 \\ z^2 & 2.4 & K-0.288 \\ z^1 & 2.496-K & \\ z^0 & K-0.288 & \end{array}$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Si osserva che per K=0.288 si hanno due permanenze e si annulla la riga zero. In altre parole, il luogo nel piano z passa per l'origine e per due poli a parte reale negativa: a questa situazione corrisponde nel piano s un polo in s=-0.2 e due poli reali negativi che si calcolano dividendo il polinomio caratteristico per il polinomio (s+0.2).

Inoltre, per K=2.496 si ha una permanenza e si annulla la riga uno nella tabella di Routh. In altre parole, il luogo nel piano z passa per l'asse immaginario e per un terzo polo reale negativo. Le radici sull'asse immaginario del piano z si individuano risolvendo l'equazione ausiliaria

$$2.4z^2 + K - 0.288 = 0 \text{, con K=2.496}$$

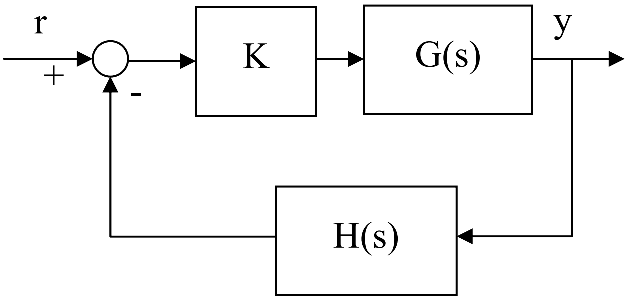
e si trova

$$z = \pm j\sqrt{0.96}\,.$$

A questa situazione per K=2.496 corrisponde nel piano s una coppia di poli in $s = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$ e un terzo polo reale negativo che si può calcolare dividendo il polinomio caratteristico per il polinomio $(s+0.2)^2 + 0.96$.

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:



$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}\text{, K>0.}$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+4)}{s(s+3)} = 0\text{, K>0.}$$

Il luogo ha n=2 rami, che partono dai poli in anello aperto s=0, s=-3 e giungono uno nello zero in s=-4 e l'altro in uno zero all'infinito secondo la direzione asintotica.

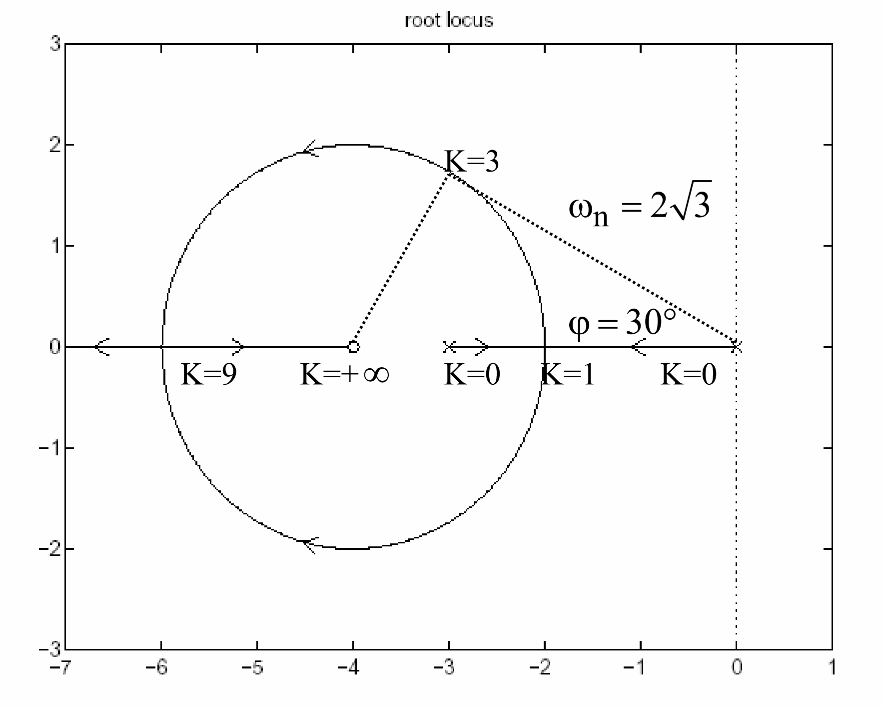
Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Inoltre fa parte del luogo l'insieme dei punti sull'asse reale $]-\infty,-4]\cup[-3,0]$. Perciò gli angoli di partenza dai poli in anello aperto s=-3 e s=0 sono rispettivamente 0 e π, mentre l'angolo di arrivo nello zero s=-4 è π. Tali risultati si possono verificare applicando le formule viste in precedenza.

Si ha un unico asintoto, di cui quindi non interessa il centro stella ma la sola direzione asintotica, che vale

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{1} = \pi .$$

Tale risultato era prevedibile, poiché la semiretta $]-\infty,-4]$ appartiene al luogo.



Il luogo ha chiaramente un punto doppio di emergenza sull'asse reale, che è un punto di massimo locale per il guadagno K, nonché un punto doppio di confluenza sull'asse reale, che è un punto di minimo locale per il guadagno K. Tali radici doppie si ottengono come segue:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+4}{s(s+3)}\right) = 0 \Leftrightarrow s(s+3)-(s+4)(2s+3) = 0 \Leftrightarrow s^2+8s+12 = 0 .$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Tale equazione ha due soluzioni reali, che appartengono entrambe al luogo, in s=-6 e s=-2. Sostituendo tali valori nell'equazione caratteristica si ottengono i corrispondenti valori del guadagno K:

$$K = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-2} = -\left.\frac{s(s+3)}{(s+4)}\right|_{s=-2} = 1,\ K = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-6} = -\left.\frac{s(s+3)}{(s+4)}\right|_{s=-6} = 9\,.$$

Osserviamo che il sistema è sempre asintoticamente stabile per K positivo, poiché il luogo è tutto contenuto nel semipiano sinistro.

In particolare, per 0<K<1 si hanno due radici reali negative distinte comprese rispettivamente negli intervalli $]-3,-2[$ e $]-2,-0[$; per K=1 si hanno due radici coincidenti in s=-2; per 1<K<9 si hanno due radici complesse e coniugate con parte reale compresa tra -6 e -2 e parte immaginaria inferiore a 2; per K=9 si hanno due radici coincidenti in s=-6; infine per K>9 si hanno due radici reali negative distinte, di cui una dominante compresa nel segmento $]-6,-4[$ e l'altra tendente all'infinito disposta sulla semiretta $]-\infty,-6[$.

Verifichiamo ora che i rami del luogo non intersecano mai l'asse immaginario applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica vale:

$$s(s+3) + K(s+4) = 0$$

ossia

$$s^2 + (3+K)s + 4K = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 4K \\ s^1 & 3+K & \\ s^0 & 4K & \end{array}$$

Si osserva che per K positivo non si annulla alcuna riga della tabella, che comprende solo permanenze nella prima colonna: si verifica ancora che il sistema è sempre asintoticamente stabile per K>0. Ovviamente per K=0 si ha una permanenza e si annulla la riga zero. In altre parole, il luogo passa per l'origine e per un polo reale

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

negativo: questi sono proprio i poli in anello aperto del sistema (s=0, s=-3), che corrispondono alla situazione K=0.

Osserviamo che è possibile dimostrare come i due rami del luogo fuoriescano dall'asse reale e si congiungano su di esso sempre lungo un tratto di circonferenza, che ha raggio 2 (si veda la figura).

Dunque il minimo valore di coefficiente di smorzamento δ dei poli in anello chiuso ottenuto per poli complessi e coniugati (cioè per 1<K<9) si ottiene tracciando la tangente alla circonferenza dall'origine degli assi. Si ha così un angolo massimo

$$\varphi = \arcsin\frac{2}{4} = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

cui corrisponde un coefficiente di smorzamento minimo dei poli in anello chiuso

$$\delta = \cos\varphi = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866\,.$$

Tali poli hanno poi pulsazione naturale data dalla distanza degli stessi dall'origine, facilmente calcolabile in modo grafico come

$$\omega_n = 4\cos\varphi = 2\sqrt{3} \simeq 3.46\,.$$

Si hanno in tal caso due poli in anello chiuso in

$$s = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -3 \pm j\sqrt{3}\,.$$

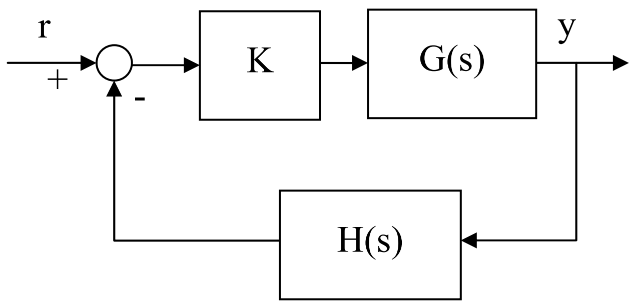
Essi dunque corrispondono ad un valore del guadagno

$$K = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=-3+j\sqrt{3}} = -\left.\frac{s(s+3)}{(s+4)}\right|_{s=-3+j\sqrt{3}} = 3\,.$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:



$$KG(s)H(s) = \frac{K}{s^2 + 4s + 5}, \ K>0.$$

Il sistema in anello aperto ha due poli complessi e coniugati in s=-2±j. Il luogo ha n=2 rami, che partono dai poli in anello aperto s=-2±j e giungono negli n-m=2 zeri all'infinito secondo gli asintoti. Questi si intersecano nel centro stella, di valore

$$\sigma_a = \frac{\sum_{1=1}^{n} p_i - \sum_{1=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{-2-j-2+j}{2-0} = -2$$

ed hanno le direzioni asintotiche

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{2} = \begin{matrix} \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \end{matrix}$$

ossia di 90 e 270 gradi.

Inoltre nessun punto dell'asse reale appartiene al luogo, quindi non ci sono punti doppi sull'asse reale.

I due rami del luogo sono simmetrici e si dipartono dai punti complessi $s = -2 \pm j$ con angoli

$$\varphi_{p_i} = (2\nu+1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \sphericalangle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sphericalangle(p_i - p_j), \ \nu=0,1,\ldots,n-m-1$$

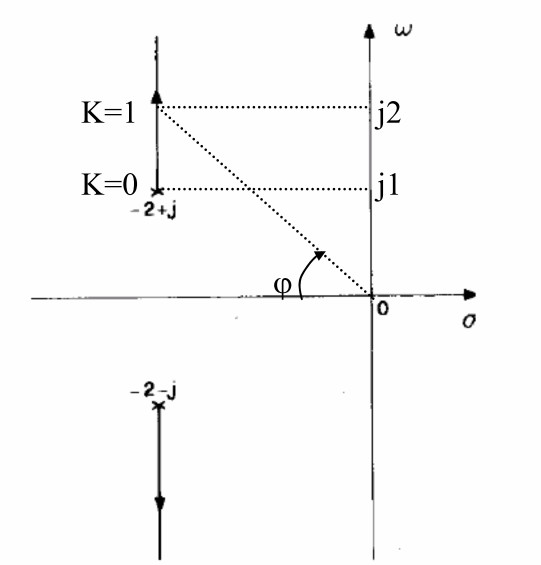
In particolare, l'angolo di partenza dal polo -2+j vale

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\varphi_p = (2\nu + 1)\pi - \arg\left(-2 + j - (-2 - j)\right) = \pi - \arg\left(2j\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

ossia è di 90°, mentre l'altro vale, per simmetria, -90°.

In definitiva, il luogo coincide con due semirette, e i poli in anello chiuso hanno sempre parte reale -2.



Tale risultato era prevedibile osservando che l'equazione caratteristica vale:

$$1 + KG(s) = 0$$

ossia

$$1 + \frac{K}{s^2 + 4s + 5} = 0$$

da cui

$$s^2 + 4s + 5 + K = 0$$

che ha soluzioni

$$s_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4 - 5 - K} = -2 \pm j\sqrt{K + 1}\,.$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Osserviamo che il sistema è sempre asintoticamente stabile per K positivo, poiché il luogo è tutto contenuto nel semipiano sinistro del piano s. Infatti i poli in anello chiuso hanno sempre parte reale negativa (pari a -2).

Verifichiamo ora la asintotica stabilità del sistema con il criterio di Routh. Si ha la seguente tabella di Routh.

$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1 & 5+K \\
s^1 & 4 & \\
s^0 & 5+K &
\end{array}
$$

Si osserva che per K positivo si hanno sempre due permanenze sulla prima colonna della tabella, dunque il sistema è sempre asintoticamente stabile, come previsto.

Vogliamo ora calcolare, utilizzando il luogo delle radici, il valore del guadagno K per il quale il sistema in anello chiuso ha una massima sovraelongazione percentuale pari al 5%. Questo è un valore notevole, per il quale il coefficiente di smorzamento δ dei poli in anello chiuso vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$. In tal caso si ha un angolo

$$\varphi = \mathrm{ar}\cos\delta = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Tali poli hanno poi pulsazione naturale data dalla distanza degli stessi dall'origine, facilmente calcolabile in modo grafico come

$$\omega_n = \frac{2}{\cos\varphi} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,.$$

Si hanno così due poli del sistema in

$$s = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}2\sqrt{2} \pm j2\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = -2 \pm j2\,.$$

Essi dunque corrispondono ad un valore del guadagno

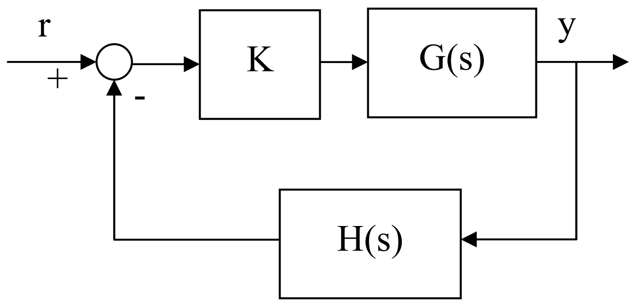
Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

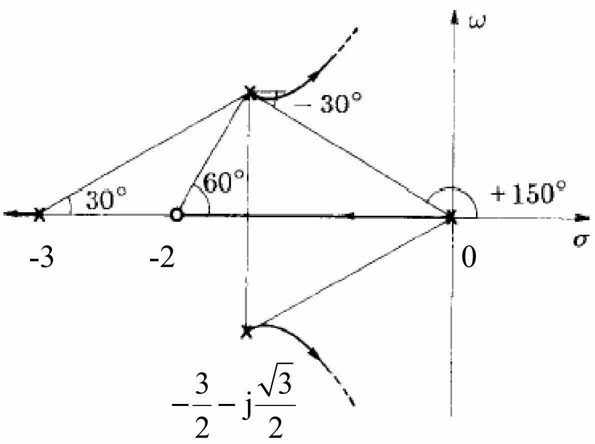
$$K = -\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=-2+j2} = -\left(s^2 + 4s + 5\right)\Big|_{s=-2+j2} = 1.$$

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:

$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+3)(s^2+3s+3)}, \text{ K>0.}$$





Il luogo comprende n=4 rami, che descrivono la posizione degli n=4 poli in anello chiuso al variare del guadagno K positivo. Essi partono dagli n=4 poli in anello aperto (s=0, s=-3, $s = -\frac{3}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$) e giungono uno nell'unico zero al finito (s=-2) del guadagno di anello e gli altri n-m=4-1=3 in tre punti all'infinito secondo le direzioni asintotiche.

Inoltre fa parte del luogo l'insieme dei punti sull'asse reale $]-\infty,-3] \cup [-2,0]$. Perciò gli angoli di partenza dai poli in anello aperto s=0 e s=-3 sono pari a π, mentre l'angolo di arrivo nello zero in anello aperto s=-2 vale 0.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Quindi dei quattro rami del luogo due sono disposti sull'asse reale: uno parte dall'origine per K=0 e giunge in s=-2 per K=+∞, mentre l'altro parte da s=-3 per K=0 e giunge in s=-∞ per K=+∞.

Gli altri due rami sono simmetrici, per via della proprietà 2, e si dipartono dai punti complessi $s=-\frac{3}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Di questi quello in $s=-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$ parte da tale punto con angolo

$$\varphi_p=(2\nu+1)\pi+\arg\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-(-2)\right)-\arg\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-(0)\right)-$$
$$-\arg\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-(-3)\right)-\arg\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=$$
$$=\pi+\arg\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arg\left(-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arg\left(\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\arg\left(j\sqrt{3}\right)=$$
$$=\pi+\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\left(\pi-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)-\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{\pi}{2}=\mathrm{arctg}\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}=$$
$$=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{6}(-30°)$$

e l'altro ramo parte, per simmetria (proprietà 2), con angolo $-\varphi_p=\frac{\pi}{6}(30°)$ da $s=-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tre dei quattro rami tendono agli asintoti, che si intersecano nel centro stella di valore

$$\sigma_a=\frac{0-3-\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}-(-2)}{4-1}=\frac{-3-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2}{3}=-\frac{4}{3}$$

ed hanno le direzioni asintotiche

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{3} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \pi \\ \frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

ossia di 60, 180 e 300 gradi.

Pertanto uno dei rami coincide con la semiretta $]-\infty,-3]$, un secondo ramo con il segmento $[-2,0]$ e gli altri due rami partono dai poli complessi e coniugati con angolo di ±30° e giungono all'infinito secondo le direzioni asintotiche.

Il luogo evidentemente non presenta punti doppi di diramazione o emergenza sull'asse reale, come è possibile mostrare risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{ds} G(s)H(s) = 0$$

e mostrando che nessuna delle sue soluzioni reali appartiene al luogo.

Osserviamo che il sistema è condizionatamente stabile: all'aumentare del guadagno K il sistema diventa instabile, infatti due dei quattro rami del luogo delle radici si spostano dal semipiano sinistro a quello destro nel piano di Gauss. Individuiamo tale limite di stabilità applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica vale:

$$1 + \frac{K(s+2)}{s(s+3)(s^2+3s+3)} = 0$$

ossia

$$s^4 + 6s^3 + 12s^2 + (9+K)s + 2K = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 12 & 2K \\
s^3 & 6 & 9+K & \\
s^2 & 63-K & 12K & \\
s^1 & -\dfrac{K^2+18K-567}{63-K} & & \\
s^0 & 2K & &
\end{array}
$$

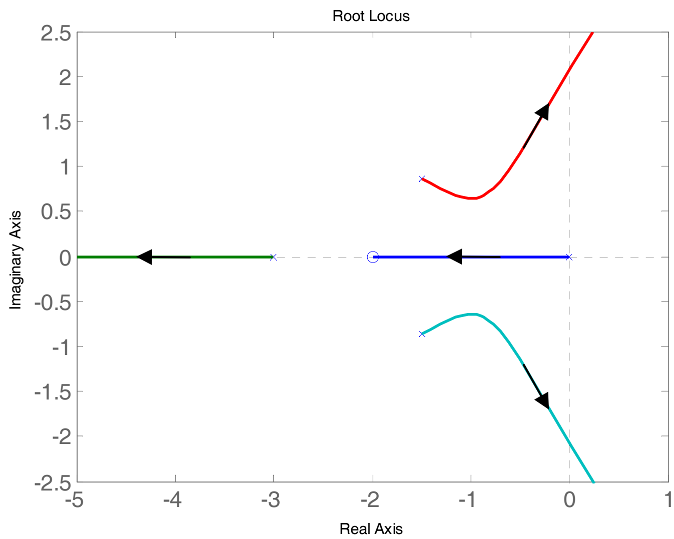
Si osserva che per K=16.46 si annulla una riga dispari della tabella (l'altro valore che la annulla è negativo e quindi viene trascurato), preceduta da due permanenze. Si hanno dunque due poli in anello chiuso a parte reale negativa e due radici aggiuntive che soddisfano l'equazione ausiliaria:

$$\left.(63-K)s^2+12K\right|_{K=16.46}=0$$

ossia disposte in

$$s=\pm j2.06\,.$$

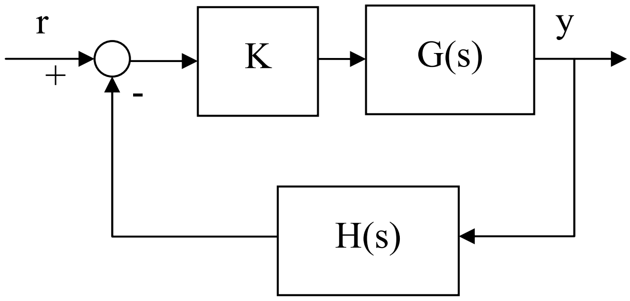
Si conclude che il sistema è asintoticamente stabile per $0<K<16.46$ (con due radici reali negative e due complesse e coniugate a parte reale negativa), semplicemente stabile per K=16.46 (con due radici reali negative e due immaginarie pure) e instabile per $K>16.46$ (con due radici reali negative e due complesse e coniugate a parte reale positiva).



Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:



$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+2}, \text{ K>0.}$$

Il sistema in anello aperto ha due poli complessi e coniugati in s=-1±j e uno zero in s=-2. Il luogo ha n=2 rami, che partono dai poli in anello aperto s=-1±j e giungono uno nello zero s=-2 e l'altro nell'unico zero all'infinito secondo un asintoto. Questo ha direzione asintotica

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{2} = \pi$$

ossia di 180 gradi.

Inoltre i punti dell'asse reale $]-\infty,-2]$ appartengono al luogo. Perciò l'angolo di arrivo nello zero s=0 vale π.

C'è quindi un punto doppio sull'asse reale di confluenza dei due rami del luogo. Calcoliamolo applicando la proprietà:

$$\frac{dG(s)H(s)}{ds} = 0.$$

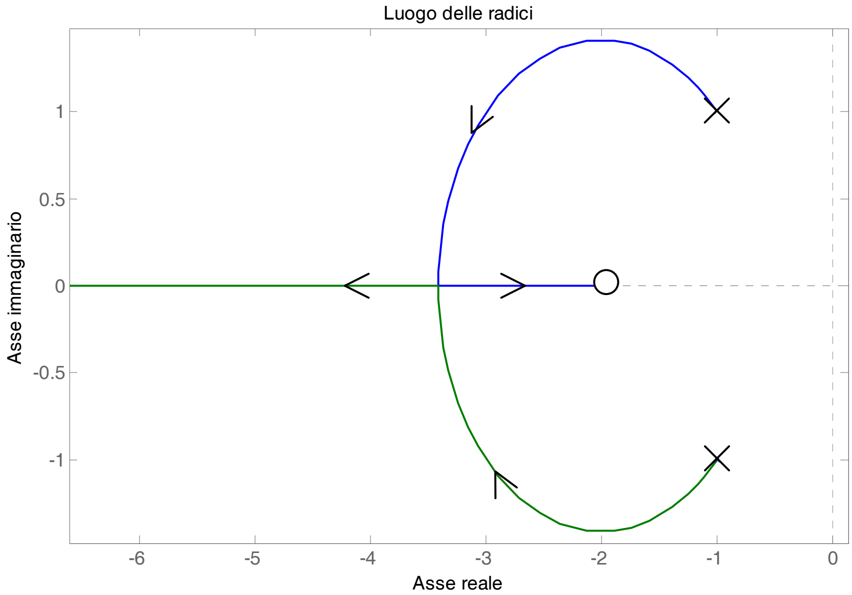
Si ha quindi

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{s+2}{s^2+2s+2}\right) = \frac{(s^2+2s+2)-(s+2)(2s+2)}{\left(s^2+2s+2\right)^2} = \frac{-s^2-4s-2}{\left(s^2+2s+2\right)^2} = 0$$

da cui

$$s^2+4s+2 = 0 \Leftrightarrow s = -2 \pm \sqrt{4-2} = -2 \pm \sqrt{2}\,.$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.



Di queste due soluzioni solo il punto $s=-2-\sqrt{2}\simeq-3.41$ appartiene al luogo. In corrispondenza di tale radice doppia si ha un guadagno

$$K=-\frac{1}{G(s)}\bigg|_{s=-2-\sqrt{2}}=-\frac{s^2+2s+2}{s+2}\bigg|_{s=-2-\sqrt{2}}=-\frac{4+2+4\sqrt{2}-4-2\sqrt{2}+2}{-\sqrt{2}}=2\sqrt{2}+2\simeq 4.83\cdot$$

Calcoliamo ora tale radice doppia reale e il corrispondente valore del guadagno con il metodo alternativo della taratura del luogo. Si ha

$$K=-\frac{1}{G(s)}=-\frac{s^2+2s+2}{s+2}.$$

Poiché sappiamo che la radice doppia cercata è sull'asse reale e corrisponde ad un punto di confluenza, essa è di minimo locale per K. Essa si trova inoltre sulla semiretta $]-\infty,-2]$. Costruiamo dunque la seguente tabella di taratura.

s	K
-2.5	6.50
-3	5.00
-3.5	4.83
-4	5.00

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Dalla tabella si evince che un punto di minimo locale si ottiene approssimativamente per K=4.83 e s=-3.5, valori che corrispondono a quelli individuati analiticamente.

I due rami del luogo sono simmetrici e si dipartono dai punti complessi $s = -1 \pm j$ con angoli

$$\varphi_{p_i} = (2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \sphericalangle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \sphericalangle(p_i - p_j),\ \nu=0,1,\ldots,n\text{-}m\text{-}1.$$

In particolare, l'angolo di partenza dal polo -1+j vale

$$\varphi_p = (2\nu + 1)\pi + \arg\left(-1 + j - (-2)\right) - \arg\left(-1 + j - (-1 - j)\right) =$$
$$= \pi + \arg\left(1 + j\right) - \arg\left(2j\right) = \pi + \mathrm{arctg}1 - \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

ossia è di 135°, mentre l'altro vale, per simmetria, -135°.

Osserviamo che il sistema è sempre asintoticamente stabile per K positivo, poiché il luogo è tutto contenuto nel semipiano sinistro.

In particolare, per 0<K<4.83 si hanno due radici complesse e coniugate con parte reale negativa compresa tra -3.41 e -1, per K=4.83 si hanno due radici coincidenti in s=-3.41, mentre per K>4.83 si hanno due radici reali negative distinte, di cui una dominante compresa nel segmento $]-3.41, -2[$ e l'altra tendente all'infinito disposta sulla semiretta $]-\infty, -3.41[$.
Verifichiamo ora che i rami del luogo non intersecano mai l'asse immaginario applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica vale:

$$s^2 + 2s + 2 + K(s + 2) = 0$$

ossia

$$s^2 + (2 + K)s + (2 + 2K) = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

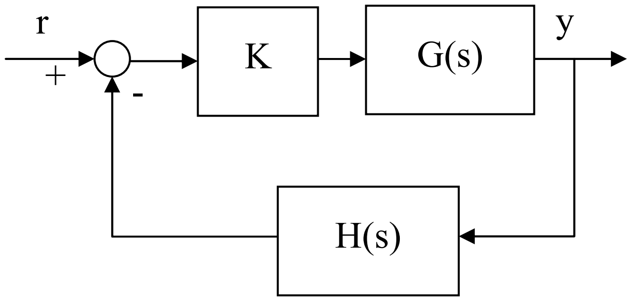
$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & 1 & 2+2K \\
s^1 & 2+K & \\
s^0 & 2+2K &
\end{array}
$$

Si osserva che per K positivo non si annulla alcuna riga della tabella, quindi non vi sono intersezioni del luogo con l'asse immaginario. Poiché il luogo si svolge tutto nel semipiano sinistro, il sistema è sempre asintoticamente stabile per K>0, come previsto con il criterio di Routh (la tabella di Routh comprende solo permanenze nella prima colonna).

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:

$$KG(s)H(s) = \frac{Ks}{s^2 - 4s + 6},\ K>0.$$



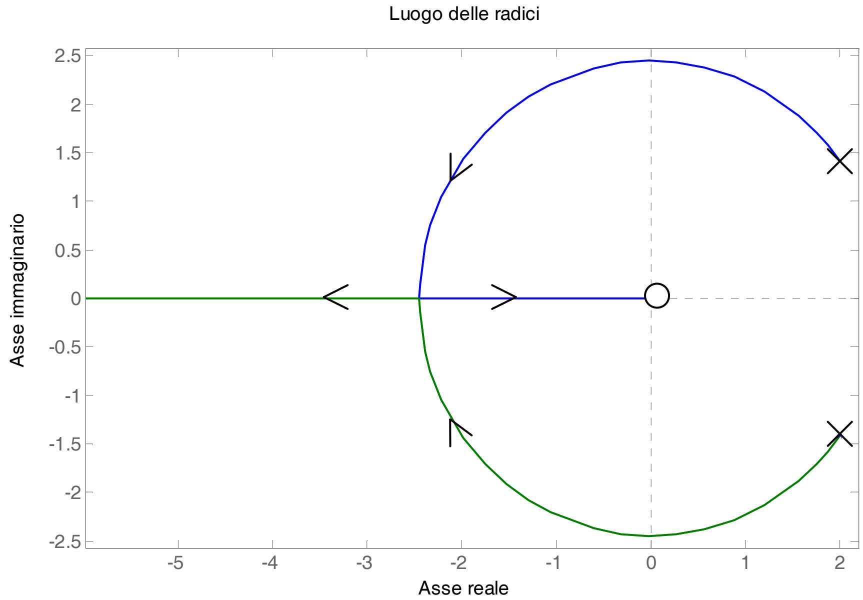
Il luogo ha n=2 rami, che partono dai poli in anello aperto $s = 2 + j\sqrt{2}$ e $s = 2 - j\sqrt{2}$ e giungono uno nello zero s=0 e l'altro nell'unico zero all'infinito, quest'ultimo secondo la sola direzione asintotica

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{1} = \pi$$

ossia di 180 gradi.

Inoltre fa parte del luogo l'insieme dei punti sull'asse reale]-∞,0]. Perciò l'angolo di arrivo nello zero s=0 vale π.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.



Il luogo ha evidentemente un punto doppio di confluenza sull'asse reale, che è un punto di minimo locale per il guadagno K. Tale radice doppia si ottiene risolvendo l'equazione

$$\frac{d}{ds}\big(KG(s)H(s)\big)=0 \Rightarrow \frac{d}{ds}\left(\frac{Ks}{s^2-4s+6}\right)=0$$

da cui

$$\frac{\left(s^2-4s+6\right)-s(2s-4)}{\left(s^2-4s+6\right)^2}=\frac{-s^2+6}{\left(s^2-4s+6\right)^2}=0$$

Essa ha due soluzioni reali, una delle quali non appartiene al luogo. L'altra, che costituisce il punto di diramazione cercato, è $s=-\sqrt{6}\simeq-2.45$. Sostituendo tale valore nell'equazione caratteristica si ottiene il corrispondente valore del guadagno

$$K=-\left.\frac{1}{G(s)H(s)}\right|_{s=-2.45}=-\left.\frac{s^2-4s+6}{s}\right|_{s=-2.45}\simeq 8.90.$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

I due rami del luogo sono simmetrici e si dipartono dai punti complessi $s = 2 \pm j\sqrt{2}$ con angoli

$$\varphi_{p_i} = (2\nu+1)\pi + \sum_{j=1}^{m} \sphericalangle(p_i - z_j) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \sphericalangle(p_i - p_j),\ \nu=0,1,\ldots,n\text{-}m\text{-}1.$$

In particolare, l'angolo di partenza dal polo $s = 2 + j\sqrt{2}$ vale

$$\varphi_p = (2\nu+1)\pi + \arg\left(2 + j\sqrt{2} - (0)\right) - \arg\left(2 + j\sqrt{2} - (2 - j\sqrt{2})\right) =$$
$$= \pi + \arg\left(2 + j\sqrt{2}\right) - \arg\left(2\sqrt{2}j\right) = \pi + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} \simeq \frac{\pi}{2} + 0.62 \simeq 2.19$$

ossia è di circa 125°, mentre l'altro vale, per simmetria, -125°.

Osserviamo che il sistema è condizionatamente stabile: all'aumentare del guadagno K il sistema, che in anello aperto è instabile, diventa asintoticamente stabile, infatti i due rami del luogo delle radici si spostano dal semipiano destro a quello sinistro nel piano di Gauss. Tale effetto, diverso da quello usuale (normalmente all'aumentare del guadagno il sistema tende alla instabilità), è dovuto alla presenza dello zero nell'origine, che stabilizza il sistema bilanciando la presenza dei due poli instabili in anello aperto.

Individuiamo tale limite di stabilità applicando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica vale:

$$s^2 + (K-4)s + 6 = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 6 \\ s^1 & K\text{-}4 & \\ s^0 & 6 & \end{array}$$

Si osserva che per K=4 si annulla una riga dispari della tabella. I due poli in anello chiuso soddisfano dunque l'equazione:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$s^2 + 6 = 0$$

e sono quindi disposte in

$$s = \pm j\sqrt{6}\,.$$

Ciò era evidente, poiché il tratto di circonferenza del luogo che confluisce sull'asse reale ha proprio raggio $\sqrt{6}$ e centro nell'origine.

Si conclude che il sistema è instabile per 0<K<4 (con radici complesse e coniugate aventi parte reale inferiore a 2 e parte immaginaria variabile con K tra $\sqrt{2}$ e $\sqrt{6}$), semplicemente stabile per K=4 (con due poli immaginari puri in $\pm j\sqrt{6}$) e asintoticamente stabile per K>4. In quest'ultimo caso per 4<K<8.90 si hanno radici complesse e coniugate aventi parte reale inferiore in modulo a 2.45 e parte immaginaria inferiore a $\sqrt{6}$, per K=8.90 si hanno due radici reali coincidenti in s=-2.45, mentre per K>8.90 si hanno due radici reali negative distinte, di cui una dominante compresa tra -2.45 e 0 e un'altra lontana.

Supponiamo ora che sia richiesta in anello chiuso una risposta in anello chiuso oscillatoria smorzata con costante di tempo di circa 0.5 secondi. In tal caso si richiede che i poli siano complessi coniugati e che valga la relazione:

$$\tau = \frac{1}{\delta\omega_n} = \frac{1}{2}$$

per cui i poli in anello chiuso devono avere parte reale pari a -2.

Risolviamo il problema calcolando l'intersezione del luogo delle radici con la retta verticale s=-2. Ponendo z=s+2 e sostituendo s=z-2 nell'equazione caratteristica si ha il nuovo polinomio caratteristico

$$z^2 + (K - 8)z + (18 - 2K) = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

z^2	1	18-2K
z^1	K-8	
z^0	18-2K	

Si osserva che per K=9 si ha una permanenza e si annulla la riga zero. In altre parole, il luogo nel piano z passa per l'origine e per un polo reale negativo: a questa situazione corrisponde nel piano s un polo in s=-2 e un altro polo reale negativo (in s=-3).

Inoltre, per K=8 si annulla la riga uno. In particolare, il luogo nel piano z passa per l'asse immaginario. È dunque questa la condizione cercata. Le radici sull'asse immaginario del piano z si individuano risolvendo l'equazione ausiliaria

$$z^2 + 18 - 2K = 0, \text{ con K=8}$$

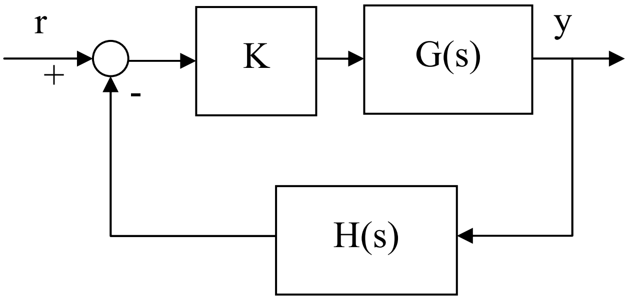
e si trova

$$z = \pm j\sqrt{2}.$$

Il valore del guadagno richiesto è dunque K=8, al quale corrisponde nel piano s una coppia di poli in $s = -2 \pm j\sqrt{2}$, quindi un tempo di assestamento al 2% di circa 2 secondi, come richiesto nelle specifiche di progetto.

ESEMPIO

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, con guadagno di anello:



$$KG(s)H(s) = \frac{K(s+3)}{(s^3 + 11s^2 + 10s)}, \text{ K>0.}$$

Il luogo ha n=3 rami, che partono dai poli in anello aperto s=0, s=-1 e s=-10 e giungono uno nello zero s=3 e i rimanenti n-m=2 nei due zeri all'infinito, secondo gli asintoti. Questi si intersecano nel centro stella, di valore

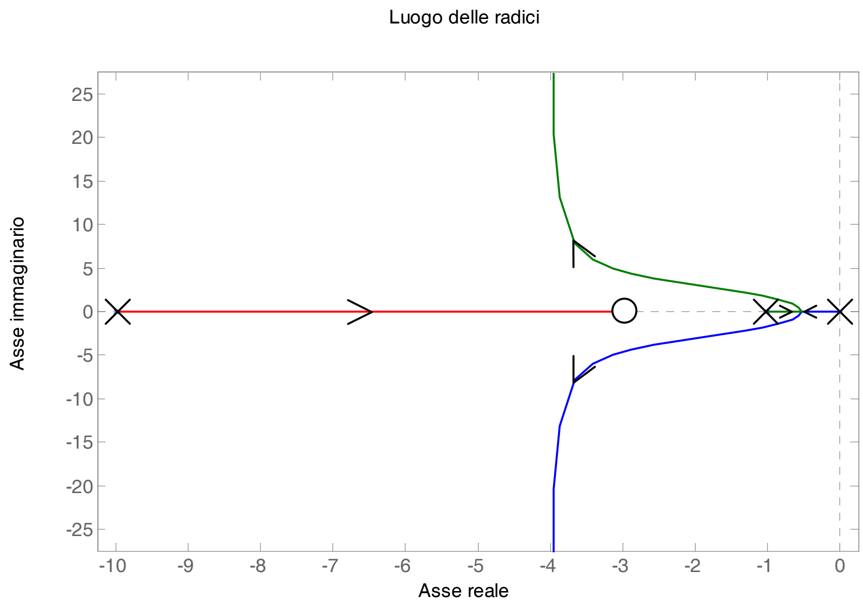
Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$\sigma_a = \frac{\sum_{1=1}^{n} p_i - \sum_{1=1}^{m} z_i}{n-m} = \frac{0-1-10+3}{3-1} = -4$$

ed hanno le direzioni asintotiche

$$\theta_{a,\nu} = \frac{(2\nu+1)\pi}{n-m} = \frac{(2\nu+1)\pi}{2} = \begin{matrix} \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{3\pi}{2} \end{matrix}$$

Inoltre fa parte del luogo l'insieme dei punti sull'asse reale $]-10,-3] \cup [-1,0]$. Perciò l'angolo di arrivo nello zero s=-3 vale π, mentre gli angoli di partenza dai poli s=0, s=-1 e s=-10 valgono rispettivamente π, 0, 0.



Il luogo ha evidentemente un punto doppio di emergenza sull'asse reale, che è un punto di massimo locale per il guadagno K. Tale radice doppia e il corrispondente valore del guadagno si possono calcolare con il metodo della taratura. Si ha

$$K = -\frac{1}{G(s)} = -\frac{(s^3+11s^2+10s)}{(s+3)}.$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Sappiamo che la radice doppia cercata è sull'asse reale nell'intervallo [-1,0] e corrisponde ad un punto di massimo locale per K. Costruiamo quindi la seguente tabella di taratura.

s	K
-0.8	0.67
-0.6	0.94
-0.5	0.95
-0.45	0.93
-0.4	0.88

Dalla tabella si evince che il punto di massimo locale sull'asse reale si ottiene per K=0.95 e s=-0.5.

Concludiamo che il sistema è sempre asintoticamente stabile, poiché per ogni valore del guadagno K i rami del luogo si trovano nel semipiano sinistro del piano s.

Verifichiamo che non ci sono intersezioni con l'asse immaginario applicando il criterio di Routh: non deve annullarsi alcuna riga della tabella di Routh. L'equazione caratteristica vale:

$$s^3 + 11s^2 + (10 + K)s + 3 = 0$$

cui corrisponde la seguente tabella di Routh.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10+K \\ s^2 & 11 & 3 \\ s^1 & 107+11K & \\ s^0 & 3 & \end{array}$$

In effetti al variare di K nessuna riga si annulla nella tabella e sulla prima colonna vi sono solo permanenze.

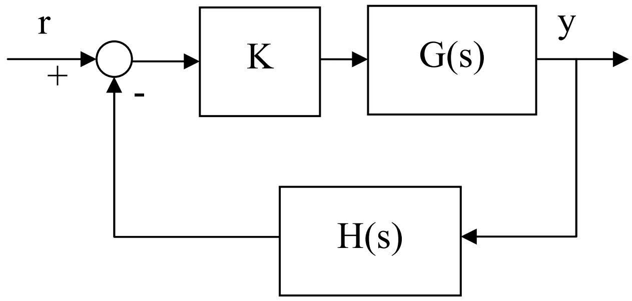
Si conclude che il sistema è sempre asintoticamente stabile per K positivo. In particolare, per 0<K<0.95 si hanno due radici reali negative distinte nell'intervallo]-1,0[e una terza radice reale negativa nell'intervallo]-10,-3[. Per K=0.95 si hanno due radici reali coincidenti in s=-0. 5 e un terzo polo nell'intervallo]-10,-3[. Infine,

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

per K>0.95 si hanno due radici complesse e coniugate con parte reale variabile con K tra -0.5 e -4 e un terzo polo ancora nell'intervallo]-10,-3[.

ESERCIZI AGGIUNTIVI

Individuare qualitativamente il luogo delle radici del sistema chiuso in retroazione in figura, nei seguenti due casi:



1. $KG(s)H(s)=\dfrac{K(s^2+1)}{(s+1)(s-1)}$, K>0.

2. $KG(s)H(s)=\dfrac{Ks(s-1)}{(s+2)(s+3)}$, K>0.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.