FUNZIONE DI TRASFERIMENTO

Molti sistemi dinamici SISO (Single Input – Single Output) possono essere rappresentati da modelli *lineari e tempoinvarianti* per mezzo di equazioni differenziali lineari e a coefficienti costanti, che esprimono una relazione fra la variabile di ingresso x (forzante) e la variabile di uscita y (risposta) insieme alle loro derivate rispetto al tempo:

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) =$$
$$= b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t)$$

o, con notazione più compatta

$$a_0 y(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i D^i x(t)$$

dove si è posto

$$D^i y(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^i}.$$

Si osserva che per l'integrazione dell'equazione differenziale, ossia per la determinazione dell'uscita y(t) noto l'ingresso x(t), devono essere note le condizioni iniziali:

$$y(0), y^{(1)}(0), \dots, y^{(n-1)}(0).$$

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale che modella il sistema e applicando la proprietà di trasformazione del differenziale nel tempo si ottiene la relazione:

$$a_0 \cdot Y(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \left(s^i Y(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^j \cdot \left(D^{i-j-1} y(t) \right)_{t=0-} \right) = \sum_{i=0}^{n} b_i \cdot s^i X(s)$$

in cui con X(s) e Y(s) si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita x(t) e y(t) e si è supposto x(t) causale. Si ha quindi:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i Y(s) = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i X(s) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j \cdot \left(D^{i-j-1} y(t)\right)_{t=0-} .$$

La trasformata secondo Laplace di y(t) è dunque la somma di due termini:

$$Y(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i} X(s) + \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{i-1} s^j \cdot \left(D^{i-j-1} y(t)\right)_{t=0-}}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i}$$

ossia, ponendo

$$Y_F(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i} X(s), \; Y_L(s) = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=0}^{i-1} s^j \cdot \left(D^{i-j-1} y(t)\right)_{t=0-}}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i},$$

$$Y(s) = Y_F(s) + Y_L(s)$$

e antitrasformando

$$y(t) = y_F(t) + y_L(t) .$$

La risposta del sistema è dunque la somma di due contributi. Il primo è indipendente dalle condizioni iniziali e dipende solo dall'ingresso (risposta forzata): si ottiene quando al sistema è applicato un ingresso e le condizioni iniziali sono nulle. Il secondo è indipendente dal segnale forzante e dipende solo dalle condizioni iniziali (risposta libera): è l'evoluzione dinamica del sistema privo di ingresso con condizioni iniziali non nulle.

In definitiva, la linearità del modello implica che l'evoluzione della risposta forzata e della risposta libera possano essere determinate *indipendentemente* e poi sovrapposte.

In particolare, risulta

$$Y_F(s) = G(s) \cdot X(s)$$

dove si è posto

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i}.$$

Esaminiamo ora proprio il caso in cui il sistema evolva a partire da una condizione di quiete, ossia con condizioni iniziali tutte nulle: in tal caso la risposta y(t) coincide con la risposta forzata e la sua trasformata vale:

$$Y(s) = Y_F(s) = G(s) \cdot X(s)$$

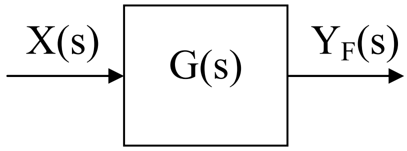
con

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i}.$$

Osserviamo che la funzione razionale fratta G(s) caratterizza il sistema, cioè fornisce la trasformata secondo Laplace dell'uscita forzata nota la trasformata secondo Laplace dell'ingresso.

G(s) è detta *funzione di trasferimento* (fdt) del sistema ed è definibile anche come il rapporto tra la trasformata di Laplace dell'uscita forzata e quella dell'ingresso corrispondente, qualsiasi sia quest'ultimo, applicato con condizioni iniziali nulle:

$$G(s) = \frac{Y_F(s)}{X(s)}.$$



In definitiva, un sistema SISO lineare e tempoinvariante è modellato nel dominio del tempo da una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti o, equivalentemente, è modellato nel dominio della frequenza complessa s dalla sua funzione di trasferimento.

Pertanto il modello di un sistema SISO lineare e tempoinvariante con ingresso x(t) e uscita y(t) è spesso schematizzato graficamente con una black box come in figura.

Si noti che i coefficienti a_i e b_i che caratterizzano la funzione di trasferimento G(s) sono gli stessi che individuano l'equazione differenziale, pertanto la funzione di trasferimento può essere determinata anche per ispezione dall'equazione differenziale.

Infine, le radici del polinomio a numeratore della funzione di trasferimento G(s) sono dette zeri del sistema (e sono evidentemente in numero pari a m), mentre le radici del polinomio a denominatore della funzione di trasferimento G(s) sono dette poli del sistema (e sono evidentemente in numero pari a n). Poiché un sistema reale è rappresentato da una equazione differenziale a coefficienti a_i e b_i reali, ne consegue che i polinomi a numeratore e a denominatore della funzione razionale fratta G(s) hanno coefficienti reali. Pertanto gli zeri e i poli del sistema sono o reali o complessi e coniugati a coppie.

ESEMPIO

Si determini la funzione di trasferimento del sistema SISO lineare e tempoinvariante con ingresso x(t) e uscita y(t) rappresentato nel dominio del tempo dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d^4y(t)}{dt^4} + 4\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} = \frac{d^3x(t)}{dt^3} - \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} - x(t).$$

Si individuino quindi gli zeri e i poli del sistema.

Trasformando secondo Laplace l'equazione differenziale con condizioni iniziali nulle si ottiene:

$$s^4Y(s)+4s^3Y(s)+6s^2Y(s)+4sY(s)=s^3X(s)-s^2X(s)+sX(s)-X(s),$$

ovvero

$$\left(s^4+4s^3+6s^2+4s\right)Y(s)=\left(s^3-s^2+s-1\right)X(s),$$

da cui

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{s^3-s^2+s-1}{s^4+4s^3+6s^2+4s}.$$

Evidentemente lo stesso risultato è ottenibile per ispezione, osservando che i coefficienti dell'equazione differenziale sono nell'ordine, utilizzando la notazione precedentemente considerata:

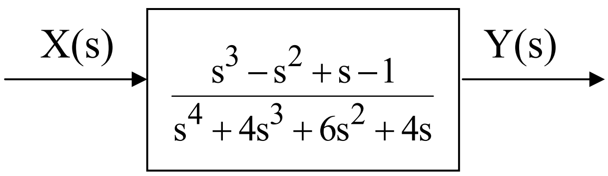
$$a_4=1,\ a_3=4,\ a_2=6,\ a_1=4,\ a_0=0,\ b_3=1,\ b_2=-1,\ b_1=1,\ b_0=-1.$$

Pertanto si ha:

$$G(s)=\frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{a_4s^4+a_3s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}=\frac{s^3-s^2+s-1}{s^4+4s^3+6s^2+4s}$$

che coincide con il risultato trovato.

Un modello del sistema alternativo alla equazione differenziale data è dunque lo schema grafico in figura.



Per determinare i poli e gli zeri del sistema osserviamo che la funzione di trasferimento si può scrivere anche come segue:

$$G(s) = \frac{s^3 - s^2 + s - 1}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s} = \frac{\left(s^2 + 1\right)\left(s - 1\right)}{\left(s^2 + 2s + 2\right)\left(s + 2\right)s}$$

e quindi il sistema presenta m=3 zeri (z_1=+j, z_2=-j, z_3=+1) e n=4 poli (p_1=-1+j, p_2=-1-j, p_3=-2, p_4=0).

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO E SCHEMI A BLOCCHI

Osserviamo che nel dominio della frequenza complessa s per un sistema dinamico SISO lineare tempoinvariante vale la relazione:

$$Y(s)=G(s)\,X(s)$$

che è analoga alla relazione che definisce un sistema statico

$$y=G\cdot x.$$

Ne consegue che è possibile applicare tutte le regole di riduzione dei diagrammi a blocchi viste per sistemi statici semplicemente sostituendo ai guadagni dei blocchi statici le funzioni di trasferimento dei blocchi dinamici e ai segnali nel tempo le loro trasformate secondo Laplace.

Ad esempio, la funzione di trasferimento di due sistemi in cascata con funzioni di trasferimento rispettivamente date da $G_1(s)$ e $G_2(s)$ diventa:

$$G(s) = G_1(s)\cdot G_2(s).$$

Ragionamenti del tutto analoghi al precedente valgono per le diverse connessioni parallelo, in retroazione ecc.

RISPOSTA ALL'IMPULSO

Una caratterizzazione dei sistemi SISO lineari e tempoinvarianti si ottiene anche attraverso la *risposta all'impulso di Dirac*, ossia l'uscita corrispondente a un ingresso $x(t)=\delta(t)$ con condizioni iniziali nulle.

La trasformata della risposta all'impulso vale evidentemente:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = G(s) \cdot \Delta(s) = G(s) \cdot 1 = G(s),$$

ovvero la funzione di trasferimento di un sistema SISO lineare e tempoinvariante è la trasformata di Laplace della risposta all'impulso di Dirac.

Antitrasformando la precedente espressione si deduce anche che la risposta all'impulso vale

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t).$$

Pertanto la risposta all'impulso di Dirac di un sistema SISO lineare e tempoinvariante è l'antitrasformata di Laplace della sua funzione di trasferimento.

Ne deriva che la risposta all'impulso contiene tutti i modi della funzione di trasferimento.

Antitrasformando poi la relazione

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$$

si osserva, per il teorema della trasformata del prodotto di convoluzione, che

$$y(t) = g(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} g(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $g(\tau)$ è causale e dunque nulla per $\tau<0$, mentre per lo stesso motivo $x(t-\tau)$ è nulla per $t-\tau<0$, ovvero per $\tau>t$.

In definitiva la risposta ad un generico segnale x(t) con condizioni iniziali nulle è pari al prodotto di convoluzione fra x(t) e la risposta all'impulso g(t).

RISPOSTA AL GRADINO O RISPOSTA INDICIALE

Una ulteriore caratterizzazione di un sistema SISO lineare tempoinvariante si ottiene prendendo in considerazione la *risposta al gradino unitario o risposta indiciale*, ossia l'uscita corrispondente a un ingresso *x(t)=1(t)* con condizioni iniziali nulle.

Evidentemente si ha:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\cdot X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{G(s)\cdot\frac{1}{s}\right\}$$

nonché, per il teorema della trasformata dell'integrale,

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$$

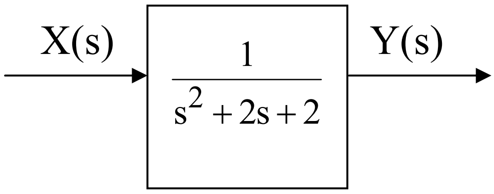
ossia la risposta al gradino unitario è pari all'integrale della risposta all'impulso. Ciò era prevedibile e deriva dal fatto che il gradino unitario è l'integrale dell'impulso di Dirac.

Analogamente, si ha che la risposta alla rampa lineare unitaria è l'integrale della risposta al gradino unitario e che la risposta alla rampa parabolica unitaria è l'integrale della risposta alla rampa lineare unitaria.

Ancora, evidentemente la risposta all'impulso è la derivata della risposta al gradino, quest'ultima è la derivata della risposta alla rampa lineare unitaria, che a sua volta è la derivata della risposta alla rampa parabolica unitaria.

ESEMPIO

Calcolare la risposta all'impulso del seguente sistema.



La trasformata della risposta all'impulso è la funzione di trasferimento del sistema:

$$Y(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+2s+2} = \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

che è una funzione razionale fratta con denominatore di ordine n=2 e numeratore di ordine m=0<n (sistema strettamente proprio). Le radici del denominatore sono complesse e coniugate semplici e valgono $-1 \pm j$. Per ottenere *g(t)* antitrasformiamo *G(s)*, che è già espressa in fratti semplici, ottenendo:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{-t} \cdot \sin t \cdot 1(t)$$

che contiene entrambi i modi della funzione di trasferimento $e^{-t} \cdot \sin t \cdot 1(t)$ e $e^{-t} \cdot \cos t \cdot 1(t)$, con il secondo termine moltiplicato per un residuo nullo.

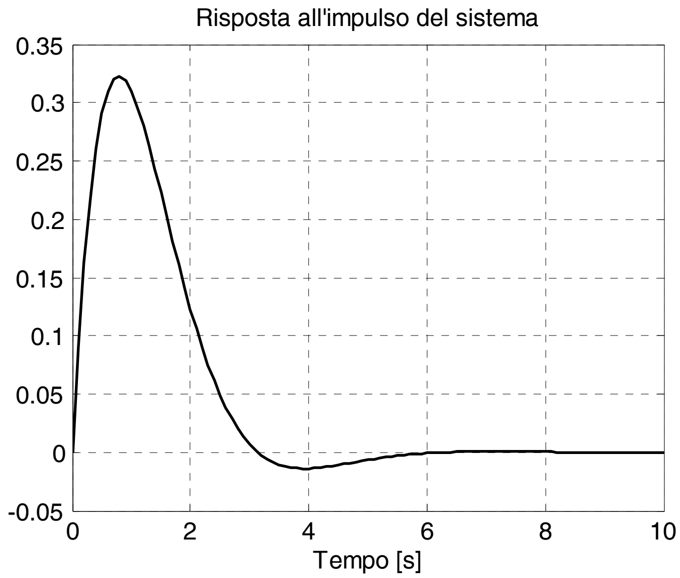
Si può verificare che valgono il teorema del valore iniziale e quello del valore finale.

Infatti

$$g(0) = 0 = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s}{s^2+2s+2}$$

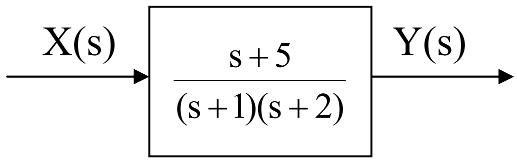
e

$$g(\infty) = 0 = \lim_{s\to 0} s \cdot G(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s}{s^2+2s+2}.$$



ESEMPIO

Calcolare la risposta al gradino unitario, la risposta all'impulso e la risposta alla rampa lineare unitaria del seguente sistema.



La trasformata del segnale di uscita vale:

$$Y(s) = G(s) \cdot X(s) = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s}$$

che è una funzione razionale fratta con denominatore di ordine n=3 e numeratore di ordine m=1<n (sistema strettamente proprio). Le radici del denominatore sono 0, -1, -2, tutte semplici. Per ottenere y(t) determiniamo lo sviluppo in fratti semplici di Y(s):

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

con

$$K_1 = sY(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}\right|_{s=0} = \frac{5}{2}$$

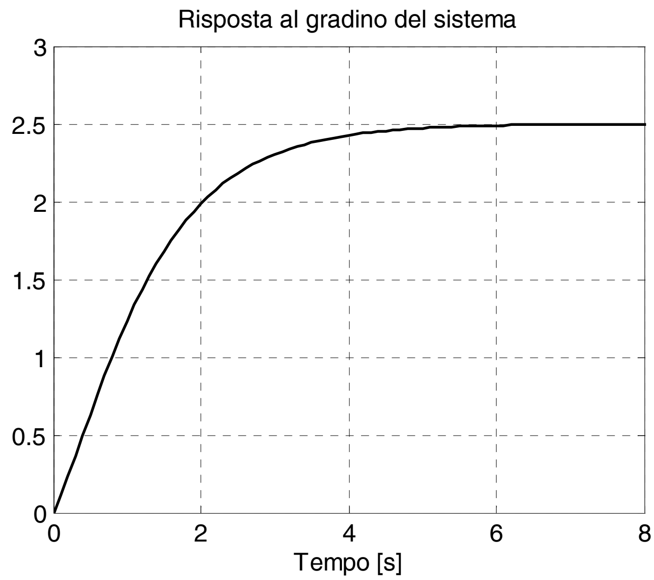
$$K_2 = (s+1)\cdot Y(s)\big|_{s=-1} = \left.\frac{s+5}{s(s+2)}\right|_{s=-1} = -4$$

$$K_3 = (s+2)\cdot Y(s)\big|_{s=-2} = \left.\frac{s+5}{s(s+1)}\right|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

Quindi antitrasformando si ha la risposta al gradino del sistema:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left\{\frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}\right\}\cdot 1(t)\,.$$

Osserviamo che la risposta (forzata) al gradino y(t) contiene il modo associato all'ingresso e i modi dei poli della funzione di trasferimento del sistema.



Si può verificare che valgono il teorema del valore iniziale e quello del valore finale. Infatti

$$y(0)=0=lim_{s\to\infty}\, s\cdot Y(s)=lim_{s\to\infty}\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}$$

e

$$y(\infty)=\frac{5}{2}=lim_{s\to 0}\, s\cdot Y(s)=lim_{s\to 0}\frac{s+5}{(s+1)(s+2)}.$$

Per determinare la risposta all'impulso g(t) del sistema osserviamo che risulta

$$g(t)=\frac{dy(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{2}-4e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-2t}\right)\cdot 1(t)=\left(4e^{-t}-3e^{-2t}\right)\cdot 1(t)$$

la cui trasformata coincide evidentemente con la funzione di trasferimento G(s).

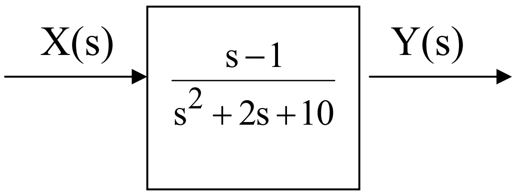
Determiniamo ora la risposta alla rampa unitaria $y_r(t)$ del sistema osservando che risulta

$$\begin{aligned}
y_r(t)&=\int_0^t y(\tau)d\tau=\frac{5}{2}\left(\int_0^t d\tau\right)\cdot 1(t)-4\left(\int_0^t e^{-\tau}\cdot d\tau\right)\cdot 1(t)+\frac{3}{2}\left(\int_0^t e^{-2\tau}d\tau\right)\cdot 1(t)=\\
&=\left(\frac{5}{2}\tau\Big|_0^t+4e^{-\tau}\Big|_0^t-\frac{3}{4}e^{-2\tau}\Big|_0^t\right)\cdot 1(t)=\left(\frac{5}{2}t+4e^{-t}-4-\frac{3}{4}e^{-2t}+\frac{3}{4}\right)\cdot 1(t)=\\
&=\left(-\frac{13}{4}+\frac{5}{2}t+4e^{-t}-\frac{3}{4}e^{-2t}\right)\cdot 1(t)
\end{aligned}$$

che contiene sia i due modi dell'ingresso a rampa (la cui trasformata è $1/s^2$, con fratti semplici $1/s^2$ e 1/s, corrispondenti ai modi rampa e gradino) e i due modi di sistema (presenti nell'espressione della risposta all'impulso e dovuti ai due poli).

ESEMPIO

Calcolare la risposta all'impulso e la risposta al gradino unitario del seguente sistema.



La trasformata della risposta all'impulso è la funzione di trasferimento del sistema:

$$Y(s) = G(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+10} = \frac{s-1}{(s+1)^2+3^2}$$

che è una funzione razionale fratta con denominatore di ordine n=2 e numeratore di ordine m=1<n (sistema strettamente proprio). Le radici del denominatore sono complesse e coniugate semplici e valgono $-1 \pm 3j$. Per ottenere *g(t)* antitrasformiamo *G(s)*, che è già espressa nell'unico fratto semplice combinato (caso delle radici complesse semplici), ottenendo:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s-1}{(s+1)^2+3^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1-2\cdot\frac{3}{3}}{(s+1)^2+3^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} - \frac{2}{3}\frac{3}{(s+1)^2+3^2}\right\} =$$

$$= e^{-t}\cdot\cos 3t\cdot 1(t) - \frac{2}{3}e^{-t}\cdot\sin 3t\cdot 1(t)$$

che evidentemente contiene entrambi i modi della funzione di trasferimento $e^{-t}\cdot 3\cos t\cdot 1(t)$ e $e^{-t}\cdot\sin 3t\cdot 1(t)$.

Per quanto riguarda la risposta al gradino, la sua trasformata di Laplace vale:

$$Y(s) = G(s)\cdot X(s) = \frac{s-1}{s^2+2s+10}\cdot\frac{1}{s}$$

che è una funzione razionale fratta con denominatore di ordine n=3 e numeratore di ordine m=1<n (sistema strettamente proprio). Le radici del denominatore sono 0 e -1 ± 3j, tutte semplici. Per ottenere y(t) determiniamo lo sviluppo in fratti semplici di Y(s):

$$Y(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{\alpha s+\beta}{(s+1)^2+3^2}$$

con

$$K_1=sY(s)\big|_{s=0}=\left.\frac{s-1}{s^2+2s+10}\right|_{s=0}=-\frac{1}{10}$$

$$\frac{\alpha s+\beta}{(s+1)^2+3^2}=\frac{s-1}{s^2+2s+10}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{10}}{s}=\frac{s-1+\frac{1}{10}\left(s^2+2s+10\right)}{s\left(s^2+2s+10\right)}=\frac{s+\frac{1}{10}s^2+\frac{2}{10}s}{s\left(s^2+2s+10\right)}=\frac{\frac{1}{10}s+\frac{12}{10}}{s^2+2s+10}$$

da cui

$$\alpha=\frac{1}{10}$$
$$\beta=\frac{12}{10}$$

e, in definitiva,

$$Y(s)=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{10}\cdot s+\frac{12}{10}}{(s+1)^2+3^2}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{10}\cdot s+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}+\frac{12}{10}}{(s+1)^2+3^2}=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{s}+\frac{\frac{1}{10}(s+1)+\frac{11}{30}\cdot 3}{(s+1)^2+3^2}.$$

Quindi antitrasformando si ha la risposta al gradino del sistema:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\left\{-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}e^{-t}\cos 3t+\frac{11}{30}e^{-t}\sin 3t\right\}\cdot 1(t).$$

Osserviamo che la risposta (forzata) al gradino y(t) contiene il modo associato all'ingresso e i modi dei poli della funzione di trasferimento del sistema.

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO NON RAZIONALI FRATTE

Abbiamo visto che la funzione di trasferimento di un sistema SISO lineare tempoinvariante è una funzione razionale fratta nella variabile complessa s:

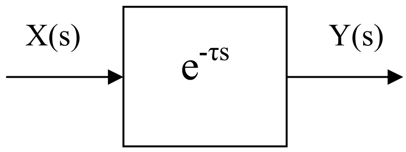
$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i}.$$

Si osserva tuttavia che non tutti i sistemi SISO lineari stazionari sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali fratte. Sia ad esempio il caso di un sistema modellato da un *ritardo puro o ritardo finito,* ossia da una *black box* che, in risposta ad un ingresso *x(t)*, produce un'uscita ritardata di τ secondi:

$$y(t) = x(t-\tau).$$

Il sistema è ancora lineare e tempoinvariante, ossia valgono le proprietà di sovrapposizione degli effetti e di ripetibilità degli esperimenti, tuttavia la sua funzione di trasferimento vale:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\mathcal{L}\{x(t-\tau)\}}{X(s)} = \frac{X(s) \cdot e^{-s\tau}}{X(s)} = e^{-s\tau}$$

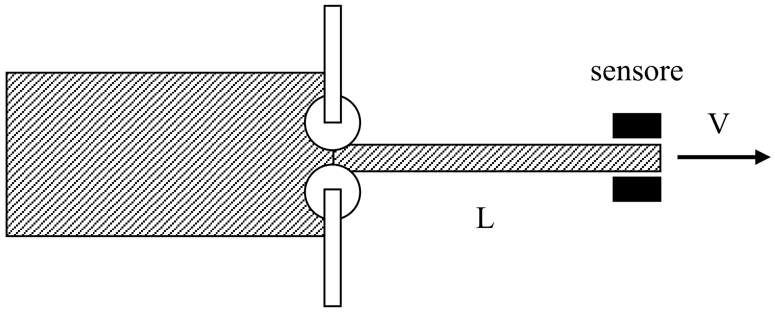


che è evidentemente una funzione non razionale fratta.

Il ritardo puro si presenta in molti sistemi di controllo, in particolare in quelli che includono trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche: in tali sistemi l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito all'applicazione dell'ingresso. Inoltre il tempo morto è generalmente presente in tutti i sistemi che prevedono il telecontrollo, come ad esempio nelle applicazioni spaziali.

Un esempio di sistema modellabile da un ritardo puro è il laminatoio, in cui si vuole regolare in modo automatico lo spessore di un laminato metallico. La misura dello spessore avviene ad una certa distanza *L* dai cilindri di laminazione, per cui, se la velocità *V* di trasporto del laminato è costante, si ha un ritardo finito di valore $\tau=L/V$. Quindi, si ha uno spessore misurato dal sensore dato da:

$$d_{mis}(t) = d(t-\tau) = d(t - L/V)$$

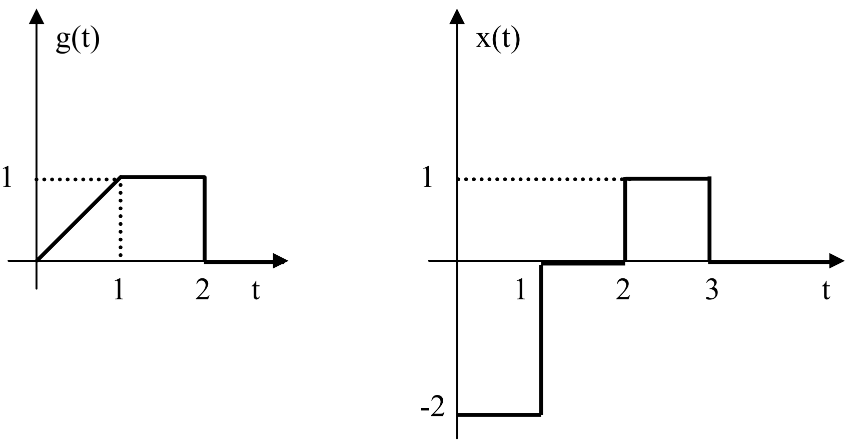


con una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{D_{mis}(s)}{D(s)} = e^{-s\tau} = e^{-s\frac{L}{V}}.$$

ESEMPIO

Un sistema SISO lineare stazionario ha una risposta all'impulso come in figura. Si determini la risposta y(t) all'ingresso x(t) riportato in figura.



Si ha:

g(t)=r(t)-r(t-1)-1(t-2)= t·1(t)-(t-1)·1(t-1)-1(t-2)

x(t)=-2·1(t)+2·1(t-1)+1(t-2)-1(t-3).

Un primo metodo per determinare la risposta del sistema consiste nell'utilizzare la trasformata di Laplace e determinare la funzione di trasferimento. Si ha:

$$G(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}$$

Pertanto la trasformata della risposta al gradino vale:

$$Y(s)=G(s)\cdot X(s)=\left(\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-2s}\right)\left(-\frac{2}{s}+\frac{2}{s}e^{-s}+\frac{1}{s}e^{-2s}-\frac{1}{s}e^{-3s}\right)=$$
$$=-\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^3}e^{-s}+\frac{1}{s^3}e^{-2s}-\frac{1}{s^3}e^{-3s}+\frac{2}{s^3}e^{-s}-\frac{2}{s^3}e^{-2s}-\frac{1}{s^3}e^{-3s}+\frac{1}{s^3}e^{-4s}+\frac{2}{s^2}e^{-2s}-\frac{2}{s^2}e^{-3s}-\frac{1}{s^2}e^{-4s}+\frac{1}{s^2}e^{-5s}$$

Antitrasformando si ottiene quindi la risposta del sistema all'ingresso x(t):

$$y(t)=-t^2\cdot 1(t)+(t-1)^2\cdot 1(t-1)+\frac{(t-2)^2}{2}\cdot 1(t-2)-\frac{(t-3)^2}{2}\cdot 1(t-3)+$$
$$+(t-1)^2\cdot 1(t-1)-(t-2)^2\cdot 1(t-2)-\frac{(t-3)^2}{2}\cdot 1(t-3)+\frac{(t-4)^2}{2}\cdot 1(t-4)+$$
$$+2(t-2)\cdot 1(t-2)-2(t-3)\cdot 1(t-3)-(t-4)\cdot 1(t-4)+(t-5)\cdot 1(t-5).$$

Un secondo metodo consiste nel non utilizzare la trasformata di Laplace ma la proprietà di linearità del sistema. Poiché il sistema è lineare, vale infatti il principio di sovrapposizione degli effetti: la risposta y(t) a x(t), che è una combinazione di gradini, è una combinazione di risposte al gradino. pertanto:

$$y(t)=-2\cdot y_1(t)+2\cdot y_1(t-1)+y_1(t-2)-y_1(t-3)$$

dove con $y_1(t)$ si è indicata la risposta al gradino del sistema.

È quindi sufficiente conoscere solo la risposta al gradino per determinare y(t). Questa si può calcolare o come $y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\frac{1}{s}\}$ o semplicemente integrando la risposta all'impulso, che è un dato del problema. Si ha dunque:

$$y_1(t)=\int_0^t g(\tau)d\tau=\left(\int_0^t \tau\cdot d\tau\right)\cdot 1(t)-\left(\int_1^t (\tau-1)\cdot d\tau\right)\cdot 1(t-1)-\left(\int_2^t d\tau\right)\cdot 1(t-2)=$$
$$=\frac{t^2}{2}\cdot 1(t)-\frac{(t-1)^2}{2}\cdot 1(t-1)-(t-2)\cdot 1(t-2)$$

dove si sono posti fuori dagli integrali i segnali a gradino poiché il risultato dell'integrale tra 0 e t di una funzione integranda è non nullo solo quando la stessa funzione integranda è non nulla.

Sostituendo la precedente espressione della risposta al gradino nell'espressione di y(t) si ottiene quindi la risposta del sistema all'ingresso x(t):

$$\begin{aligned}
y(t)&=-t^2\cdot 1(t)+(t-1)^2\cdot 1(t-1)+2(t-2)\cdot 1(t-2)+\\
&+(t-1)^2\cdot 1(t-1)-(t-2)^2\cdot 1(t-2)-2(t-3)\cdot 1(t-3)+\\
&+\frac{(t-2)^2}{2}\cdot 1(t-2)-\frac{(t-3)^2}{2}\cdot 1(t-3)-(t-4)\cdot 1(t-4)+\\
&-\frac{(t-3)^2}{2}\cdot 1(t-3)+\frac{(t-4)^2}{2}\cdot 1(t-4)+(t-5)\cdot 1(t-5).
\end{aligned}$$

FISICA REALIZZABILITÀ DI SISTEMI CON FUNZIONI DI TRASFERIMENTO RAZIONALI FRATTE

Consideriamo un sistema SISO lineare tempoinvariante con funzione di trasferimento data da una funzione razionale fratta nella variabile complessa s:

$$G(s) = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i \cdot s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot s^i}.$$

Osserviamo che il sistema è fisicamente realizzabile (cioè il modello descrive un sistema reale) solo se m≤n, ossia se G(s) è propria, anche non strettamente (m=n). Infatti per m>n si avrebbe:

$$G(s) = k_{m-n}\, s^{m-n} + k_{m-n-1}\, s^{m-n-1} + \ldots + k_0 + R(s)/A(s)$$

con R(s) polinomio resto di grado $r<n$; pertanto l'antitrasformata di G(s), ossia la risposta all'impulso del sistema varrebbe:

$$g(t) = k_{m-n}\, \delta_{m-n+1}(t) + k_{m-n-1}\, \delta_{m-n}(t) + \ldots + k_0\, \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{R(s)/A(s)\}$$

contenendo così degli impulsi di ordine superiore al primo, quindi più veloci dell'impulso δ(t) che è l'ingresso corrispondente a g(t).

Un sistema di questo tipo (con m>n) si dice *anticipativo*, poiché risponde all'ingresso 'anticipandolo', ossia con una uscita più veloce dell'ingresso stesso.

FORME DELLE FUNZIONI DI TRASFERIMENTO RAZIONALI FRATTE

Osserviamo che una generica funzione di trasferimento nella forma

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

con $m<n$ (n ordine del sistema) si può anche scrivere come segue:

$$G(s) = k \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \cdot \ldots \cdot (s - z_m)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \cdot \ldots \cdot (s - p_m)} = k \frac{\prod_{j=1}^{m} (s - z_j)}{\prod_{i=1}^{n} (s - p_i)}$$

dove i numeri complessi z_j sono le radici del numeratore della funzione di trasferimento o gli *zeri della funzione di trasferimento*, anche di molteplicità maggiore di uno, mentre i numeri complessi p_i sono le radici del denominatore della funzione di trasferimento o i *poli della funzione di trasferimento*, anche di molteplicità maggiore di uno. Si ha inoltre

$$k=b_m/a_n.$$

In questo caso si dice che la *funzione di trasferimento* è *espressa nella forma poli-zeri*.

Supponiamo ora che la funzione di trasferimento abbia μ (ν) zeri (poli) nell'origine, m_1 (n_1) zeri (poli) reali non nulli e m_2 (n_2) *coppie* di zeri (poli) complessi e coniugati, con

$$\mu+m_1+2m_2=m \qquad \text{e} \qquad \nu+n_1+2n_2=n.$$

L'espressione precedente si può dettagliare come segue:

$$G(s) = k\frac{s^{\mu}\cdot(s-z_1)\cdot\ldots\cdot(s-z_{m1})\cdot[(s-\sigma_{z_1})^2+\omega_{z_1}{}^2]\cdot\ldots\cdot[(s-\sigma_{z_{m2}})^2+\omega_{z_{m2}}{}^2]}{s^{\nu}\cdot(s-p_1)\cdot\ldots\cdot(s-p_{n1})\cdot[(s-\sigma_{p_1})^2+\omega_{p_1}{}^2]\cdot\ldots\cdot[(s-\sigma_{p_{n2}})^2+\omega_{p_{n2}}{}^2]} =$$

$$= k\frac{s^{\mu}\cdot(s-z_1)\cdot\ldots\cdot(s-z_{m1})\cdot(s^2+2\delta_{z1}\omega_{n_{z1}}s+\omega_{n_{z1}}{}^2)\cdot\ldots\cdot(s^2+2\delta_{zm2}\omega_{n_{zm2}}s+\omega_{n_{zm2}}{}^2)}{s^{\nu}\cdot(s-p_1)\cdot\ldots\cdot(s-p_{n1})\cdot(s^2+2\delta_{p1}\omega_{n_{p1}}s+\omega_{n_{p1}}{}^2)\cdot\ldots\cdot(s^2+2\delta_{pn2}\omega_{n_{pn2}}s+\omega_{n_{pn2}}{}^2)}$$

con

$$\omega_{n_{zj}} = \sqrt{\sigma_{z_j}{}^2+\omega_{z_j}{}^2}, \qquad j=1,\ldots,m_2$$

$$\omega_{n_{pi}} = \sqrt{\sigma_{p_i}{}^2+\omega_{p_i}{}^2}, \qquad i=1,\ldots,n_2$$

e

$$\delta_{z_j} = -\frac{\sigma_{z_j}}{\sqrt{\sigma_{z_j}{}^2+\omega_{z_j}{}^2}} = \cos\varphi_{z_j}, \qquad j=1,\ldots,m_2$$

$$\delta_{p_i} = -\frac{\sigma_{p_i}{}^2}{\sqrt{\sigma_{p_i}{}^2+\omega_{p_i}{}^2}} = \cos\varphi_{p_i}, \qquad i=1,\ldots,n_2$$

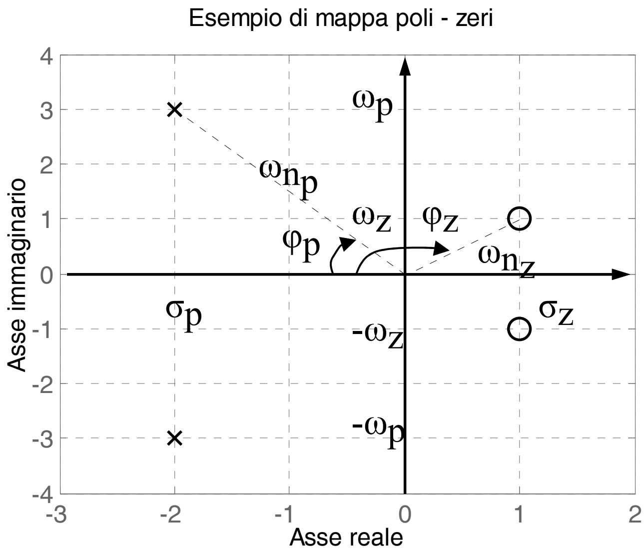
da cui

$$G(s) = k\cdot\frac{s^{\mu}\cdot\prod_{j=1}^{m_1}(s-z_j)}{s^{\nu}\cdot\prod_{i=1}^{n_1}(s-p_i)}\cdot\frac{\prod_{j=1}^{m_2}(s^2+2\delta_{zi}\omega_{n_{zi}}s+\omega_{n_{zi}}{}^2)}{\prod_{i=1}^{n_2}(s^2+2\delta_{pi}\omega_{n_{pi}}s+\omega_{n_{pi}}{}^2)}$$

in cui la funzione di trasferimento è ancora espressa nella forma poli-zeri, ma sono evidenziate le coppie di radici complesse e coniugate sia nel numeratore che nel denominatore. I coefficienti δ e ω_n presenti nei termini relativi a zeri e poli complessi e coniugati si dicono rispettivamente *coefficiente di smorzamento* e *pulsazione naturale* della coppia di radici corrispondente.

È agevole descrivere graficamente il significato di tali coefficienti. Nella figura successiva sono rappresentati a titolo di esempio una coppia di zeri e una di poli complessi e coniugati, rispettivamente in $\sigma_z \pm j\omega_z$ (σ_z>0) e $\sigma_p \pm j\omega_p$ (σ_p<0).

Con semplici considerazioni geometriche si deduce che le pulsazioni naturali ω_{nz} e ω_{np} rappresentano rispettivamente i moduli degli zeri e dei poli, mentre i coefficienti di smorzamento δ_Z e δ_p rappresentano il coseno dell'angolo formato dal raggio vettore che unisce la radice a parte immaginaria positiva con l'origine insieme al semiasse reale negativo: per tale motivo si ha in questo caso δ_Z<0 e δ_p>0.



È utile rappresentare la funzione di trasferimento anche nella cosiddetta forma delle costanti di tempo. In particolare, dato uno zero (o un polo) reale, si definisce la sua costante di tempo come l'inverso dello zero (o del polo) cambiato di segno.

Pertanto dalle precedenti espressioni si ha anche:

$$G(s) = k_1 \frac{s^{\mu} \cdot (1+\tau_{z_1} s) \cdot \ldots \cdot (1+\tau_{z_{m1}} s) \cdot \left(1 + 2\frac{\delta_{z1}}{\omega_{n_{z1}}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_{z1}}^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + 2\frac{\delta_{zm2}}{\omega_{n_{zm2}}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_{zm2}}^2}\right)}{s^{\nu} \cdot (1+\tau_{p_1} s) \cdot \ldots \cdot (1+\tau_{p_{n1}} s) \cdot \left(1 + 2\frac{\delta_{p1}}{\omega_{n_{p1}}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_{p1}}^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + 2\frac{\delta_{pn2}}{\omega_{n_{pn2}}} s + \frac{s^2}{\omega_{n_{pn2}}^2}\right)}$$

da cui si ottiene la *funzione di trasferimento espressa nella forma in costanti di tempo:*

$$G(s) = k_1 \cdot \frac{s^{\mu}}{s^{\nu}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m_1}(1+\tau_{z_j}s)}{\prod_{i=1}^{n_1}(1+\tau_{p_i}s)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{m_2}\left(1+2\frac{\delta_{z_j}}{\omega_{n_{zj}}}s+\frac{s^2}{\omega_{n_{zj}}^2}\right)}{\prod_{i=1}^{n_2}\left(1+2\frac{\delta_{p_i}}{\omega_{n_{pi}}}s+\frac{s^2}{\omega_{n_{pi}}^2}\right)}$$

dove le costanti di tempo per zeri e poli reali valgono:

$$\tau_{z_j} = -\frac{1}{z_j},\ j=1\ldots m_1, \qquad \tau_{p_i} = -\frac{1}{p_i},\ i=1\ldots n_1.$$

Si nota che la costante di tempo di uno zero o un polo reale è misurata in secondi ed è positiva (negativa) se lo zero o polo è disposto nel semipiano sinistro (destro). Inoltre la costante di tempo è tanto maggiore in valore assoluto quanto più lo zero o il polo è vicino all'asse immaginario, tanto minore in caso contrario. Pertanto, nel caso del polo reale, la relativa costante di tempo misura la rapidità del modo elementare associato.

Per analogia si definisce allora la costante di tempo di una coppia di zeri o poli complessi come l'inverso cambiato di segno della parte reale:

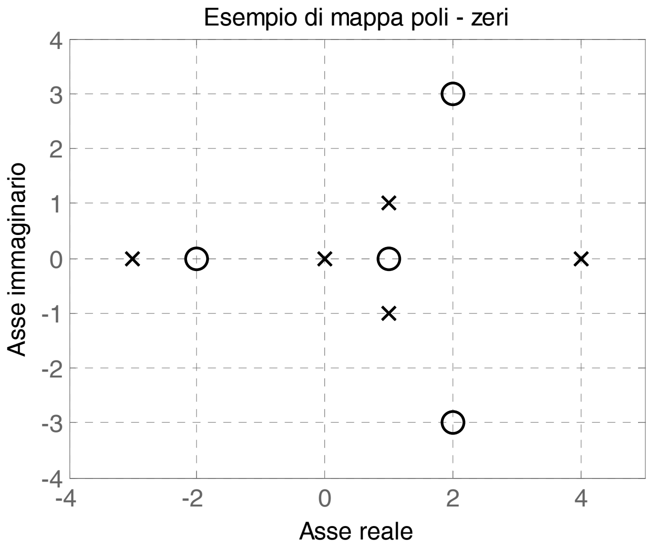
$$\tau_{z_j} = -\frac{1}{\sigma_{z_j}} = -\frac{1}{\delta_{z_j}\omega_{n_{z_j}}},\ j=1\ldots m_2, \quad \tau_{p_i} = -\frac{1}{\sigma_{p_i}} = -\frac{1}{\delta_{p_i}\omega_{n_{p_i}}},\ i=1\ldots n_2.$$

Si nota ancora che la costante di tempo di una coppia di zeri o di poli complessi è misurata in secondi ed è positiva (negativa) se la coppia di zeri o poli è disposta nel semipiano sinistro (destro). Inoltre la costante di tempo è tanto maggiore in valore assoluto quanto più gli zeri o poli sono vicini all'asse immaginario, tanto minore in caso contrario. Pertanto, nel caso di coppia di poli complessi, la relativa costante di tempo misura la rapidità dei modi elementari associati.

ESEMPIO

Sia una funzione di trasferimento espressa nella forma poli zeri come segue:

$$G(s) = G(s) = k\frac{(s-1)\cdot(s+2)\cdot(s^2-4s+13)}{s\cdot(s-4)\cdot(s+3)\cdot(s^2-2s+2)} = k\frac{(s-1)\cdot(s+2)\cdot(s-2-3j)\cdot(s-2+3j)}{s\cdot(s-4)\cdot(s+3)\cdot(s-1-j)\cdot(s-1+j)}.$$



Si hanno m=4 zeri in $z_1=1$, $z_2=-2$, $z_3=2+3j$, $z_4=2-3j$, comprendenti $\mu=0$ zeri nell'origine, $m_1=2$ zeri reali e $m_2=1$ coppia di zeri complessi e coniugati. Vi sono poi n=5 poli in $p_1=0$, $p_2=4$, $p_3=-3$, $p_4=1+j$, $p_5=1-j$, comprendenti $\nu=1$ poli nell'origine, $n_1=2$ poli reali non nulli e $n_2=1$ coppia di poli complessi e coniugati. Nella figura precedente è rappresentata la mappa poli-zeri del sistema.

Evidentemente, raggruppando le coppie di radici complesse coniugate si ha anche:

$$G(s) = k\frac{(s-1)\cdot(s+2)\cdot[(s-2)^2+3^2]}{s\cdot(s-4)\cdot(s+3)\cdot[(s-1)^2+1^2]}$$

e con semplici operazioni si possono evidenziare le coppie di zeri e poli complessi e coniugati con il relativo coefficiente di smorzamento δ e la pulsazione naturale ω_n:

$$G(s)=k\frac{(s-1)\cdot(s+2)\cdot(s^2-4s+13)}{s\cdot(s-4)\cdot(s+3)\cdot(s^2-2s+2)}=k\frac{(s-1)\cdot(s+2)\cdot\left(s^2+2\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)\sqrt{13}\cdot s+(\sqrt{13})^2\right)}{s\cdot(s-4)\cdot(s+3)\cdot\left(s^2+2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}\cdot s+(\sqrt{2})^2\right)}$$

quindi per z_3=2+3j e z_4=2-3j si ha un coefficiente di smorzamento $\delta_{z3/4}=-\frac{2}{\sqrt{13}}$ e una pulsazione naturale $\omega_{n_z3/4}=\sqrt{13}$, mentre per p_4=1+j e p_5=1-j si ha $\delta_{p3/4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\omega_{n_p3/4}=\sqrt{2}$. Si notino i coefficienti di smorzamento negativi che indicano che sia i poli che gli zeri complessi si trovano nel semipiano destro di Gauss.

Operando sulla precedente espressione si ha anche:

$$G(s)=k_1\frac{(1-s)\cdot(1+\frac{s}{2})\cdot\left(1+2\frac{\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)}{\sqrt{13}}\cdot s+\frac{s^2}{(\sqrt{13})^2}\right)}{s\cdot(1-\frac{s}{4})\cdot(1+\frac{s}{3})\cdot\left(1+2\frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}}\cdot s+\frac{s^2}{(\sqrt{2})^2}\right)}$$

quindi per z_1=1 e z_2=-2 si hanno delle costanti di tempo τz_1=-1 s e τz_2=1/2 s, mentre per p_1=4 e p_2=-3 si hanno delle costanti di tempo τp_1=-1/4 s e τp_2=1/3 s. Per la coppie di zeri complessi z_3=2+3j e z_4=2-3j, con parte reale positiva, si ha poi una costante di tempo $\tau z_3=\tau z_4$=-0.5s, mentre per p_4=1+j e p_5=1-j si ha una costante di tempo $\tau z_4=\tau z_5$=-1 s. Evidentemente la costante di tempo associata al polo nullo ha valore infinito. Si ha infine:

$$k_1=k\cdot\frac{(-1)\cdot(2)\cdot(\sqrt{13})^2}{(-4)\cdot(+3)\cdot(\sqrt{2})^2}=\frac{13}{12}k.$$