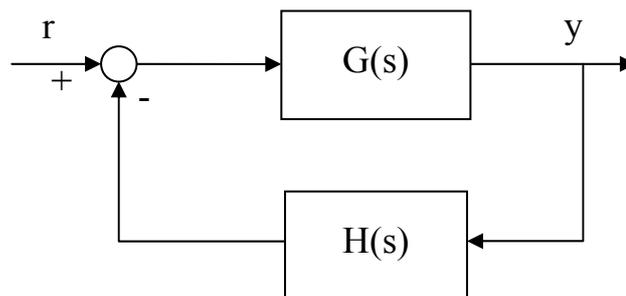


## INTRODUZIONE

Sia il generico sistema in retroazione in figura. È noto che la stabilità di un sistema di questo genere dipende dalla posizione nel piano di Gauss dei poli in anello chiuso della funzione di trasferimento  $G_0(s)$ , ossia delle radici della sua equazione caratteristica, che con riferimento alla figura si scrive:

$$1 + GH(s) = 0.$$



In particolare, sia il criterio di Routh che il metodo del luogo delle radici permettono di investigare la stabilità relativa di un sistema del tipo in figura nel dominio della variabile complessa  $s$ , indicando la distanza dei poli in anello chiuso dall'asse immaginario.

Nel seguito introduciamo un criterio per analizzare la stabilità e la stabilità relativa di un sistema in anello chiuso nel dominio della frequenza  $\omega$ , più precisamente, della pulsazione  $\omega$ . È noto che la risposta in frequenza di un sistema lineare tempo invariante individua univocamente la risposta in regime sinusoidale, fornendo così informazioni sulla stabilità del sistema stesso. Poiché tale risposta in frequenza è facilmente determinabile sperimentalmente eccitando il sistema con un segnale sinusoidale, essa può essere utilizzata per investigare la stabilità del sistema quando alcuni suoi parametri sono fatti variare. Il criterio di Nyquist permette appunto di investigare la stabilità in anello *chiuso* del sistema nota la funzione di trasferimento in anello *aperto* ed in particolare il suo diagramma polare o diagramma di Nyquist.

Più precisamente, il criterio di stabilità di Nyquist, introdotto dallo stesso Nyquist nel 1932, mette in relazione la posizione dei poli in anello chiuso nel piano di Gauss con la funzione di risposta armonica in anello aperto del sistema, ossia con  $GH(j\omega)$ . In particolare, quest'ultima viene rappresentata secondo la notazione cartesiana, ossia in termini di parte reale e parte immaginaria, attraverso il cosiddetto diagramma di Nyquist o polare. Questo rappresenta nel piano complesso la curva descritta al variare della pulsazione  $\omega$  nell'intervallo  $[0, +\infty[$  dal generico punto complesso:

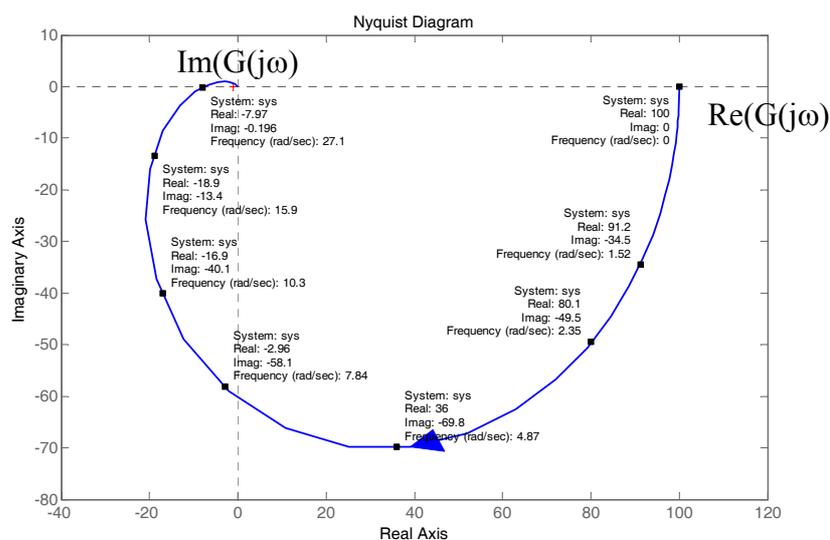
$$GH(j\omega) = \text{Re}(GH(j\omega)) + j\text{Im}(GH(j\omega)).$$

Come con il metodo del luogo delle radici, anche con la tecnica che fa uso dei diagrammi di Nyquist non è necessaria la conoscenza dei poli in anello chiuso per lo studio della stabilità, ma questo può essere eseguito graficamente a partire dalla risposta in frequenza in anello aperto. Ne consegue che, grazie al criterio di stabilità di Nyquist, la risposta in frequenza determinata sperimentalmente può essere usata direttamente per lo studio della stabilità quando il sistema viene chiuso in retroazione.

## DIAGRAMMI DI NYQUIST

Il diagramma polare o di Nyquist di un sistema chiuso in retroazione è una rappresentazione nel piano di Gauss del valore della funzione di risposta armonica in anello aperto  $GH(j\omega)$ , in termini di parte reale e parte immaginaria, al variare della pulsazione  $\omega$ . Un esempio di diagramma polare, ottenuto con il software di calcolo Matlab, è riportato nella figura in basso, per la seguente funzione di risposta armonica, priva di poli nell'origine:

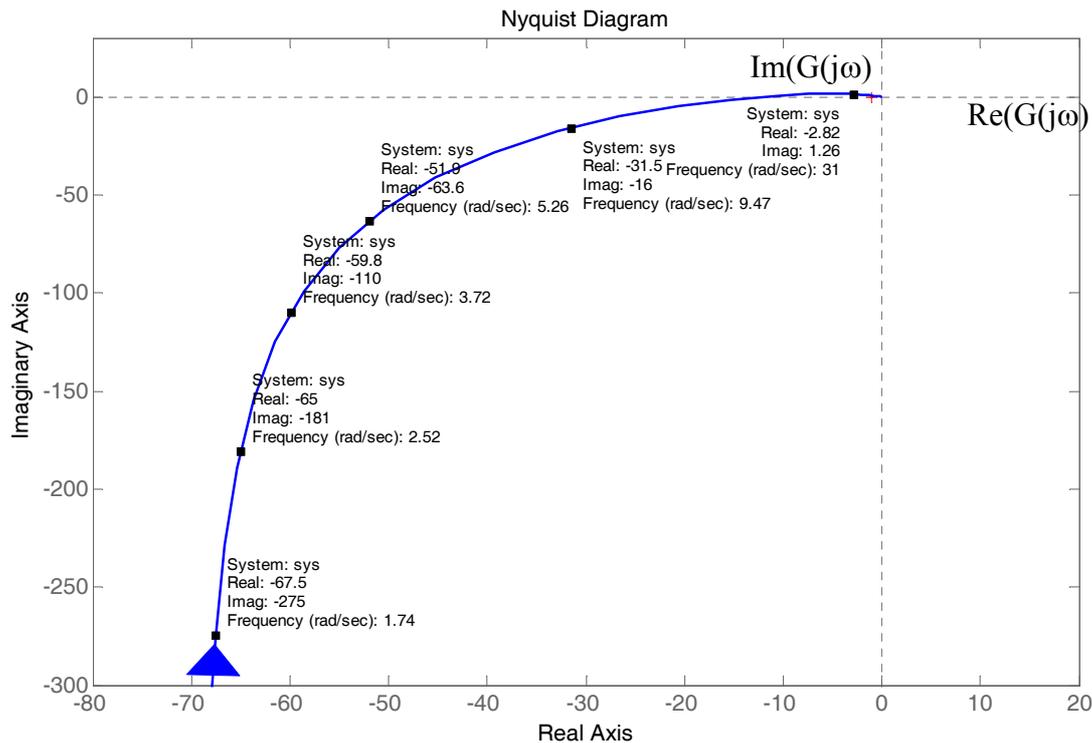
$$G(j\omega) = \frac{100 \left( 1 + j\omega \frac{1}{50} \right)}{\left( 1 + j\omega \frac{1}{10} \right)^2 \left( 1 + j\omega \frac{1}{20} \right) \left( 1 + j\omega \frac{1}{100} \right)}.$$



Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Rappresentiamo ora con l'ausilio del software Matlab il diagramma polare della seguente funzione di risposta armonica, che presenta un polo nell'origine:

$$G(j\omega) = \frac{500 \left(1 + j\omega \frac{1}{50}\right)}{j\omega \left(1 + j\omega \frac{1}{10}\right) \left(1 + j\omega \frac{1}{20}\right) \left(1 + j\omega \frac{1}{100}\right)}$$



Come si vede dai precedenti esempi, un generico punto del diagramma polare di una funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$  (retroazione unitaria) o  $GH(j\omega)$  (retroazione non unitaria) mostra quindi come varia nel piano di Gauss il punto complesso  $GH(j\omega)$  al variare della pulsazione  $\omega$ .

Per tale ragione i diagrammi polari sono graduati nella pulsazione  $\omega$ , ovvero sulle curve che li rappresentano sono specificati i valori di  $\omega$  corrispondenti ai vari punti, in numero sufficiente per una agevole interpolazione. Ciò consente una determinazione immediata delle funzioni  $\text{Re}(GH(j\omega))$  e  $\text{Im}(GH(j\omega))$ , attraverso una semplice lettura dei valori delle ascisse e delle ordinate corrispondenti a ciascun punto del diagramma, e dunque consente in definitiva la determinazione della risposta in frequenza del sistema.

Evidentemente, i diagrammi di Nyquist e quelli di Bode di una generica funzione di risposta armonica in anello aperto  $GH(j\omega)$  sono equivalenti: come i valori del modulo  $|GH(j\omega)|$  e dell'argomento  $\angle(GH(j\omega))$  della funzione di risposta armonica sono facilmente determinabili dal diagramma polare in funzione della pulsazione, permettendo una facile determinazione dei diagrammi di Bode dal diagramma di Nyquist di un sistema, è possibile determinare la parte reale  $\text{Re}(GH(j\omega))$  e la parte immaginaria  $\text{Im}(GH(j\omega))$  della funzione di risposta armonica dai diagrammi di Bode, cioè costruire, a partire da questi, il diagramma polare del sistema in esame.

### TEOREMA DI NYQUIST

Il teorema di Nyquist deriva da un teorema sulle variabili complesse dovuto a Cauchy, comunemente noto come “principio dell'argomento”.

Si consideri la generica funzione della variabile complessa  $s=\sigma+j\omega$  e a valori complessi del tipo:

$$q(s) = \frac{(s - \alpha_1)(s - \alpha_2) \dots (s - \alpha_m)}{(s - \beta_1)(s - \beta_2) \dots (s - \beta_n)}.$$

Assumiamo che si tratti di una funzione razionale fratta propria, anche non strettamente, ossia ipotizziamo  $m \leq n$ . Inoltre supponiamo che tale funzione abbia coefficienti reali o complessi coniugati. La funzione  $q(s)$  associa ad ogni punto nel piano complesso in cui essa è analitica, ossia ad ogni  $s=\sigma+j\omega$  in  $\mathbb{C} - \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ , un valore complesso  $q(s)=u+jv$ . I punti del sottoinsieme  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  si dicono punti di singolarità di  $q(s)$ . In altre parole,  $q(s)$  mappa i punti del piano  $s$  o  $(\sigma, \omega)$  in punti del piano  $q(s)$  o  $(u, v)$ . Ne consegue che ad ogni contorno  $\Gamma_s$  del piano  $s$  che non passa per punti singolari corrisponde un contorno  $\Gamma_q$  del piano  $(u, v)$ . Si consideri ora un generico contorno chiuso orientato  $\Gamma_s$  del piano  $s$ . Una regione di tale piano è detta “inclusa” dal contorno  $\Gamma_s$  se il contorno la circonda in senso orario.

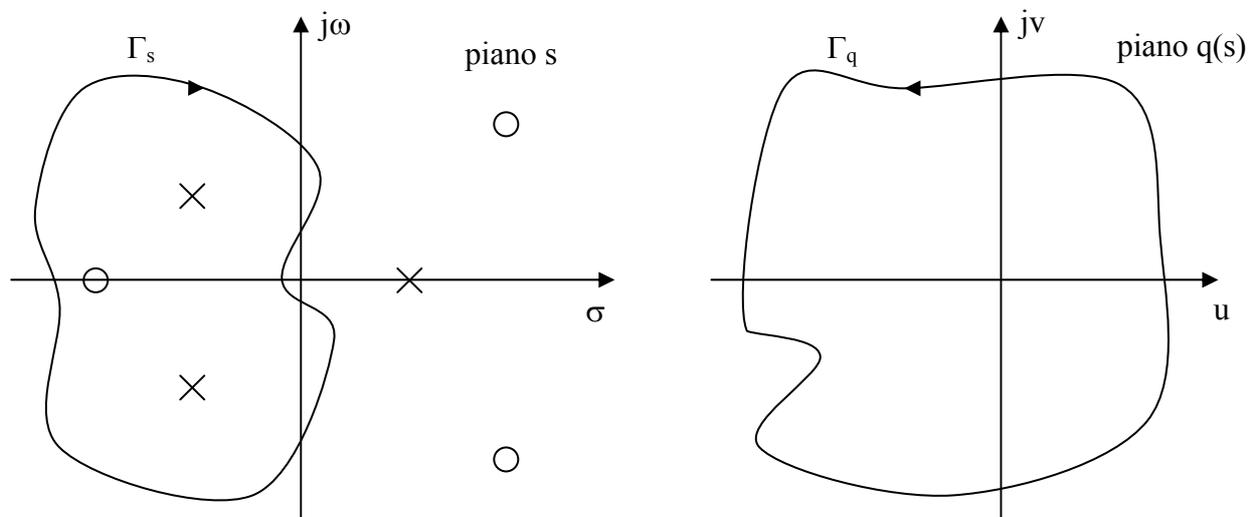
Il principio dell'argomento afferma che, dato un generico cammino chiuso in senso orario  $\Gamma_s$  nel piano  $(\sigma, \omega)$  che non passa per punti di singolarità di  $q(s)$ , detti  $n_p$  e  $n_z$  rispettivamente il numero di poli e di zeri di  $q(s)$  circondati da  $\Gamma_s$ , il fasore  $q(s)$ , nel descrivere il contorno  $\Gamma_q$  nel piano complesso  $(u, v)$ , circonda l'origine in senso orario un numero di volte pari a

$$\vec{N} = n_z - n_p.$$

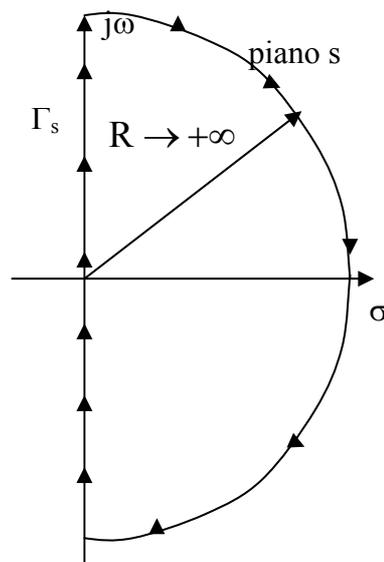
Ad esempio, con riferimento alle figure successive, e sorvolando sull'effettivo valore della funzione  $q(s)$  e sulle effettive forme dei contorni  $\Gamma_s$  e  $\Gamma_q$ , si ottiene che calcolando la funzione  $q(s)$  nei punti  $s \in \Gamma_s$  si individua nel piano complesso  $(u,v)$  un contorno chiuso  $\Gamma_q$  che contorna l'origine un numero di volte

$$\vec{N} = n_z - n_p = 1 - 2 = -1$$

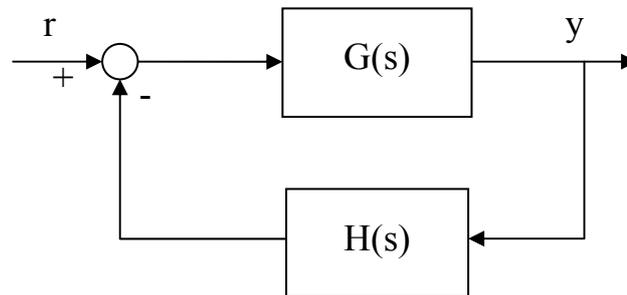
ossia circonda l'origine una volta in senso antiorario.



Il criterio di Nyquist discende dal principio dell'argomento e fa uso di un contorno  $\Gamma_s$  sul piano  $s$ , detto percorso di Nyquist, costituito dall'intero asse immaginario chiuso in senso orario da una semicirconfenza di raggio  $R$  infinito disposta nel semipiano destro, come in figura.



Sia ora il generico sistema in retroazione in figura.



Si consideri quindi come funzione  $q(s)$  la funzione a denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema, ossia

$$q(s) = 1 + G(s)H(s).$$

Evidentemente  $G(s)H(s)$  è la funzione di trasferimento di anello, supposta razionale fratta propria, nota e del tipo:

$$G(s)H(s) = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}.$$

Ne consegue che:

$$q(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \frac{(s - z'_1)(s - z'_2) \dots (s - z'_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}.$$

Evidentemente, la funzione  $q(s)$  ha  $n$  poli coincidenti con gli  $n$  poli in anello aperto del sistema, mentre i suoi  $n$  zeri, che sono le radici dell'equazione  $q(s)=0$  (l'equazione caratteristica), sono gli  $n$  poli in anello chiuso del sistema.

Supponiamo ora che  $q(s)$  non abbia poli sull'asse immaginario, in modo che il contorno  $\Gamma_s$  non contenga punti di singolarità di  $q(s)$  (questa restrizione verrà eliminata in seguito per il caso di poli in anello aperto disposti nell'origine). Siano ora  $P$  e  $Z$  il numero di poli e zeri di  $q(s)$  (cioè di poli in anello aperto e di poli in anello chiuso rispettivamente) che sono inclusi nel contorno  $\Gamma_s$ . In altre parole,  $P$  e  $Z$  rappresentano rispettivamente il numero di poli in anello aperto e di poli in anello chiuso del sistema disposti nel semipiano destro. Per il principio dell'argomento, il

contorno  $\Gamma_q$  o  $\Gamma_{1+GH}$  nel piano complesso è caratterizzato da un numero di giri intorno all'origine pari a:

$$\vec{N} = Z - P.$$

Se dunque tracciassimo questo contorno, noti  $\vec{N}$  (determinabile per via grafica) e  $P$  (dato per ipotesi) si potrebbe determinare  $Z$  e quindi analizzare la stabilità del sistema. Evidentemente, ottenendo  $Z$  non nullo si concluderebbe che il sistema in anello chiuso è instabile con  $Z$  poli nel semipiano destro, mentre  $Z=0$  indicherebbe che il sistema in anello chiuso è privo di poli nel semipiano destro, dunque tutte le singolarità di  $q(s)$  sarebbero disposte o nel semipiano sinistro o sull'asse immaginario.

Tuttavia questa tecnica richiederebbe il tracciamento del contorno  $\Gamma_{1+GH}$ , ovvero la determinazione e lo studio della funzione  $1+G(j\omega)H(j\omega)$ . Per evitare di tracciare il contorno  $\Gamma_{1+GH}$  si ricorre ad un artificio. È banale l'identità:

$$G(s)H(s) = 1 + G(s)H(s) - 1 = q(s) - 1.$$

Da tale identità consegue che il contorno  $\Gamma_{GH}$  di  $G(s)H(s)$ , immagine secondo  $G(s)H(s)$  del percorso di Nyquist nel piano  $s$ , è il contorno  $\Gamma_q$  traslato rispetto all'asse immaginario di una unità verso sinistra, ossia centrato non rispetto all'origine ma rispetto al punto  $-1+j0$ , che viene perciò detto punto critico.

Ne consegue che, noto il contorno  $\Gamma_{GH}$  di  $G(s)H(s)$ , vale ancora la relazione:

$$\vec{N} = Z - P$$

dove  $Z$  e  $P$  assumono l'interpretazione già data, mentre  $\vec{N}$  è il numero di giri in senso orario del contorno di  $\Gamma_{GH}$  non più rispetto all'origine degli assi ma rispetto al punto critico  $-1+j0$ .

Vediamo ora come tracciare il contorno  $\Gamma_{GH}$ . Si osserva che tale contorno è dato dai seguenti tratti: 1) l'immagine del semiasse immaginario positivo  $s=j\omega$  secondo  $G(s)H(s)$  orientato nel senso delle pulsazioni  $\omega$  crescenti da 0 a  $+\infty$ ; 2) l'immagine del semiasse immaginario negativo  $s=-j\omega$  secondo  $G(s)H(s)$  orientato nel senso delle pulsazioni  $\omega$  crescenti da  $-\infty$  a 0; 3) l'immagine della semicirconferenza di raggio

infinito, ovvero dei punti di modulo infinito e fase che varia da  $+\frac{\pi}{2}$  a  $-\frac{\pi}{2}$ , secondo  $G(s)H(s)$ .

Evidentemente, il primo tratto di tale contorno non è altro che il diagramma di  $GH(j\omega)$  nel piano complesso orientato al crescere delle pulsazioni positive, ossia il cosiddetto diagramma di Nyquist del sistema in anello aperto.

Inoltre, il secondo tratto di tale contorno non è altro che il diagramma di  $GH(-j\omega)$  nel piano complesso orientato al crescere delle pulsazioni negative. È noto che risulta

$$GH(-j\omega) = GH^*(j\omega)$$

e dunque tale parte del contorno è la curva data dal diagramma di Nyquist del sistema in anello aperto ribaltato rispetto all'asse reale, punteggiata nel senso delle pulsazioni negative crescenti.

Infine, il terzo tratto del contorno si ottiene calcolando  $GH(s)$  sul semicerchio di raggio infinito  $s = Re^{j\theta}$  con  $R \rightarrow +\infty$  e  $\theta$  variabile da  $+\frac{\pi}{2}$  a  $-\frac{\pi}{2}$ . Evidentemente, poiché la funzione di anello  $GH(s)$  è propria, se essa è strettamente propria ( $m < n$ ) risulta

$$GH(s) \Big|_{Re^{j\theta}} \Big|_{R \rightarrow +\infty} = \lim_{\substack{s=Re^{j\theta} \\ R \rightarrow +\infty}} K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_{nh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} s \right)}{(s)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} s \right)} = 0$$

mentre se essa è non strettamente propria ( $m = n$ ) tale limite è un numero reale pari al guadagno della funzione espressa in forma polo-zero:

$$GH(s) \Big|_{Re^{j\theta}} \Big|_{R \rightarrow +\infty} = \lim_{\substack{s=Re^{j\theta} \\ R \rightarrow +\infty}} K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_{nh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} s \right)}{(s)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} s \right)} = 0$$

In definitiva, tutti i punti del semicerchio di raggio infinito del contorno di Nyquist nel piano di Gauss vengono mappati nel piano di Nyquist dalla funzione  $q(s)$  o funzione denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso o nell'origine o in un altro punto sull'asse reale.

Per il calcolo di  $Z$  è dunque sufficiente seguire il seguente procedimento. Si traccia il contorno chiuso  $\Gamma_{GH}$  costituito dal diagramma di Nyquist  $GH(j\omega)$  orientato nel senso delle pulsazioni positive crescenti, dallo stesso diagramma ribaltato rispetto all'asse reale e orientato nel senso delle pulsazioni negative crescenti e da un punto (che si ottiene calcolando  $GH(j\omega)$  per  $\omega \rightarrow +\infty$ ) sull'asse reale. Si applica quindi il teorema di Nyquist ottenendo informazioni sulla stabilità del sistema in anello chiuso. In particolare, sono possibili i seguenti casi:

1) **il contorno  $\Gamma_{GH}$  non passa per il punto critico  $-1+j0$  e quindi si può determinare per via grafica il numero di giri in senso orario  $\vec{N}$  rispetto al punto critico e, noto  $P$  (numero di poli del sistema in anello aperto a parte reale positiva), si conosce per mezzo del teorema di Nyquist  $Z$  (numero di poli del sistema in anello chiuso a parte reale positiva), se  $Z > 0$  si conclude che il sistema in anello chiuso è instabile con  $Z$  poli disposti nel semipiano destro;**

2) **il contorno  $\Gamma_{GH}$  non passa per il punto critico  $-1+j0$  e quindi si determinano  $\vec{N}$  e, noto  $P$ , si conosce  $Z$ , se  $Z = 0$  allora il sistema in anello chiuso non presenta poli nel semipiano destro ed è banale concludere che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.** Se infatti così non fosse, essendo  $Z = 0$  e quindi non positivo, il sistema potrebbe al massimo presentare dei poli in anello chiuso disposti sull'asse immaginario, ossia del tipo  $\pm j\omega_0$  tali che sia verificata l'equazione caratteristica:

$$q(\pm j\omega_0) = 0,$$

ovvero

$$1 + GH(\pm j\omega_0) = 0,$$

o anche

$$GH(\pm j\omega_0) = -1,$$

che esprime il passaggio del contorno  $\Gamma_{GH}$  per il punto  $-1+j0$  quando  $\omega = \omega_0$ , il che è stato escluso per ipotesi.

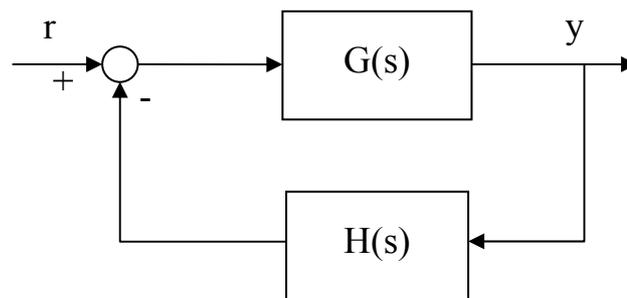
3) **il contorno  $\Gamma_{GH}$  passa per il punto critico** (non è quindi applicabile il teorema di Nyquist). Evidentemente vale la relazione

$$GH(\pm j\omega_0) = -1$$

per uno o più valori di pulsazione  $\omega = \omega_0$  e dunque **il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile, presentando una o più coppie di poli  $\pm j\omega_0$  (o un polo nell'origine se  $\omega_0 = 0$ ) sull'asse immaginario.**

In definitiva possiamo esprimere come segue il teorema di Nyquist nel caso in cui il sistema in anello aperto non presenti poli sull'asse immaginario.

**Teorema di Nyquist:** Sia  $GH(s)$  la funzione di trasferimento di anello, razionale fratta e propria, del generico sistema in figura, e supponiamo che tale funzione non abbia poli a parte reale nulla.



Sia  $P$  il numero di poli del sistema in anello aperto (ovvero di tale funzione di trasferimento di anello) che sono a parte reale positiva. Sia  $\vec{N}$  il numero complessivo di giri in senso orario che il contorno di Nyquist di  $GH(j\omega)$ , orientato nel verso delle pulsazioni  $\omega$  crescenti, compie intorno al punto  $-1+j0$ . Sia  $Z$  il numero delle radici dell'equazione caratteristica (ossia di poli in anello chiuso del sistema) a parte reale positiva, incognito.

Se il diagramma polare di  $GH(j\omega)$  non attraversa il punto  $-1+j0$ , si ha:

$$\vec{N} = Z - P$$

e se risulta  $Z=0$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, mentre per  $Z$  non nullo esso è instabile con  $Z$  poli in anello chiuso a parte reale positiva.

Nel caso in cui il contorno di Nyquist di  $GH(j\omega)$  attraversi il punto critico  $-1+j0$  per qualche valore della pulsazione  $\omega_0$ , allora a ciascun passaggio del diagramma per tale



$$q(s)=1+G(s)H(s)$$

e si traccia il contorno  $\Gamma_{GH}$  di  $G(s)H(s)$  corrispondente al contorno di Nyquist nel piano  $s$ . Confrontando tale contorno rispetto al punto  $-1+j0$ , per il principio dell'argomento si conclude ancora che vale la relazione:

$$\bar{N}=Z-P.$$

Si osserva che in questo caso il contorno  $\Gamma_{GH}$  è dato dai seguenti tratti: 1) il diagramma di Nyquist orientato nel senso delle pulsazioni  $\omega$  crescenti da 0 a  $+\infty$ ; 2) la curva data dal diagramma di Nyquist del sistema in anello aperto ribaltata rispetto all'asse reale, punteggiata nel senso delle pulsazioni negative crescenti; 3) l'immagine della semicirconferenza di raggio infinito, data dall'origine se  $m < n$  o da un punto sull'asse reale se  $m = n$ ; 4) l'immagine secondo  $GH(s)$  del semicerchio di raggio infinitesimo  $s = \varepsilon e^{j\theta}$  con  $\varepsilon \rightarrow 0$  e  $\theta$  variabile da  $-\frac{\pi}{2}$  a  $+\frac{\pi}{2}$ . Evidentemente, risulta:

$$\begin{aligned} GH(s)|_{\varepsilon e^{j\theta}} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} &= \lim_{\substack{s = \varepsilon e^{j\theta} \\ \varepsilon \rightarrow 0}} K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + T_j s) \prod_{h=1}^q \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_{nh}^2} + \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} s \right)}{(s)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + T_i s) \prod_{k=1}^w \left( 1 + \frac{s^2}{\omega_{nk}^2} + \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} s \right)} = \\ &= \lim_{\substack{s = \varepsilon e^{j\theta} \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{K}{(s)^\mu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{(\varepsilon e^{j\theta})^\mu} = \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{K}{\varepsilon} \right) e^{-j\theta\mu}, \end{aligned}$$

che è un fasore di modulo infinito e fase che, essendo  $\theta$  variabile da  $-\frac{\pi}{2}$  a  $+\frac{\pi}{2}$ , parte da  $\arg(K) + \mu \frac{\pi}{2}$  e varia di  $-\mu\pi$  sino a  $\arg(K) - \mu \frac{\pi}{2}$ , ovvero corrisponde ad una variazione di fase  $\Delta\theta = \arg(K) - \mu \frac{\pi}{2} - (\arg(K) + \mu \frac{\pi}{2}) = -\mu\pi$  e cioè ad una rotazione di  $+\mu\pi$  radianti in senso orario del fasore corrispondente.

Si deduce che il quarto tratto del contorno  $\Gamma_{GH}$ , ovvero la curva di chiusura del diagramma di Nyquist, è una curva all'infinito, che ha verso di percorrenza orario. In

particolare, partendo dal punto all'infinito del diagramma polare corrispondente alla pulsazione  $0^-$  e tracciando la curva di chiusura fino al punto disposto all'infinito corrispondente alla pulsazione  $0^+$ , la fase di tale fasore varia  $\mu$  volte  $\pi$ , quindi la chiusura del diagramma è una curva all'infinito che compie tanti mezzi giri (cioè tante rotazioni di  $\pi$ ), in senso orario intorno all'origine degli assi quanti sono i poli nell'origine.

Pertanto se  $\mu=1$  la cosiddetta chiusura del diagramma è una semicirconferenza che compie un mezzo giro in senso orario da  $0^-$  a  $0^+$ . Se invece  $\mu=2$  la chiusura è una circonferenza che compie un giro completo in senso orario da  $0^-$  a  $0^+$ . Analogo è il caso di poli in anello aperto nell'origine con molteplicità maggiore.

Dunque anche nel caso siano presenti poli nell'origine in anello aperto vale il teorema di Nyquist precedentemente esposto e precisamente se il diagramma polare di  $GH(j\omega)$  non attraversa il punto  $-1+j0$ , si ha:

$$\vec{N} = Z - P$$

dove  $\vec{N}$ ,  $Z$  e  $P$  hanno i significati già espressi. Se dunque risulta  $Z=0$  il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, mentre per  $Z$  non nullo esso è instabile con  $Z$  poli in anello chiuso a parte reale positiva.

Nel caso in cui il contorno di Nyquist di  $GH(j\omega)$  attraversi il punto critico  $-1+j0$  per qualche valore della pulsazione  $\omega_0$ , allora a ciascun passaggio del diagramma per tale punto critico corrisponde un polo in anello chiuso posto sull'asse immaginario e con modulo pari a  $\omega_0$ , quindi il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile.

Dal teorema precedente si deducono due importanti corollari.

## CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST

Dal teorema di Nyquist deriva il criterio di stabilità di Nyquist.

Un sistema chiuso in retroazione con funzione di risposta armonica in anello aperto  $GH(j\omega)$  e  $P$  poli in anello aperto a parte reale positiva è asintoticamente stabile se e solo se risulta  $Z=0$ , ovvero

$$\vec{N} = -P,$$

dove  $\vec{N}$  è il numero complessivo di giri in senso orario che il diagramma di Nyquist di  $GH(j\omega)$  compie intorno al punto critico.

### **CRITERIO DI STABILITÀ DI NYQUIST RIDOTTO**

Un sistema chiuso in retroazione con funzione di risposta armonica in anello aperto  $GH(j\omega)$  che non ha poli in anello aperto nel semipiano destro di Gauss (ovvero per il quale sia  $P=0$ ) è asintoticamente stabile se e solo se il diagramma di Nyquist di  $GH(j\omega)$  non passa per e non circonda il punto critico, ovvero se e solo se risulta  $Z=0$ , ossia:

$$\vec{N}=0.$$

## REGOLE PER IL TRACCIAMENTO DEI DIAGRAMMI DI NYQUIST

Consideriamo dunque un generico sistema chiuso in retroazione con funzione di risposta armonica in anello aperto espressa nella forma in costanti di tempo:

$$GH(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j\omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i\omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)},$$

con grado  $m=p+2q$  del polinomio in  $\omega$  al numeratore e con grado  $n=\mu+v+2w$  del polinomio in  $\omega$  al denominatore tali che  $m \leq n$  (funzione di trasferimento fisicamente realizzabile).

Nel seguito enunciamo alcune regole pratiche fondamentali per il tracciamento qualitativo del diagramma polare di un generico sistema del tipo suddetto, di solito sufficiente ai fini dell'applicazione del teorema di Nyquist e dei suoi corollari per l'analisi della stabilità del sistema chiuso in retroazione.

Per tracciare il diagramma polare di una generica funzione di risposta armonica  $GH(j\omega)$ , ci interessiamo per il momento solo ai valori delle pulsazioni  $\omega$  compresi nell'intervallo  $[0, +\infty[$ , quindi estendiamo l'analisi all'intervallo  $]-\infty, 0]$ .

### REGOLA 1: COMPORTAMENTO ALLE BASSE FREQUENZE

Nell'ambito dell'intervallo  $[0, +\infty[$ , consideriamo l'andamento del diagramma polare alle basse frequenze, ossia l'andamento di  $GH(j\omega)$  per  $\omega \rightarrow 0^+$ . Evidentemente si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} |K| \frac{\prod_{j=1}^p |1 + jT_j\omega| \prod_{h=1}^q \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right|}{\omega^\mu \prod_{i=1}^v |1 + jT_i\omega| \prod_{k=1}^w \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right|} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{|K|}{\omega^\mu} = \begin{cases} |K| & \text{se } \mu = 0 \quad (\text{non vi sono poli nell'origine in anello aperto}) \\ +\infty & \text{se } \mu \neq 0 \quad (\text{vi sono poli nell'origine in anello aperto}) \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre risulta:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg(GH(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg \left( K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j\omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i\omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)} \right) =$$

$$= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \arg \left( \frac{K}{(j\omega)^\mu} \right) = \angle K - \mu \frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \text{ e } \mu = 0 \\ -\pi & \text{se } K < 0 \text{ e } \mu = 0 \\ -\mu \frac{\pi}{2} & \text{se } K > 0 \text{ e } \mu \neq 0 \\ -\pi - \mu \frac{\pi}{2} & \text{se } K < 0 \text{ e } \mu \neq 0 \end{cases}$$

In definitiva, se in anello aperto non vi sono poli nell'origine il diagramma parte da un punto sull'asse reale, in particolare sul semiasse reale positivo per  $K$  positivo, e su quello reale negativo per  $K$  negativo.

Se invece la funzione di risposta armonica in anello aperto presenta  $\mu$  poli nell'origine, allora il diagramma parte da un punto del piano di Gauss posto all'infinito, con fase pari a  $-\mu \frac{\pi}{2}$  se il guadagno statico in anello aperto è positivo, pari a  $-\pi - \mu \frac{\pi}{2}$  in caso contrario.

## **REGOLA 2: ASINTOTO VERTICALE**

Consideriamo il caso particolare in cui il sistema in anello aperto presenti un solo polo nell'origine, ossia

$$GH(j\omega) = K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j\omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{j\omega \prod_{i=1}^v (1 + jT_i\omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)},$$

ovvero

$$GH(j\omega) = K' \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)(a_n(j\omega)^{n-1} + a_{n-1}(j\omega)^{n-2} + \dots + a_2(j\omega) + a_1)}$$

dove si è messo in evidenza che il termine noto della funzione di trasferimento di anello aperto  $a_0$  è nullo, essendoci in anello aperto un polo semplice nell'origine.

Per la regola 1, sappiamo che il diagramma di Nyquist parte con fase pari a  $\pm \frac{\pi}{2}$ , a seconda del segno del guadagno statico  $K$ , da un punto del piano di Gauss all'infinito, essendo:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| = +\infty.$$

Tuttavia è possibile dimostrare che, nonostante il modulo di  $GH(j0)$  sia infinito, la parte reale risulta sempre finita:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}(GH(j\omega)) = \sigma_0 \in \mathfrak{R},$$

mentre la parte immaginaria assume valore infinito.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}(GH(j\omega)) = \pm\infty.$$

In altre parole, il diagramma di Nyquist presenta un asintoto verticale.

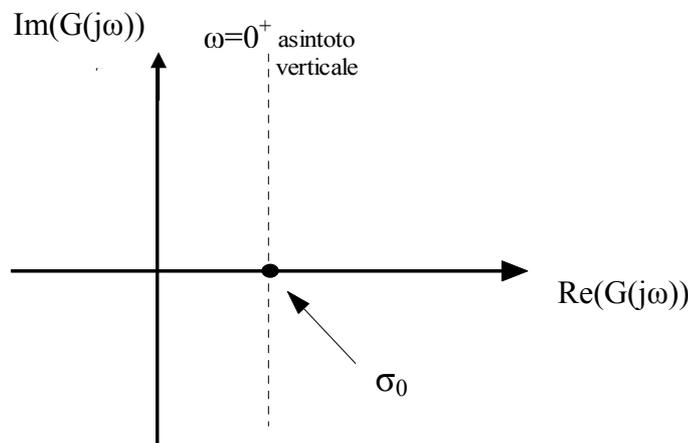
Infatti, se studiamo il sistema in bassa frequenza si ha:

$$\begin{aligned} GH(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+} &\simeq \frac{K'}{j\omega} \cdot \frac{b_1(j\omega) + b_0}{a_2(j\omega) + a_1} = \frac{-jK'}{\omega} \cdot \frac{(b_0 + b_1(j\omega))(a_1 - a_2(j\omega))}{(a_1^2 + a_2^2\omega^2)} = \\ &= \frac{-jK'((b_0a_1 + b_1a_2\omega^2) + j\omega(b_1a_1 - b_0a_2))}{\omega(a_1^2 + a_2^2\omega^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{K'(b_1 a_1 - b_0 a_2)}{a_1^2 + a_2^2 \omega^2} - j \frac{K'(b_0 a_1 + b_1 a_2 \omega^2)}{\omega(a_1^2 + a_2^2 \omega^2)} \underset{\omega \rightarrow 0^+}{\approx} \\
&\approx \frac{K'(b_1 a_1 - b_0 a_2)}{a_1^2} - j \frac{b_0 a_1 K'}{a_1^2 \omega} \Big|_{\omega \rightarrow 0^+} = \sigma_0 \pm j\infty
\end{aligned}$$

che è un punto avente parte reale finita e parte immaginaria infinita, di segno che dipende dalla funzione di trasferimento in anello aperto data, e si ottiene in corrispondenza della pulsazione nulla.

La situazione descritta è rappresentata in figura.



La figura fa chiaramente riferimento al caso in cui  $\sigma_0 > 0$  e al punto  $\omega=0^+$  corrisponde il punto  $\sigma_0 + j\infty$  (ovvero risulta  $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| = +\infty$  e  $\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle GH(j\omega) = +\frac{\pi}{2}$ ), ma può evidentemente anche risultare che sia  $\sigma_0 < 0$  e/o che e al punto  $\omega=0^+$  corrisponda il punto  $\sigma_0 - j\infty$ .

### **REGOLA 3: COMPORTAMENTO ALLE ALTE FREQUENZE**

Nell'ambito dell'intervallo  $[0, +\infty[$ , consideriamo ora l'andamento del diagramma polare alle alte frequenze, ossia l'andamento di  $GH(j\omega)$  per  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Evidentemente si ha:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |GH(j\omega)| &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |K| \frac{\prod_{j=1}^p |1 + jT_j\omega| \prod_{h=1}^q \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right|}{\omega^\mu \prod_{i=1}^v |1 + jT_i\omega| \prod_{k=1}^w \left| 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right|} = \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |K| \frac{\prod_{j=1}^p |jT_j\omega| \prod_{h=1}^q \left| -\frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} \right|}{\omega^\mu \prod_{i=1}^v |jT_i\omega| \prod_{k=1}^w \left| -\frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} \right|} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |K| \frac{\prod_{j=1}^p |T_j| \prod_{k=1}^w \left| \omega_{nk}^2 \right|}{\prod_{i=1}^v |T_i| \prod_{h=1}^q \left| \omega_{nh}^2 \right|} \omega^{p+2q-\mu-v-2w} = \\
 &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} |K'| \omega^{m-n} = \begin{cases} |K'| & \text{se } m = n \\ 0 & \text{se } m < n \end{cases}
 \end{aligned}$$

Inoltre risulta:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg(GH(j\omega)) &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \arg \left( K \frac{\prod_{j=1}^p (1 + jT_j\omega) \prod_{h=1}^q \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)}{(j\omega)^\mu \prod_{i=1}^v (1 + jT_i\omega) \prod_{k=1}^w \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nk}^2} + j \frac{2\delta_k}{\omega_{nk}} \omega \right)} \right) = \\
 &= \angle K - \mu \frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^p \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle(1 + jT_j\omega) + \sum_{h=1}^q \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right) - \\
 &\quad - \sum_{i=1}^v \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right) - \sum_{k=1}^w \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_{nh}^2} + j \frac{2\delta_h}{\omega_{nh}} \omega \right)
 \end{aligned}$$

In definitiva, se la funzione di trasferimento in anello aperto ha grado del numeratore pari a quello del denominatore, allora il diagramma giunge per  $\omega \rightarrow +\infty$  in un punto al finito del piano di Gauss, con fase che dipende dal guadagno statico e dalle singolarità della funzione di trasferimento in anello aperto. Si può dimostrare che tale fase vale sempre 0 o  $-\pi$ , ossia il punto di arrivo del diagramma per  $\omega \rightarrow +\infty$  è disposto sull'asse reale.

Se invece la funzione di risposta armonica in anello aperto ha grado del numeratore inferiore a quello del denominatore, allora il diagramma giunge per  $\omega \rightarrow +\infty$  nell'origine del piano di Gauss, con fase che dipende dal guadagno statico e dalle

singularità della funzione di trasferimento in anello aperto. Applicando le note regole dei diagrammi di Bode delle fasi per  $\omega \rightarrow +\infty$  si deduce che in tal caso il diagramma termina nell'origine essendo tangente a uno degli assi, ossia con fase che vale sempre 0, o  $-\pi/2$ , o  $-\pi$ , o  $-3\pi/2$ .

Osserviamo inoltre che i contributi di fase per  $\omega \rightarrow +\infty$  sono dovuti ai termini elementari descritti con i diagrammi di Bode, e sono dunque noti.

#### **REGOLA 4: COMPORTAMENTO ALLE FREQUENZE INTERMEDIE**

Nell'ambito dell'intervallo  $[0, +\infty[$ , consideriamo ora l'andamento del diagramma polare per pulsazioni comprese tra i due estremi dell'intervallo.

Si possono trarre ben poche conclusioni analitiche a proposito di tale andamento: la determinazione puntuale dell'andamento di  $GH(j\omega)$  per pulsazioni intermedie può essere fatta solo calcolando la sua parte reale e la sua parte immaginaria per diversi valori di  $\omega$ .

Si può comunque determinare il valore di  $GH(j\omega)$  in alcuni punti notevoli.

Si individuano quindi le espressioni delle funzioni reali della pulsazione  $\omega$  date dalla parte reale  $\text{Re}(GH(j\omega))$  e dalla parte immaginaria  $\text{Im}(GH(j\omega))$  della funzione di risposta armonica.

Si determinano quindi le eventuali intersezioni di  $GH(j\omega)$  con gli assi coordinati, attraverso le equazioni:

$$\text{Re}(GH(j\omega)) = 0,$$

$$\text{Im}(GH(j\omega)) = 0$$

e si riportano sul diagramma i punti notevoli determinati.

Quindi si studiano i segni delle funzioni  $\text{Re}(GH(j\omega))$  e  $\text{Im}(GH(j\omega))$ , individuando in quali quadranti del piano di Gauss si trova la curva rappresentativa del diagramma polare al variare dei valori della pulsazione  $\omega$ .

### **REGOLA 5: DIAGRAMMA PER PULSAZIONI NEGATIVE**

Abbiamo determinato l'andamento del diagramma polare di  $GH(j\omega)$  per pulsazioni  $\omega$  che variano nell'intervallo  $[0, +\infty[$ .

Come è noto, è possibile definire la funzione di risposta armonica  $GH(j\omega)$  anche per pulsazioni  $\omega$  negative, solo che per tali valori di pulsazioni il numero complesso  $GH(j\omega)$  non ha alcun significato fisico.

Consideriamo quindi la funzione di trasferimento  $GH(s)$  del generico sistema chiuso in retroazione, cui è associata la funzione di risposta armonica in  $[0, +\infty[$ :

$$GH(j\omega) = GH(s)|_{s=j\omega} = \operatorname{Re}(GH(j\omega)) + j\operatorname{Im}(GH(j\omega)).$$

Per una nota proprietà della trasformata di Laplace, si ha:

$$G(s^*) = G^*(s)$$

da cui

$$GH(-j\omega) = GH((j\omega)^*) = GH^*(j\omega) = \operatorname{Re}(GH(j\omega)) - j\operatorname{Im}(GH(j\omega)).$$

In definitiva, il diagramma di Nyquist per  $\omega \in ]-\infty, 0]$  si ottiene semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse il diagramma ottenuto per  $\omega \in [0, +\infty[$ .

### **REGOLA 6: CHIUSURA ALL'INFINITO DEL DIAGRAMMA**

L'ultimo passo per la determinazione del diagramma di Nyquist di una funzione di risposta armonica  $GH(j\omega)$  consiste nel chiudere la curva ottenuta per  $\omega \in ]-\infty, +\infty[$ . Ciò è necessario in quanto l'applicazione del teorema di Nyquist richiede la determinazione del numero di giri che il diagramma polare, percorso secondo le pulsazioni crescenti, compie in senso orario intorno al punto critico  $-1+j0$ . Ne consegue che la curva rappresentativa deve essere chiusa.

È noto che, nel caso la funzione di trasferimento in anello aperto  $GH(s)$  non presenti poli sull'asse immaginario (e quindi non presenti neanche poli in anello aperto nell'origine), la curva che si ottiene rappresentando  $GH(j\omega)$  per  $\omega \in ]-\infty, +\infty[$  è chiusa, dunque non occorre determinare la chiusura del diagramma.

Se invece sono presenti poli sull'asse immaginario, è necessario effettuare la chiusura della curva.

Nel seguito consideriamo unicamente la presenza di poli nell'origine in anello aperto, tralasciando il caso più raro di poli in anello aperto immaginari puri.

Abbiamo dimostrato analiticamente che la curva di chiusura del diagramma è una curva all'infinito, che ha verso di percorrenza orario.

In particolare, partendo dal punto del diagramma polare corrispondente a  $0^-$  e tracciando la curva di chiusura fino al punto corrispondente a  $0^+$ , la chiusura compie tanti mezzi giri (cioè tante rotazioni di  $\pi$ ), in senso orario intorno all'origine degli assi quanti sono i poli nell'origine.

Quindi se  $\mu=1$  la chiusura avviene mediante una curva (che può essere approssimata mediante una semicirconferenza) che compie un mezzo giro in senso orario da  $0^-$  a  $0^+$ .

Se invece  $\mu=2$  la chiusura avviene mediante una curva (che può essere approssimata mediante una circonferenza) che compie un giro completo in senso orario da  $0^-$  a  $0^+$ .

### **ESEMPIO (RETE RITARDATRICE)**

Tracciare il diagramma di Nyquist della rete ritardatrice:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s} \quad \text{con } \tau > 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1.$$

La funzione è già in forma di costanti di tempo. Essa presenta  $m=1$  zero e  $n=1$  polo in anello aperto. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto. La funzione di risposta armonica associata vale:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\alpha\tau\omega}{1 + j\tau\omega}.$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive.

Si ha:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}},$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg(\alpha\tau\omega) - \arctg(\tau\omega),$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1 + j\alpha\tau\omega}{1 + j\tau\omega} = \frac{(1 + j\alpha\tau\omega)(1 - j\tau\omega)}{(1 + \tau^2\omega^2)} = \frac{1 + j\tau(\alpha - 1)\omega + \alpha\tau^2\omega^2}{(1 + \tau^2\omega^2)} = \\ &= \frac{1 + \alpha\tau^2\omega^2}{(1 + \tau^2\omega^2)} - j \frac{\tau(1 - \alpha)\omega}{(1 + \tau^2\omega^2)}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{1 + \alpha\tau^2\omega^2}{(1 + \tau^2\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = -\frac{\tau(1 - \alpha)\omega}{(1 + \tau^2\omega^2)}$$

Studiamo inizialmente il comportamento per pulsazioni positive  $\omega$ . In particolare, analizziamo il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = 1,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0.$$

Deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo dalla conoscenza dei diagrammi di Bode della rete, parte dal punto (1,0) situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{|j\alpha\tau\omega|}{|j\tau\omega|} = \alpha,$$

che è reale, essendo  $m=n$ . Inoltre si hanno uno zero e un polo a fase minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase rispettivamente di  $+90^\circ$  e  $-90^\circ$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dunque il diagramma termina nel punto  $(\alpha, 0)$  situato sul semiasse reale positivo.

È evidente che non vi sono intersezioni con gli assi per  $\omega \in ]0, +\infty[$ , poiché le due equazioni:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0,$$

non ammettono soluzione per  $\omega > 0$ . Si ha inoltre:

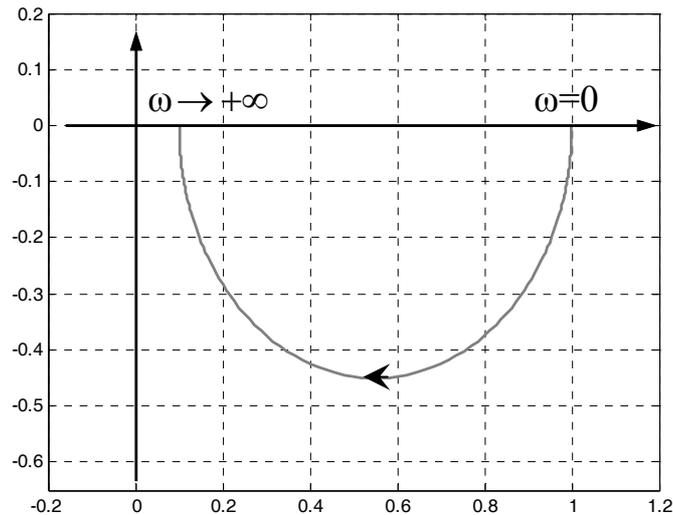
$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{1 + \alpha\tau^2\omega^2}{(1 + \tau^2\omega^2)} > 0 \quad \forall \omega > 0$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = -\frac{\tau(1 - \alpha)\omega}{(1 + \tau^2\omega^2)} < 0 \quad \forall \omega > 0$$

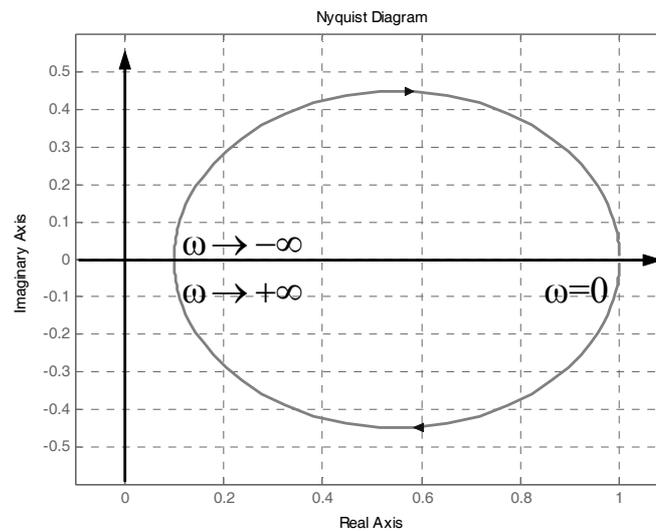
Dalle precedenti equazioni si deduce che il diagramma di Nyquist del sistema si svolge tutto nel quarto quadrante del piano complesso.

Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive. Si tratta di una curva disposta nel quarto quadrante del piano di Gauss che si può dimostrare essere una semicirconferenza.



Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $G(j\omega)$  è il seguente.



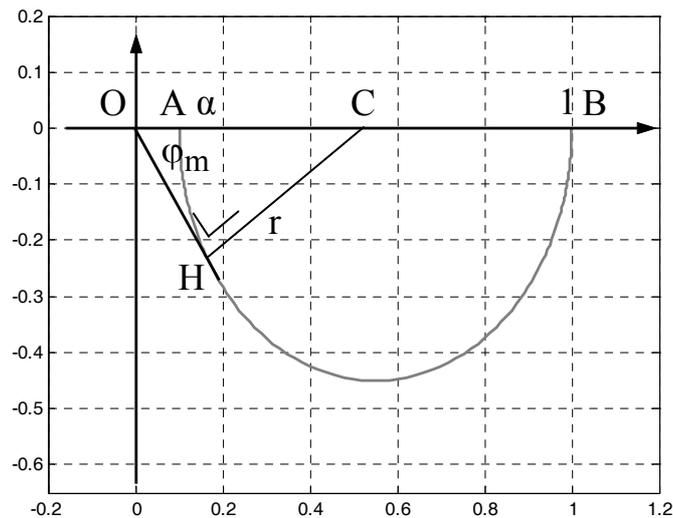
Il sistema è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

Osserviamo che il massimo ritardo introdotto dalla rete (e misurato positivamente) si ottiene semplicemente tracciando dall'origine degli assi il raggio vettore tangente al diagramma polare quando le pulsazioni sono positive.

Si ha dunque, con riferimento alla figura successiva:

$$CH = CO \operatorname{sen} \varphi_m$$

$$\Rightarrow r = (\alpha + r) \operatorname{sen} \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \operatorname{arcsen} \frac{r}{\alpha + r} = \operatorname{arcsen} \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\alpha + \frac{1-\alpha}{2}} = \operatorname{arcsen} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$



### ESEMPIO (RETE ANTICIPATRICE PASSIVA)

Tracciare il diagramma di Nyquist della rete anticipatrice:

$$G(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \text{con } \tau > 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1.$$

La funzione è già in forma di costanti di tempo. Essa presenta  $m=1$  zero e  $n=1$  polo in anello aperto. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto. La funzione di risposta armonica associata vale:

$$G(j\omega) = \alpha \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega}.$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive.

Si ha:

$$|G(j\omega)| = \alpha \frac{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2}},$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg(\tau\omega) - \arctg(\alpha\tau\omega),$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \alpha \frac{1 + j\tau\omega}{1 + j\alpha\tau\omega} = \alpha \frac{(1 + j\tau\omega)(1 - \alpha j\tau\omega)}{(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2)} = \alpha \frac{1 + j\tau(1 - \alpha)\omega + \alpha\tau^2 \omega^2}{(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2)} = \\ &= \alpha \frac{1 + \alpha\tau^2 \omega^2}{(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2)} + j \frac{\alpha\tau(1 - \alpha)\omega}{(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2)}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \alpha \frac{1 + \alpha\tau^2 \omega^2}{(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{\alpha\tau(1 - \alpha)\omega}{(1 + \alpha^2 \tau^2 \omega^2)}$$

Studiamo inizialmente il comportamento per pulsazioni positive  $\omega$ . In particolare, analizziamo il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = \alpha,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0.$$

Deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo, parte dal punto  $(\alpha, 0)$  situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \alpha \frac{|j\tau\omega|}{|j\alpha\tau\omega|} = 1,$$

che è reale, essendo  $m=n$ . Inoltre si hanno uno zero e un polo a fase minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase rispettivamente di  $+90^\circ$  e  $-90^\circ$ , oltre ad un guadagno positivo che non sfasa:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dunque il diagramma termina nel punto  $(1,0)$  situato sul semiasse reale positivo.

È evidente che non vi sono intersezioni con gli assi, poiché le due equazioni:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0,$$

non ammettono soluzione per  $\omega > 0$ . Si ha inoltre:

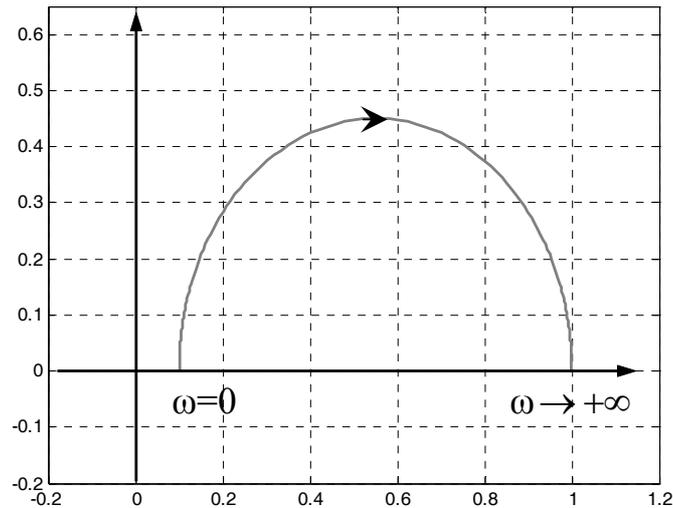
$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \alpha \frac{1 + \alpha\tau^2\omega^2}{(1 + \alpha^2\tau^2\omega^2)} > 0 \quad \forall \omega > 0$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{\alpha\tau(1 - \alpha)\omega}{(1 + \alpha^2\tau^2\omega^2)} > 0 \quad \forall \omega > 0$$

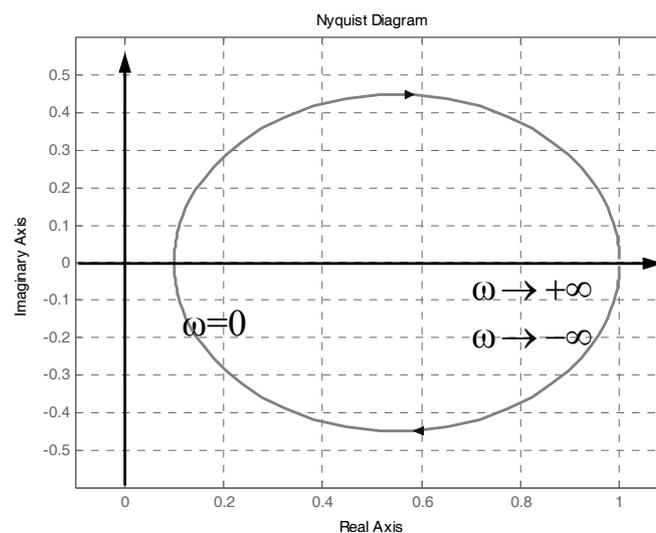
Dalle precedenti equazioni si deduce che il diagramma di Nyquist del sistema si svolge tutto nel primo quadrante del piano complesso.

Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive. Si tratta di una curva disposta nel primo quadrante del piano di Gauss che si può dimostrare essere una semicirconferenza.



Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $G(j\omega)$  è il seguente.



Il sistema è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

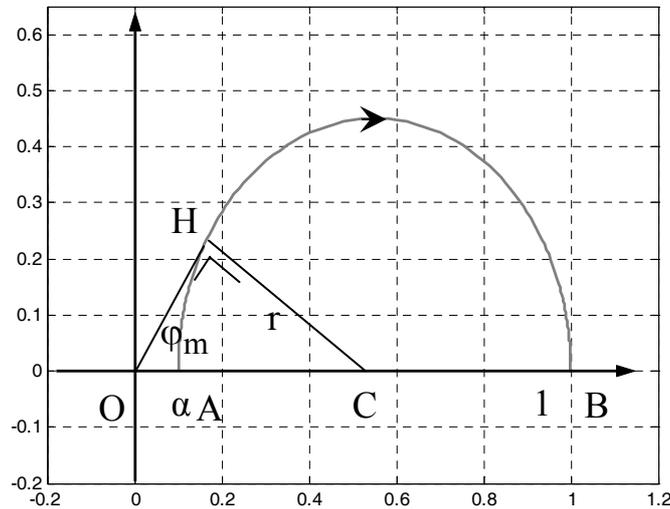
Osserviamo che il massimo anticipo introdotto dalla rete si ottiene semplicemente tracciando dall'origine degli assi il raggio vettore tangente al diagramma polare quando le pulsazioni sono positive.

Si ha dunque, con riferimento alla figura successiva:

*Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.*

$$CH = C \cos \varphi_m$$

$$\Rightarrow r = (\alpha + r) \sin \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \arcsen \frac{r}{\alpha + r} = \arcsen \frac{\frac{1-\alpha}{2}}{\alpha + \frac{1-\alpha}{2}} = \arcsen \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$



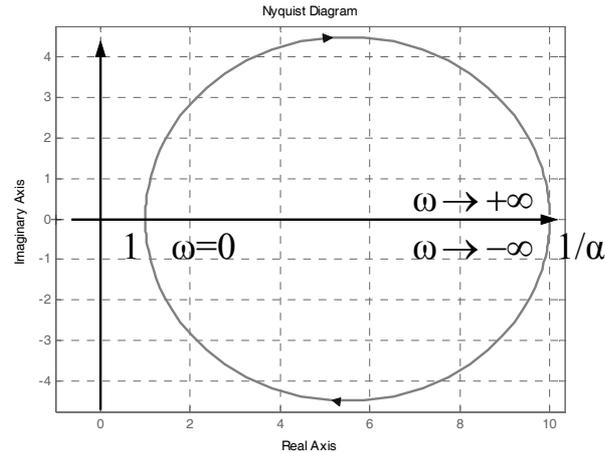
**ESEMPIO (RETE ANTICIPATRICE ATTIVA)**

Tracciare il diagramma di Nyquist della rete anticipatrice:

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \text{ con } \tau > 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1.$$

Il diagramma è analogo a quello della funzione di risposta armonica vista precedentemente, con l'eccezione che il modulo è moltiplicato per  $\frac{1}{\alpha}$ . Il diagramma polare qualitativo di  $G(j\omega)$  è il seguente.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.



### ESEMPIO (RETE RITARDOANTICIPO)

Tracciare il diagramma di Nyquist della rete ritardo-antico:

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\left(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} s\right)(1 + \alpha \tau_2 s)} \quad \text{con } \tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \tau_1 > \tau_2 \text{ e } 0 < \alpha < 1.$$

La funzione è già in forma di costanti di tempo. Essa presenta  $m=2$  zeri e  $n=2$  poli in anello aperto. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto. La funzione di risposta armonica associata vale:

$$G(j\omega) = \frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}{\left(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} j\omega\right)(1 + \alpha \tau_2 j\omega)}.$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive.

Si ha:

$$|G(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2} \omega^2} \sqrt{1 + \alpha^2 \tau_2^2 \omega^2}},$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg(\tau_1\omega) - \arctg\left(\frac{\tau_1}{\alpha}\omega\right) + \arctg(\tau_2\omega) - \arctg(\alpha\tau_2\omega).$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{(1 + \tau_1 j\omega)(1 + \tau_2 j\omega)}{\left(1 + \frac{\tau_1}{\alpha} j\omega\right)(1 + \alpha\tau_2 j\omega)} = \frac{(1 + j\tau_1\omega)\left(1 - \frac{\tau_1}{\alpha} j\omega\right)(1 + \tau_2 j\omega)(1 - \alpha j\tau_2\omega)}{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{(\alpha-1)}{\alpha}\tau_1 j\omega + \frac{\tau_1^2}{\alpha}\omega^2\right)\left(1 + (1-\alpha)\tau_2 j\omega + \alpha\tau_2^2\omega^2\right)}{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)} = \\ &= \frac{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha}\omega^2\right)\left(1 + \alpha\tau_2^2\omega^2\right) + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\tau_1\tau_2\omega^2}{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)} + \\ &+ j(1-\alpha)\frac{(\alpha\tau_2 - \tau_1) + (\tau_1^2\tau_2 - \alpha\tau_1\tau_2^2)\omega^2}{\alpha\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)}\omega \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(G(j\omega)) &= \frac{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha}\omega^2\right)\left(1 + \alpha\tau_2^2\omega^2\right) + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\tau_1\tau_2\omega^2}{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)} \\ \operatorname{Im}(G(j\omega)) &= (1-\alpha)\frac{(\alpha\tau_2 - \tau_1)(1 - \tau_1\tau_2\omega^2)}{\alpha\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)}\omega \end{aligned}$$

Studiamo inizialmente il comportamento per pulsazioni positive  $\omega$ . In particolare, analizziamo il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = 1,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0.$$

Deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo, parte dal punto (1,0) situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{|j\tau_1\omega||j\tau_2\omega|}{|j\tau_2/\alpha\omega||j\alpha\tau_2\omega|} = 1,$$

che è reale, essendo  $m=n$ . Inoltre si hanno due zeri e due poli a fase minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase rispettivamente di  $+90^\circ$  e  $-90^\circ$ , oltre ad un guadagno positivo che non sfa:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = +\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Dunque il diagramma termina nel punto (1,0) situato sul semiasse reale positivo.

È evidente che non vi sono intersezioni con l'asse delle ordinate, poiché l'equazione:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0,$$

non ammette soluzione per  $\omega > 0$ . Si ha inoltre:

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0,$$

quando risulta

$$1 - \tau_1\tau_2\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}$$

dove si è scelto il solo valore positivo della pulsazione poiché stiamo effettuando lo studio del diagramma polare per le sole pulsazioni positive. In definitiva l'intersezione con l'asse reale si ha per una pulsazione pari alla media geometrica tra i due zeri, come è noto dai diagrammi di Bode (infatti in  $\omega_m$  la fase è nulla).

Si verifica poi che risulta:

$$G(j\omega_m) = G\left(j\frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}\right) = \frac{\alpha(\tau_1 + \tau_2)}{(\tau_1 + \alpha^2\tau_2)} < 1.$$

Inoltre

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha}\omega^2\right)\left(1 + \alpha\tau_2^2\omega^2\right) + \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}\tau_1\tau_2\omega^2}{\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)} > 0 \quad \forall \omega > 0.$$

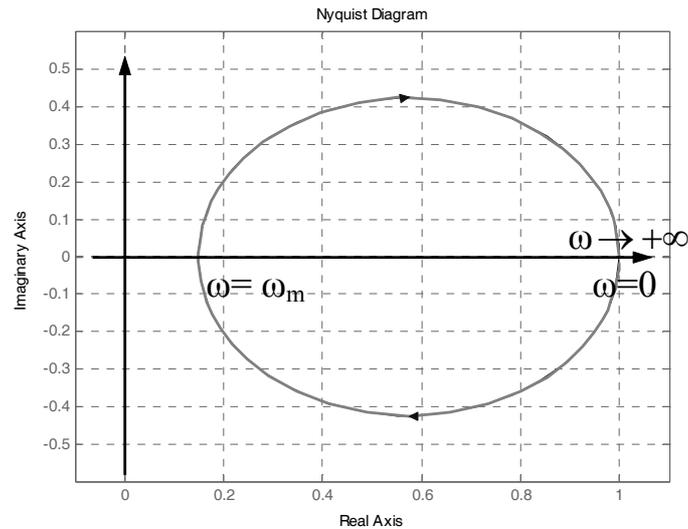
mentre

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = (1-\alpha) \frac{(\alpha\tau_2 - \tau_1)(1 - \tau_1\tau_2\omega^2)}{\alpha\left(1 + \frac{\tau_1^2}{\alpha^2}\omega^2\right)\left(1 + \alpha^2\tau_2^2\omega^2\right)} \omega > 0 \Leftrightarrow$$

$$1 - \tau_1\tau_2\omega^2 < 0 \Leftrightarrow \forall \omega > \omega_m$$

poiché, essendo  $\tau_2 < \tau_1$  e  $\alpha < 1$ , evidentemente risulta  $\alpha\tau_2 < \tau_1$ , ossia  $\alpha\tau_2 - \tau_1 < 0$ . Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Dalle precedenti equazioni si deduce che il diagramma di Nyquist del sistema si svolge tutto nel primo e secondo quadrante del piano complesso. Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive.



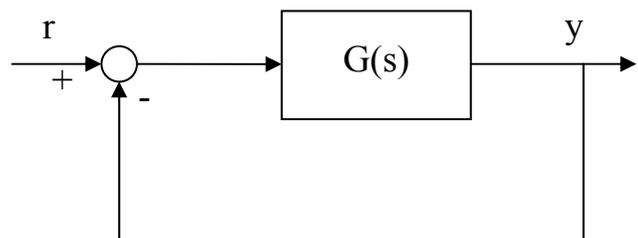
Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto, quindi il diagramma resta invariato ma viene percorso due volte per  $\omega \in ]-\infty, +\infty[$ .

Il sistema è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

### ESEMPIO

Sia il sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = 3 \frac{(1 + 5s)}{(1 - 5s)}$$



Il sistema è chiuso in retroazione unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione ha  $m=1$  zeri e  $n=1$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=1$ , infatti un polo in anello aperto ( $s=0.2$ ) si trova nel semipiano destro di Gauss. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto. La funzione è già fattorizzata nella forma delle costanti di tempo.

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  per determinare la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = 3 \frac{(1 + j5\omega)}{(1 - j5\omega)}$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive.

Si ha:

$$|G(j\omega)| = \frac{3\sqrt{1+25\omega^2}}{\sqrt{1+25\omega^2}} = 3.$$

Osserviamo che, essendo il modulo della funzione sempre pari a 3, il diagramma polare è sulla circonferenza di raggio 3 e centro nell'origine. Si ha poi:

$$\angle G(j\omega) = \arctg(5\omega) + \arctg(5\omega) = 2\arctg(5\omega),$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 3 \frac{(1 + j5\omega)}{(1 - j5\omega)} = \frac{3(1 + j5\omega)^2}{(1 + 25\omega^2)} = \frac{3(1 + j10\omega - 25\omega^2)}{(1 + 25\omega^2)} = \\ &= \frac{3(1 - 25\omega^2)}{(1 + 25\omega^2)} + j \frac{30\omega}{(1 + 25\omega^2)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{3(1 - 25\omega^2)}{(1 + 25\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{30\omega}{(1 + 25\omega^2)}$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = 3,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0.$$

Deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo, parte dal punto (3,0) situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 3,$$

infatti si ha  $m=n$ . Inoltre si ha uno zero a fase minima e un polo a fase non minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase di  $+90^\circ$  entrambi, e un guadagno positivo che non sfasa:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = +\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Dunque il diagramma termina nel punto (-3,0) con fase  $\pi$ , ossia tangente all'asse delle ascisse.

Troviamo ora le eventuali intersezioni con gli assi, verificando se le due equazioni:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0,$$

ammettono una soluzione. Si ha:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{3(1-25\omega^2)}{(1+25\omega^2)} = 0 \Leftrightarrow 1-25\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{5} = 0.2,$$

$$G\left(j\frac{1}{5}\right) = j\operatorname{Im}\left(G\left(j\frac{1}{5}\right)\right) = j3$$

e in effetti il diagramma polare è sulla circonferenza di raggio 3 e centro nell'origine.

Inoltre la parte immaginaria della funzione di risposta armonica si annulla al finito solo nella pulsazione nulla.

Dunque si hanno le intersezioni con gli assi immaginario nei punti  $(0, j3)$  e, come già visto,  $(3,0)$  e  $(-3,0)$ .

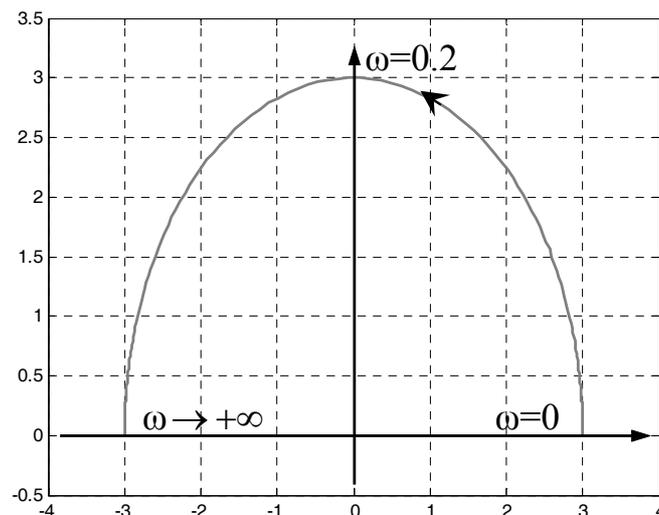
Studiamo ora il segno di parte reale e parte immaginaria. Si ha:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{3(1-25\omega^2)}{(1+5\omega^2)} > 0 \Leftrightarrow 25\omega^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \omega \in \left[0, \frac{1}{5}\right],$$

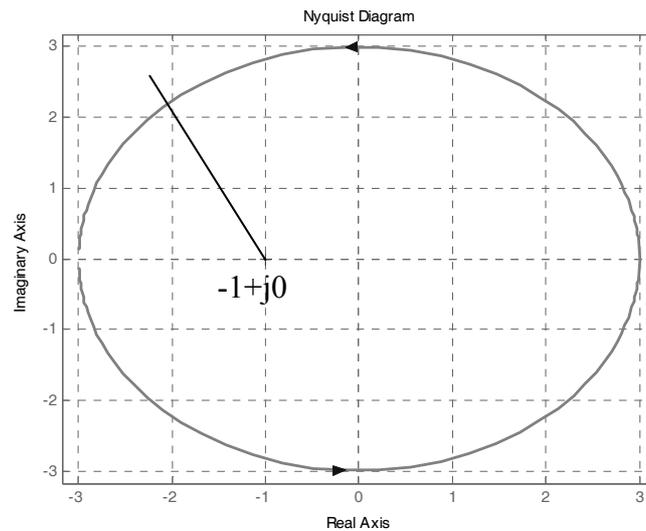
$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{30\omega}{(1+5\omega^2)} > 0 \quad \forall \omega > 0.$$

Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive.



Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $G(j\omega)$  è il seguente.



Osserviamo che il sistema in anello aperto è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso.

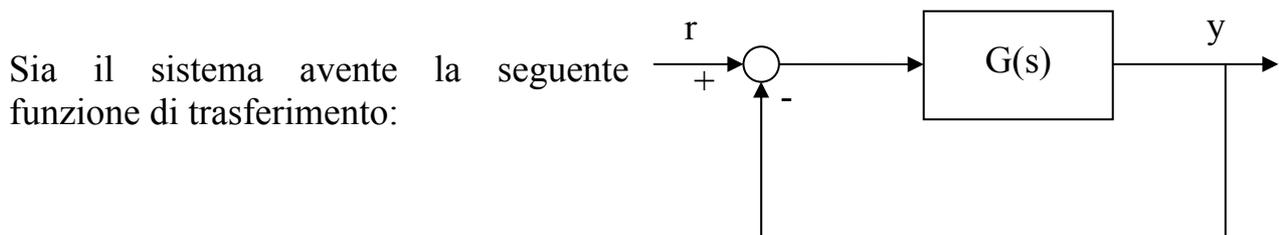
Si ha  $P=1$ . Inoltre la curva chiusa abbraccia il punto critico  $-1+j0$  con  $\vec{N} = -1$  giri in senso orario. Ciò si deduce tracciando un raggio vettore dal punto critico in una qualsiasi direzione: il raggio vettore interseca la curva due volte, e gli attraversamenti avvengono entrambi in senso orario nel verso delle pulsazioni crescenti.

Si ha dunque:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow -1 = Z - 1 \Rightarrow Z = 0$$

ossia l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso non ha radici nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

### ESEMPIO



$$G(s) = 20 \frac{(1 + 5s)}{(1 + 0.5s)(1 + 2s)}$$

Il sistema è chiuso in retroazione unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione ha  $m=1$  zeri e  $n=2$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=0$ , infatti non vi sono poli in anello aperto nel semipiano destro di Gauss. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto. La funzione è già fattorizzata nella forma delle costanti di tempo.

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  per determinare la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = 20 \frac{(1 + j5\omega)}{(1 + j0.5\omega)(1 + j2\omega)}$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive.

Si ha:

$$|G(j\omega)| = \frac{20\sqrt{1 + 25\omega^2}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{4}} \sqrt{1 + 4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctg(5\omega) - \arctg(0.5\omega) - \arctg(2\omega),$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= 20 \frac{(1 + j5\omega)}{(1 + j0.5\omega)(1 + j2\omega)} = \frac{20(1 + j5\omega) \left(1 - \frac{j\omega}{2}\right) (1 - j2\omega)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{4}\right) (1 + 4\omega^2)} = \\ &= \frac{40(1 + j5\omega)(2 - j\omega)(1 - j2\omega)}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} = \frac{40(1 + j5\omega)(2 - 5j\omega - 2\omega^2)}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{40(2 - 5j\omega - 2\omega^2 + 10j\omega + 25\omega^2 - 10j\omega^3)}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} = \frac{40(2 + 5j\omega + 23\omega^2 - 10j\omega^3)}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} = \\
&= \frac{40(2 + 23\omega^2)}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)} + j \frac{200(1 - 2\omega^2)\omega}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{40(2 + 23\omega^2)}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{200(1 - 2\omega^2)\omega}{(4 + \omega^2)(1 + 4\omega^2)}$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = 20,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0.$$

Deduciamo che il diagramma, come ci aspettavamo, parte dal punto (20,0) situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0,$$

infatti si ha  $m < n$ . Inoltre si hanno uno zero e due poli a fase minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase rispettivamente di  $+90^\circ$  il primo e  $-90^\circ$  ciascuno dei secondi, e un guadagno positivo che non sfasa:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Dunque il diagramma termina nell'origine con fase  $-\frac{\pi}{2}$ , ossia tangente all'asse verticale.

Troviamo ora le eventuali intersezioni con gli assi, verificando se le due equazioni:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0,$$

ammettono una soluzione. La parte reale è sempre positiva e non si annulla mai al finito. Inoltre:

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{200(1-2\omega^2)\omega}{(4+\omega^2)(1+4\omega^2)} = 0 \Leftrightarrow 1-2\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707,$$

con

$$G\left(j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \operatorname{Re}\left(G\left(j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \frac{40\left(2+\frac{23}{2}\right)}{\left(4+\frac{1}{2}\right)(1+2)} = \frac{40(27)}{(9)(3)} = 40$$

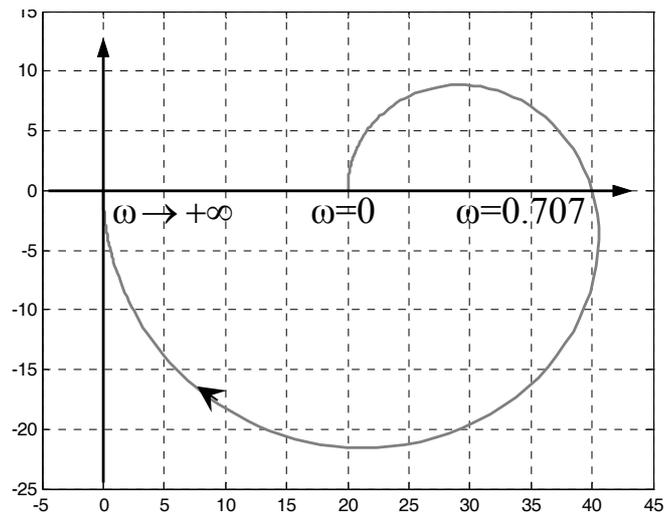
Dunque si hanno le intersezioni con gli assi nei punti (40, 0) e, come già visto, (0,0) e (0,0).

Studiamo ora il segno di parte reale e parte immaginaria. La parte reale è sempre positiva. Inoltre si ha:

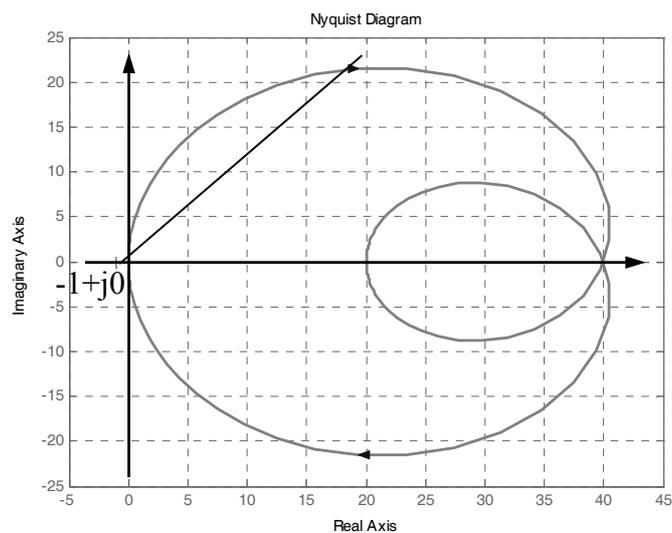
$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{200(1-2\omega^2)\omega}{(4+\omega^2)(1+4\omega^2)} > 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow \omega \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive.



Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $G(j\omega)$  è il seguente.



Osserviamo che il sistema in anello aperto è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso.

Si ha  $P=0$ . Inoltre la curva chiusa non abbraccia il punto critico  $-1+j0$ :  $\vec{N} = 0$ .

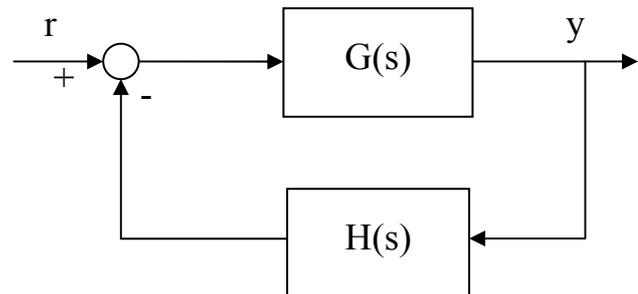
Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

**ESEMPIO**

Sia il sistema avente la seguente funzione di trasferimento di anello aperto:

$$GH(s) = \frac{80}{(s^2 + 2.5s + 16)}$$



Il sistema è chiuso in retroazione non unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione è priva di zeri ( $m=0$ ) e presenta  $n=2$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=0$ , infatti i poli in anello aperto sono nel semipiano sinistro di Gauss. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto. La funzione è già fattorizzata nella forma delle costanti di tempo.

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  per determinare la funzione di risposta armonica:

$$GH(j\omega) = \frac{80}{(16 + j2.5\omega - \omega^2)} = \frac{5}{\left(1 + j\frac{5}{32}\omega - \frac{1}{16}\omega^2\right)}$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive.

Si ha:

$$|GH(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25\omega^2}{1024}}}$$

$$\angle GH(j\omega) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{5\omega}{32}}{1-\frac{\omega^2}{16}}\right) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{5\omega}{32-2\omega^2}\right) & \text{se } 1-\frac{\omega^2}{16} > 0 \Leftrightarrow 0 < \omega < 4 \\ \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{5\omega}{32}}{\frac{\omega^2}{16}-1}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{5\omega}{2\omega^2-32}\right) & \text{se } 1-\frac{\omega^2}{16} < 0 \Leftrightarrow \omega > 4 \end{cases},$$

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{5}{\left(1 + j\frac{5}{32}\omega - \frac{1}{16}\omega^2\right)} = \frac{5\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2 - j\frac{5}{32}\omega\right)}{\left(\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2\right)} = \\ &= \frac{5(16 - \omega^2)}{16\left(\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2\right)} - j\frac{25\omega}{32\left(\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2\right)} \end{aligned},$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(GH(j\omega)) &= \frac{5(16 - \omega^2)}{16\left(\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2\right)}, \\ \operatorname{Im}(GH(j\omega)) &= -\frac{25\omega}{32\left(\left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2\right)}. \end{aligned}$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| = 5,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle GH(j\omega) = 0.$$

Il diagramma parte dal punto (5,0) situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |GH(j\omega)| = 0,$$

infatti si ha  $m < n$ . Inoltre si hanno due poli a fase minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase di  $-90^\circ$  ciascuno, e un guadagno che non sfasa:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi.$$

Il diagramma termina nell'origine con fase  $\pi$ , ossia tangente all'asse delle ascisse. Troviamo ora le eventuali intersezioni con gli assi, verificando se le due equazioni:

$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(GH(j\omega)) = 0,$$

ammettono una soluzione. Si ha:

$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = \frac{5(16 - \omega^2)}{16 \left( \left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2 \right)} = 0 \Leftrightarrow 16 - \omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4,$$

con

$$GH(j4) = j\operatorname{Im}(GH(j4)) = -\frac{100}{32 \left( \frac{25}{1024}16 \right)} = -8.$$

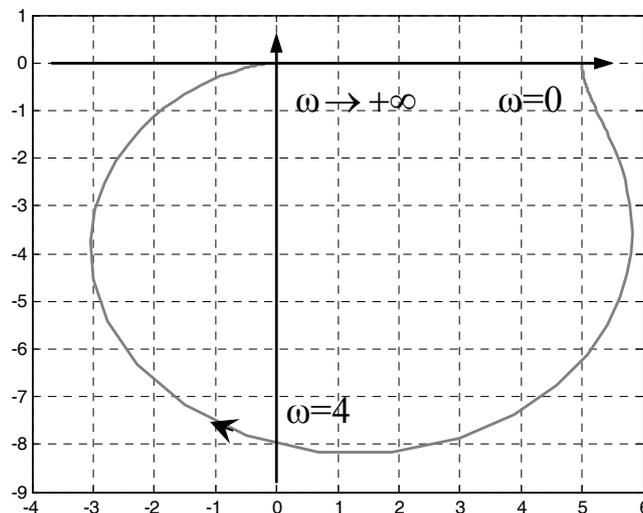
La parte immaginaria non si annulla mai al finito. Dunque si hanno le intersezioni con gli assi nei punti (0,-8) e, come già visto, (5,0) e (0,0).

Studiamo ora il segno di parte reale e parte immaginaria. La parte immaginaria è sempre negativa. Inoltre si ha:

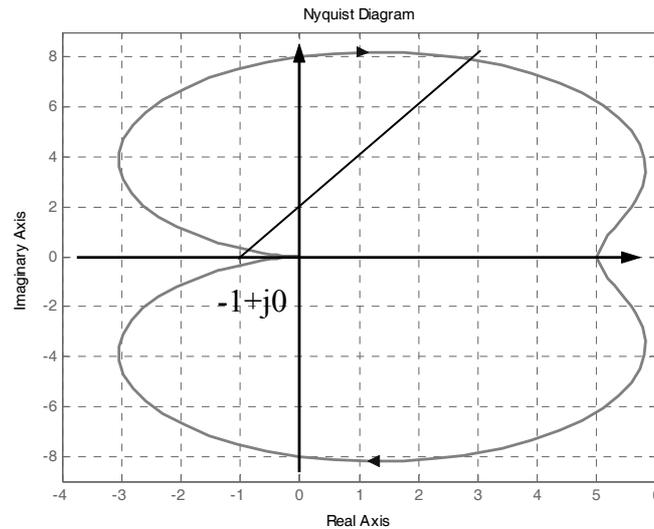
$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = \frac{5(16 - \omega^2)}{16 \left( \left(1 - \frac{1}{16}\omega^2\right)^2 + \frac{25}{1024}\omega^2 \right)} > 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow \omega \in [0, 4[.$$

Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive.



Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $GH(j\omega)$  è il seguente.



Osserviamo che il sistema in anello aperto è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

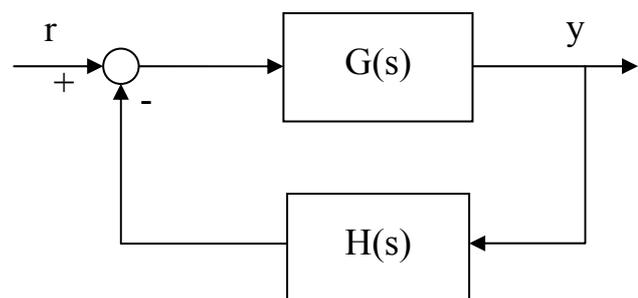
Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso. Si ha  $P=0$ . Inoltre la curva chiusa non abbraccia il punto critico  $-1+j0$ :  $\vec{N} = 0$  giri in senso orario. Ciò si deduce tracciando un raggio vettore dal punto critico in una qualsiasi direzione: il raggio vettore interseca la curva due volte, e gli attraversamenti avvengono uno in senso orario nel verso delle pulsazioni crescenti e l'altro in senso antiorario.

Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

### ESEMPIO

Sia il sistema avente la seguente funzione di trasferimento di anello aperto:

$$GH(s) = \frac{10K(1-s)}{s(1+s)}, \quad K \in \mathfrak{R}.$$



Il sistema è chiuso in retroazione non unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione ha  $m=1$  zeri e presenta  $n=2$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=0$ . Inoltre  $\mu=1$ , essendoci un polo nell'origine in anello aperto. La funzione è già fattorizzata nella forma delle costanti di tempo.

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  per determinare la funzione di risposta armonica:

$$GH(j\omega) = \frac{10K(1-j\omega)}{j\omega(1+j\omega)}.$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive e per  $K>0$ .

Si ha:

$$|GH(j\omega)| = \frac{10K\sqrt{1+\omega^2}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}} = \frac{10K}{\omega},$$

$$\angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctg(\omega),$$

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{10K(1-j\omega)}{j\omega(1+j\omega)} = \frac{-j10K(1-j\omega)^2}{\omega(1+\omega^2)} = \frac{-j10K(1-2j\omega-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)} = \\ &= -\frac{20K}{(1+\omega^2)} + j\frac{10K(\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2)}, \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = -\frac{20K}{(1+\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(GH(j\omega)) = \frac{10K(\omega^2-1)}{\omega(1+\omega^2)}$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| = +\infty,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}(GH(j\omega)) = -20K$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}(GH(j\omega)) = -\infty$$

Il diagramma quindi presenta un asintoto verticale che intercetta l'asse delle ascisse nel punto  $(-20K, 0)$ .

Passiamo al comportamento alle alte frequenze. Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |GH(j\omega)| = 0,$$

infatti si ha  $m < n$ . Inoltre si ha uno zero a fase non minima e due poli uno nell'origine e l'altro a fase minima, che forniscono alle alte frequenze un contributo in fase di  $-90^\circ$ , ciascuno, e un guadagno che non sfasa:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle GH(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Il diagramma termina quindi nell'origine tangente all'asse delle ordinate. Troviamo ora le eventuali intersezioni con gli assi. Si ha che la parte reale è sempre negativa, mentre risulta:

$$\operatorname{Im}(GH(j\omega)) = \frac{10K(\omega^2 - 1)}{\omega(1 + \omega^2)} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1,$$

con

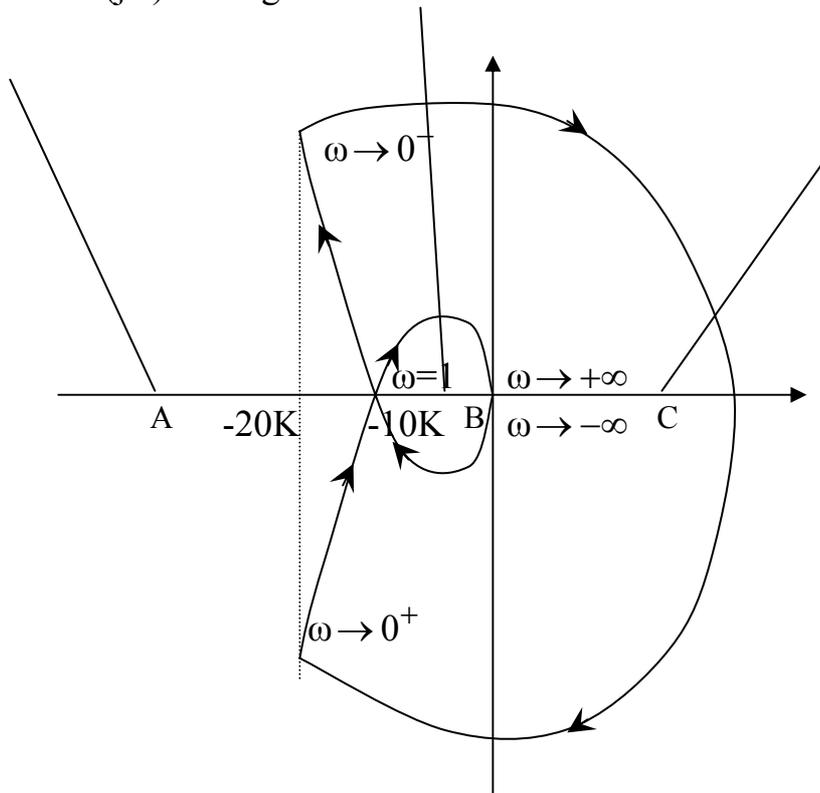
$$GH(j1) = \operatorname{Re}(GH(j1)) = -\frac{20K}{(1+1)} = -10K.$$

Dunque si hanno le intersezioni con gli assi nei punti  $(0,0)$  e  $(-10K,0)$ .

Inoltre si ha:

$$\operatorname{Im}(GH(j\omega)) = \frac{10K(\omega^2 - 1)}{\omega(1 + \omega^2)} > 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \omega \in ]1, +\infty[.$$

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive. Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $GH(j\omega)$  è il seguente.



Osserviamo che il sistema in anello aperto ha un polo nell'origine, dunque la chiusura all'infinito è formata da un mezzo giro in senso orario da  $\omega \rightarrow 0^-$  a  $\omega \rightarrow 0^+$ .

Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso. Si ha  $P=0$ .

Inoltre il fatto che la curva chiusa abbracci o meno il punto critico  $-1+j0$  dipende dalla posizione dell'intersezione  $(-10K, 0)$  sull'asse reale, ossia dal valore di  $K$ .

Si distinguono i seguenti casi.

1.  $-1 < -10K \rightarrow 0 < K < 0.1$  (punto critico in posizione A). Si hanno  $\vec{N} = 0$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.  $-1 > -10K \rightarrow K > 0.1$  (punto critico in posizione B). Si hanno  $\vec{N} = +2$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 2 = Z - 0 \Rightarrow Z = 2$$

ossia l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha due radici nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

3.  $K < 0$ . In questo caso il diagramma di Nyquist va ruotato di  $180^\circ$ , per via dello sfasamento introdotto dal guadagno. Equivalentemente, è possibile lasciare invariato il diagramma e considerare il punto critico nel punto  $+1+j0$  (punto critico in posizione C). Si hanno quindi  $\vec{N} = +1$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 1 = Z - 0 \Rightarrow Z = 1$$

ossia l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha una radice nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

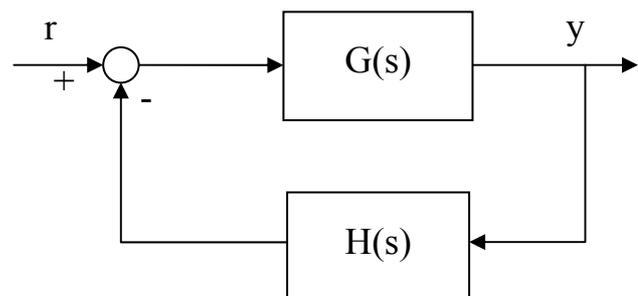
4. Consideriamo poi il caso limite  $K=0.1$ . In questo caso si ha un polo in  $+j1$  e un polo in  $-j1$ , ed essendo il sistema del secondo ordine esso è semplicemente stabile. Infatti l'equazione caratteristica diventa:

$$s(1+s) + 10K(1-s) = 0 \Big|_{K=0.1} \Leftrightarrow s^2 + 1 = 0.$$

### ESEMPIO

Sia il sistema avente la seguente funzione di trasferimento di anello aperto:

$$GH(s) = \frac{K}{s^2(s-1)}, \quad K \in \mathfrak{R}.$$



Il sistema è chiuso in retroazione non unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione è priva di zeri ( $m=0$ ) e presenta  $n=3$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=1$ . Inoltre  $\mu=2$ , essendoci due poli nell'origine in anello aperto.

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  e fattorizziamo nella forma delle costanti di tempo per determinare la funzione di risposta armonica:

$$GH(j\omega) = \frac{-K}{(j\omega)^2(1-j\omega)}.$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive e per  $K>0$ .

Si ha:

$$|GH(j\omega)| = \frac{K}{\omega^2 \sqrt{1+\omega^2}},$$

$$\angle GH(j\omega) = -\pi - \pi + \arctg(\omega) = \arctg(\omega),$$

$$GH(j\omega) = \frac{-K}{(j\omega)^2(1-j\omega)} = \frac{K(1+j\omega)}{\omega^2(1+\omega^2)} = \frac{K}{\omega^2(1+\omega^2)} + j \frac{K}{\omega(1+\omega^2)},$$

$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = \frac{K}{\omega^2(1+\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(GH(j\omega)) = \frac{K}{\omega(1+\omega^2)}.$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| = +\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle GH(j\omega) = -\pi - \pi = 0.$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Re}(GH(j\omega)) = +\infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \operatorname{Im}(GH(j\omega)) = +\infty$$

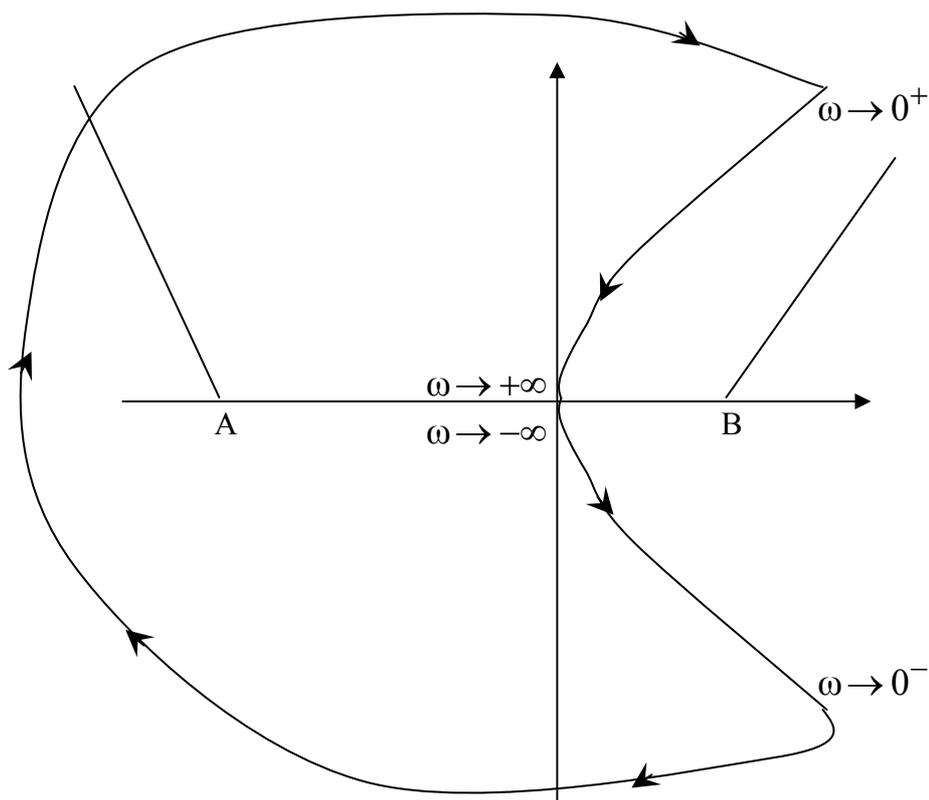
Il diagramma quindi non presenta un asintoto verticale, infatti il polo nell'origine in anello aperto non è semplice.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze. Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |GH(j\omega)| = 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle GH(j\omega) = -\pi - \pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Il diagramma termina quindi nell'origine tangente all'asse delle ordinate. È poi evidente che non vi sono intersezioni con gli assi al finito. Sia la parte reale che quella immaginaria sono sempre positive. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $GH(j\omega)$  è il seguente.



Osserviamo che il sistema in anello aperto ha due poli nell'origine, dunque la chiusura all'infinito è formata da due mezzi giri in senso orario da  $\omega \rightarrow 0^-$  a  $\omega \rightarrow 0^+$ .

Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso. Si ha  $P=1$ .

Si distinguono i seguenti casi.

1.  $K>0$  (punto critico in posizione A). Si hanno  $\vec{N}=+1$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 1 = Z - 1 \Rightarrow Z = 2$$

ossia l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha due radici nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

2.  $K<0$ . In questo caso il diagramma di Nyquist va ruotato di  $180^\circ$ , per via dello sfasamento introdotto dal guadagno. Equivalentemente, è possibile lasciare invariato il diagramma e considerare il punto critico nel punto  $+1+j0$  (punto critico in posizione B). Si hanno quindi  $\vec{N}=0$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

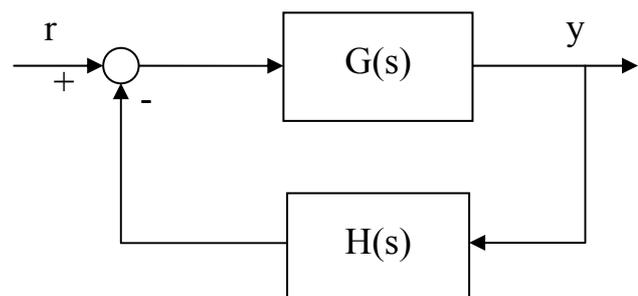
$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 0 = Z - 1 \Rightarrow Z = 1$$

ovvero l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha una radice nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

### ESEMPIO

Sia il sistema avente la seguente funzione di trasferimento di anello aperto:

$$GH(s) = \frac{15K(1 + 0.5s)}{(1 + s)(1 + 5s)}, \quad K \in \mathfrak{R}.$$



Il sistema è chiuso in retroazione non unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione presenta  $m=1$  zeri e  $n=2$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=0$ . Inoltre  $\mu=0$ , non essendoci poli nell'origine in anello aperto.

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  per determinare la funzione di risposta armonica, che è già nella forma delle costanti di tempo:

$$GH(j\omega) = \frac{15K(1+0.5j\omega)}{(1+j\omega)(1+5j\omega)}$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive e per  $K>0$ .

Si ha:

$$|GH(j\omega)| = \frac{15K\sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}}}{\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{1+25\omega^2}},$$

$$\angle GH(j\omega) = \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right) - \arctg(\omega) - \arctg(5\omega),$$

$$\begin{aligned} GH(j\omega) &= \frac{15K(1+0.5j\omega)}{(1+j\omega)(1+5j\omega)} = \frac{15K(1+0.5j\omega)(1-j\omega)(1-5j\omega)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)} = \\ &= \frac{15K(1+0.5j\omega)(1-6j\omega-5\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)} = \frac{15K(1-6j\omega-5\omega^2+0.5j\omega+3\omega^2-2.5j\omega^3)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)} = \\ &= \frac{15K(1-2\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)} - j\frac{15K}{2} \frac{\omega(11+5\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)} \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = \frac{15K(1-2\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$$

$$\operatorname{Im}(GH(j\omega)) = -\frac{15K}{2} \frac{\omega(11+5\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)}$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |GH(j\omega)| = 15K, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle GH(j\omega) = 0.$$

Il diagramma non presenta asintoti verticali, non essendoci poli sull'asse immaginario in anello aperto.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze. Abbiamo:

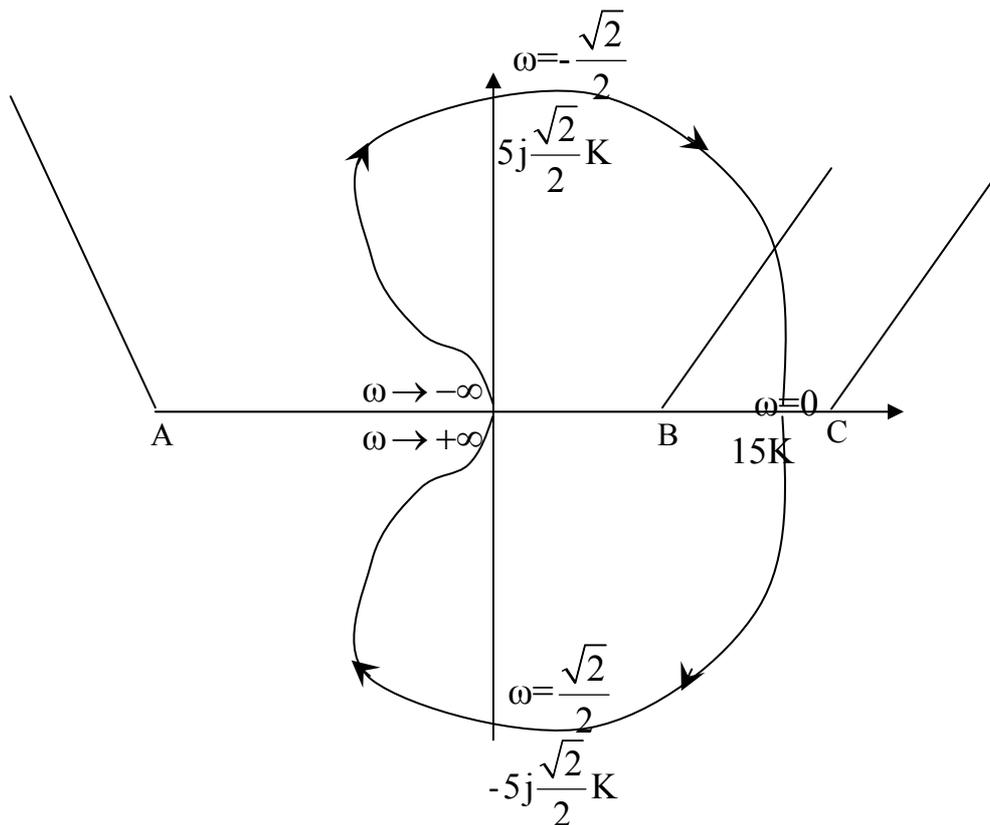
$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |GH(j\omega)| = 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle GH(j\omega) = +\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Il diagramma termina quindi nell'origine tangente all'asse delle ordinate. È poi evidente che la parte immaginaria è sempre negativa, quindi non ci sono intersezioni al finito oltre al punto  $(15K, 0)$  con l'asse reale. Si ha poi:

$$\operatorname{Re}(GH(j\omega)) = \frac{15K(1-2\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+25\omega^2)} = 0 \Leftrightarrow 2\omega^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$GH\left(j\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = j\operatorname{Im}\left(GH\left(j\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = -\frac{15K}{2} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(11+\frac{5}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{25}{2}\right)} = -5j\frac{\sqrt{2}}{2}K.$$



Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $GH(j\omega)$  è il precedente.

Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso. Si ha  $P=0$ .

Si distinguono i seguenti casi.

1.  $K > 0$  (punto critico in posizione A). Si hanno  $\vec{N} = 0$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.  $1 < 15|K|$ ,  $K < 0 \rightarrow K < -1/15$ . In questo caso il diagramma di Nyquist va ruotato di  $180^\circ$ , per via dello sfasamento introdotto dal guadagno. Equivalentemente, è possibile lasciare invariato il diagramma e considerare il punto critico nel punto  $+1+j0$  (punto critico in posizione B). Si hanno quindi  $\vec{N} = +1$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 1 = Z - 0 \Rightarrow Z = 1$$

ovvero l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha una radice nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

3.  $15|K| < 1$ ,  $K < 0 \rightarrow -1/15 < K < 0$ . In questo caso il diagramma di Nyquist va ruotato di  $180^\circ$ , per via dello sfasamento introdotto dal guadagno. Equivalentemente, è possibile lasciare invariato il guadagno e considerare il punto critico nel punto  $+1+j0$  (punto critico in posizione C). Si hanno quindi  $\bar{N} = 0$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

4. Consideriamo poi il caso limite  $K = -1/15$ . In questo caso si ha un polo in  $j0$ , ossia nell'origine. Per studiare la stabilità del sistema consideriamo l'equazione caratteristica, che diventa:

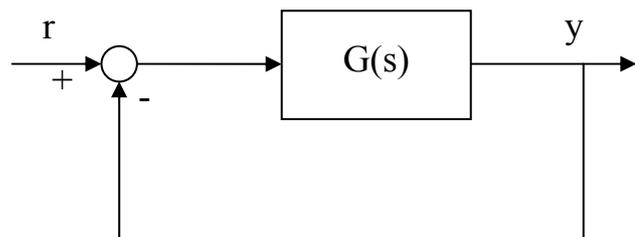
$$(1+s)(1+5s) + 15K(1+0.5s) = 0 \Big|_{K=-\frac{1}{15}} \Leftrightarrow 5s^2 + 5.5s = 0,$$

che ha due radici, una in  $s=0$  e una in  $s=-1.1$ . Dunque il sistema in anello chiuso in questo caso è semplicemente stabile.

### ESEMPIO

Sia il sistema avente la seguente funzione di trasferimento di anello:

$$G(s) = \frac{20K}{(s+1)(s+0.25)(s+2)}$$



Il sistema è chiuso in retroazione unitaria. Si determini il diagramma di Nyquist del sistema e si studi la stabilità in anello chiuso applicando il teorema di Nyquist.

La funzione  $G(s)$ , che è la funzione di trasferimento di anello, ha  $m=0$  zeri e  $n=3$  poli in anello aperto. Osserviamo che  $P=0$ , ossia non vi sono poli in anello aperto nel semipiano destro di Gauss. Inoltre  $\mu=0$ , ossia non vi sono poli nell'origine in anello aperto.

La prima operazione da compiere è quella di fattorizzare la funzione in forma di costanti di tempo:

$$G(s) = \frac{20K}{0.5(1+s)(1+4s)(1+0.5s)} = \frac{40K}{(1+s)(1+4s)(1+0.5s)}$$

Sostituiamo quindi  $s=j\omega$  per determinare la funzione di risposta armonica:

$$G(j\omega) = \frac{40K}{(1+j\omega)(1+j4\omega)(1+j0.5\omega)}$$

Studiamo inizialmente la funzione per pulsazioni positive e per valori del guadagno  $K$  positivo.

Si ha:

$$|G(j\omega)| = \frac{40K}{\sqrt{1+\omega^2} \sqrt{1+16\omega^2} \sqrt{1+\frac{\omega^2}{4}}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctg(\omega) - \arctg(4\omega) - \arctg\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{40K(1-j\omega)(1-4j\omega)\left(1-j\frac{\omega}{2}\right)}{(1+\omega^2)(1+16\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)} = \frac{40K(1-5j\omega-4\omega^2)\left(1-j\frac{\omega}{2}\right)}{(1+\omega^2)(1+16\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)} = \\ &= \frac{40K\left(1-5j\omega-4\omega^2-j\frac{\omega}{2}-\frac{5\omega^2}{2}+2j\omega^3\right)}{(1+\omega^2)(1+16\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)} = \frac{40K\left(1-\frac{13}{2}\omega^2-j\frac{11}{2}\omega+2j\omega^3\right)}{(1+\omega^2)(1+16\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)} \end{aligned}$$

da cui

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{20K(2 - 13\omega^2)}{(1 + \omega^2)(1 + 16\omega^2)\left(1 + \frac{\omega^2}{4}\right)},$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{20K(4\omega^2 - 11)\omega}{(1 + \omega^2)(1 + 16\omega^2)\left(1 + \frac{\omega^2}{4}\right)}.$$

Studiamo quindi il comportamento alle basse frequenze. Si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} |G(j\omega)| = 40K,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} \angle G(j\omega) = 0.$$

Deduciamo che il diagramma parte dal punto  $(40K, 0)$  situato sul semiasse reale positivo.

Passiamo al comportamento alle alte frequenze, per  $\omega \rightarrow +\infty$ . Abbiamo:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |G(j\omega)| = 0,$$

infatti si ha  $m < n$ . Inoltre il sistema presenta tre poli a fase minima, che forniscono alle alte frequenze ciascuno un contributo in fase di  $-\pi/2$ , oltre ad un guadagno positivo che non fornisce contributo di fase:

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}.$$

Dunque il diagramma termina nell'origine con fase  $-3\pi/2$ , ossia tangente all'asse delle ordinate.

Troviamo ora le eventuali intersezioni con gli assi, verificando se le due equazioni:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = 0,$$

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = 0,$$

ammettono una soluzione. Si ha:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{20K(2-13\omega^2)}{(1+\omega^2)(1+16\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)} = 0 \Leftrightarrow 2-13\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{13}} \approx 0.39,$$

$$\begin{aligned} G\left(j\sqrt{\frac{2}{13}}\right) &= j\operatorname{Im}\left(G\left(j\sqrt{\frac{2}{13}}\right)\right) = j\frac{20K\left(\frac{8}{13}-11\right)\sqrt{\frac{2}{13}}}{\left(1+\frac{2}{13}\right)\left(1+\frac{32}{13}\right)\left(1+\frac{1}{26}\right)} = \\ &= j\frac{20K(8-143)\sqrt{2}\sqrt{13}}{13^2\left(\frac{15}{13}\right)\left(\frac{45}{13}\right)\left(\frac{27}{26}\right)} = -jK\frac{70200\sqrt{26}}{18225} = -jK\frac{104\sqrt{26}}{27} \approx -jK19.64. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{20K(4\omega^2-11)\omega}{(1+\omega^2)(1+16\omega^2)\left(1+\frac{\omega^2}{4}\right)} = 0 \Leftrightarrow 4\omega^2-11=0 \Leftrightarrow \omega = \frac{\sqrt{11}}{2} \approx 1.66$$

con

$$\begin{aligned} G\left(j\frac{\sqrt{11}}{2}\right) &= \operatorname{Re}\left(G\left(j\frac{\sqrt{11}}{2}\right)\right) = \frac{20K\left(2-\frac{143}{4}\right)}{\left(1+\frac{11}{4}\right)(1+44)\left(1+\frac{11}{16}\right)} = \\ &= -\frac{20\cdot 135\cdot 16}{(15)(45)(27)}K = -\frac{43200}{18225}K = -\frac{64}{27}K \approx -2.37K \end{aligned}$$

Dunque le intersezioni con gli assi sono nei punti  $(0, -j19.64K)$  e  $(-2.37K, 0)$ .

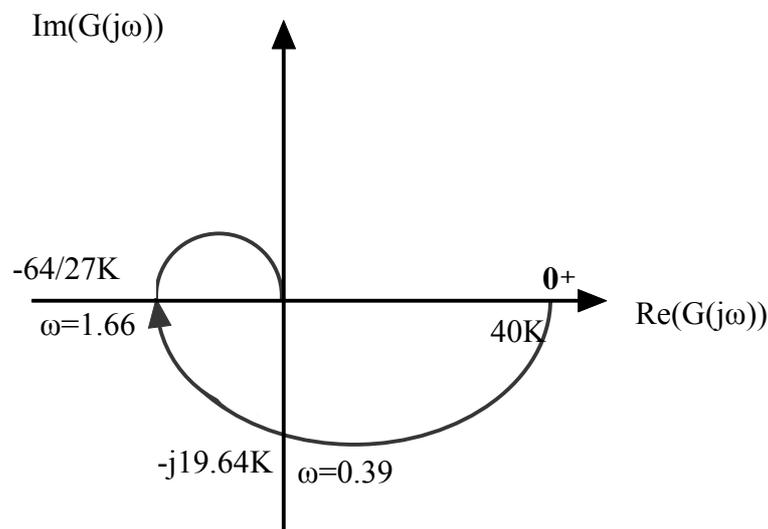
Studiamo ora il segno di parte reale e parte immaginaria. Si ha:

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) = \frac{20K(2 - 13\omega^2)}{(1 + \omega^2)(1 + 16\omega^2)\left(1 + \frac{\omega^2}{4}\right)} > 0 \Leftrightarrow 13\omega^2 - 2 < 0 \Leftrightarrow \omega \in \left[0, \sqrt{\frac{2}{13}}\right],$$

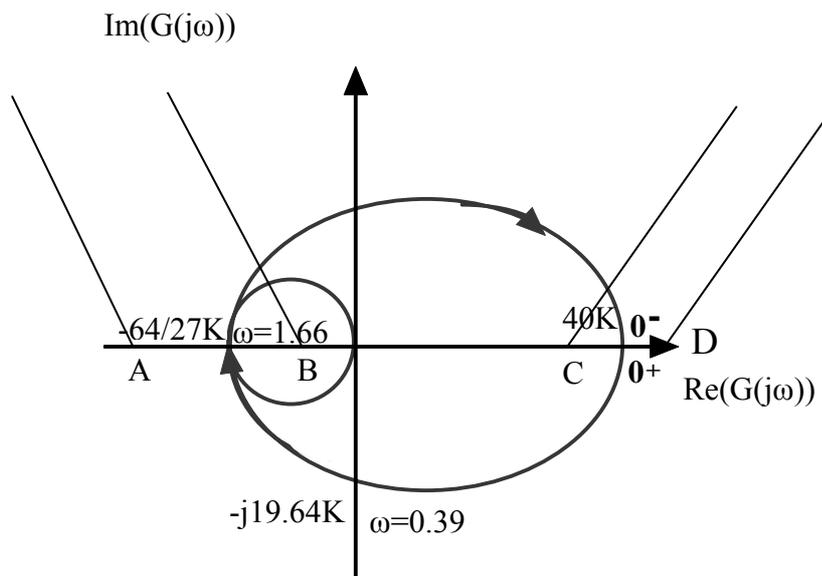
$$\operatorname{Im}(G(j\omega)) = \frac{20K(4\omega^2 - 11)\omega}{(1 + \omega^2)(1 + 16\omega^2)\left(1 + \frac{\omega^2}{4}\right)} > 0 \Leftrightarrow 4\omega^2 - 11 > 0 \Leftrightarrow \omega \in \left[\frac{\sqrt{11}}{2}, +\infty\right].$$

Non vi sono poli nell'origine, quindi non sono presenti asintoti verticali.

Siamo ora in grado di tracciare il diagramma polare relativo alle pulsazioni positive.



Il diagramma relativo all'intervallo di pulsazioni negative si ottiene ribaltando, rispetto all'asse delle ascisse, quello ottenuto. Concludiamo che il diagramma polare qualitativo di  $G(j\omega)$  è il seguente.



Osserviamo che il sistema in anello aperto è privo di poli sull'asse immaginario, dunque la chiusura all'infinito è assente: infatti la curva ottenuta è già chiusa.

Analizziamo ora la stabilità del sistema in anello chiuso. Si ha  $P=0$ .

Si distinguono i seguenti casi.

1.  $-1 < -\frac{64}{27}K \Leftrightarrow 0 < K < \frac{27}{64}$  (punto critico in posizione A). Si hanno  $\vec{N}=0$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

2.  $-\frac{64}{27}K < -1 \Leftrightarrow K > \frac{27}{64}$  (punto critico in posizione B). Si hanno  $\vec{N}=2$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 2 = Z - 0 \Rightarrow Z = 2$$

ossia l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha due radici nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

3. Consideriamo poi il caso limite tra i due precedenti  $K=27/64$ . In questo caso si hanno due poli in  $\pm j1.66$ . Per studiare la stabilità del sistema consideriamo l'equazione caratteristica, che diventa:

$$(s+1)\left(s+\frac{1}{4}\right)(s+2)+20K=0 \Big|_{K=\frac{27}{64}} \Leftrightarrow s^3 + \frac{13}{4}s^2 + \frac{11}{4}s + \frac{143}{16} = 0.$$

La tabella di Routh del sistema è la seguente.

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 4 & 11/4 & 11 \\ s^2 & 13/4 & 52 & 143/16 \\ s^1 & 0 & & \\ s^0 & 143/16 & & \end{array}$$

La riga  $s^1$  si annulla completamente, mentre la riga di ordine zero è nota, poiché essa comprende il termine noto del polinomio caratteristico.

Dall'analisi dei primi due elementi della prima colonna si osserva che dei tre poli in anello chiuso (l'equazione caratteristica è del terzo ordine) un polo è a parte reale negativa (una permanenza), mentre sulla posizione degli altri due poli nel piano di Gauss è possibile trarre conclusioni utilizzando l'equazione ausiliaria:

$$52s^2 + 143 = 0$$

che ha due radici in

$$s = \pm j\sqrt{\frac{143}{52}} \cong \pm j1.66$$

come previsto con il diagramma di Nyquist. In definitiva vi sono due poli immaginari puri e un polo reale negativo. Il sistema è semplicemente stabile.

4.  $1 < 40|K|$ ,  $K < 0 \rightarrow K < -1/40$ . In questo caso il diagramma di Nyquist va ruotato di  $180^\circ$ , per via dello sfasamento introdotto dal guadagno. Equivalentemente, è possibile lasciare invariato il diagramma e considerare il punto critico nel punto  $+1+j0$  (punto critico in posizione C). Si hanno quindi  $\vec{N} = +1$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist si ha:

$$\vec{N} = Z - P \Rightarrow 1 = Z - 0 \Rightarrow Z = 1$$

ovvero l'equazione caratteristica del sistema in anello chiuso ha una radice nel semipiano destro: il sistema in anello chiuso è instabile.

5.  $40|K| < 1$ ,  $K < 0 \rightarrow -1/40 < K < 0$ . In questo caso il diagramma di Nyquist va ruotato di  $180^\circ$ , per via dello sfasamento introdotto dal guadagno. Equivalentemente, è possibile lasciare invariato il guadagno e considerare il punto critico nel punto  $+1+j0$  (punto critico in posizione D). Si hanno quindi  $\bar{N} = 0$  giri in senso orario della curva intorno al punto critico. Per il criterio di Nyquist ridotto il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile.

6. Consideriamo infine il caso limite  $K = -1/40$ . In questo caso si ha un polo in  $j0$ , ossia nell'origine. Per studiare la stabilità del sistema consideriamo l'equazione caratteristica, che diventa:

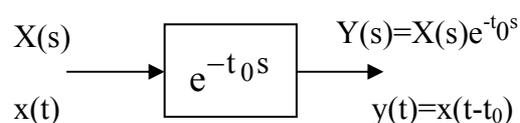
$$(s+1)\left(s+\frac{1}{4}\right)(s+2)+20K=0 \Bigg|_{K=-\frac{1}{40}} \Leftrightarrow s^3 + \frac{13}{4}s^2 + \frac{11}{4}s = 0$$

che ha tre radici, una in  $s=0$  e le altre due in  $s=-1.63 \pm 0.33j$ . Dunque il sistema in anello chiuso in questo caso è semplicemente stabile.

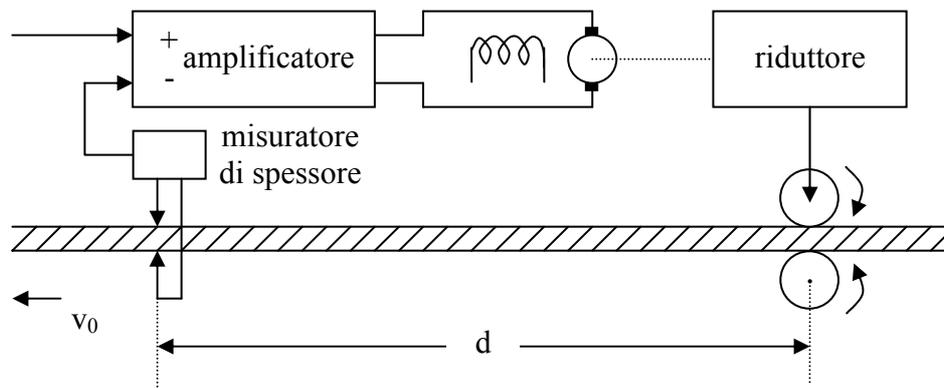
## SISTEMI CON RITARDO FINITO

Nell'enunciato del teorema di Nyquist si è fatto riferimento a sistemi con funzione di trasferimento di anello razionale fratta. Questi sistemi sono caratterizzati dal fatto che l'uscita o una sua derivata rispondono immediatamente all'applicazione dell'ingresso.

Come è noto, non tutti i sistemi dinamici, anche se lineari e stazionari, sono caratterizzati da funzioni di trasferimento razionali fratte. Un esempio tipico è il ritardo finito o ritardo puro schematizzato in figura. Tale blocco è tipicamente utilizzato per rappresentare fenomeni dinamici che comprendono il trasporto di materia o la propagazione di segnali. È il caso di sistemi di controllo che includono trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche: l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito all'applicazione dell'ingresso.



Un classico esempio è il sistema per la regolazione dello spessore di un laminato, riportato in figura. L'obiettivo del sistema di controllo è la regolazione automatica dello spessore di un laminato agendo sulla distanza fra i cilindri del laminatoio. La misura dello spessore avviene ad una certa distanza  $d$  dai cilindri, per cui, se la velocità di trasporto  $v_0$  del laminato è costante, si ha un ritardo finito  $t_0=d/v_0$ .



Poiché la funzione di trasferimento del gruppo misuratore-amplificatore-motore riduttore è la seguente:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)}$$

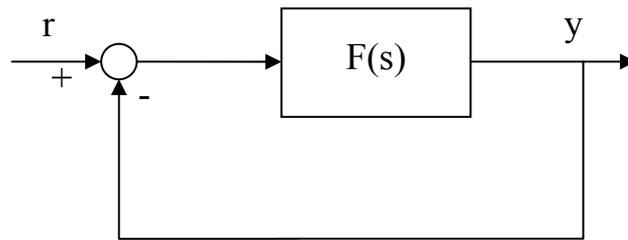
per via del ritardo puro la funzione di trasferimento di anello è la seguente:

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)}$$

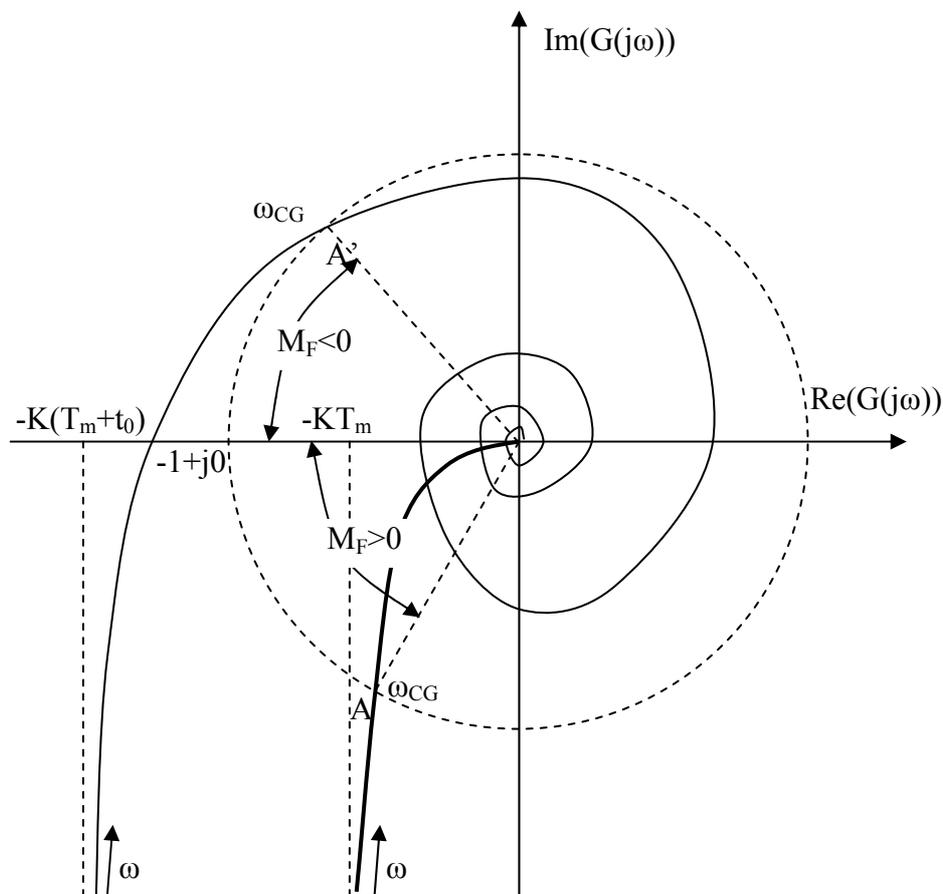
con

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + T_m j\omega)}, \quad F(j\omega) = \frac{K e^{-t_0 j\omega}}{j\omega(1 + T_m j\omega)}$$

In definitiva, il sistema equivale al sistema a blocchi rappresentato in figura.



Se non vi fosse il ritardo finito, il diagramma di Nyquist sarebbe quello della funzione  $G(j\omega)$ , che è del tipo indicato con A nella figura seguente.



Per la presenza del ritardo finito, si ha quanto segue:

$$|F(j\omega)| = |G(j\omega)|, \quad \angle F(j\omega) = \angle G(j\omega) - \omega t_0,$$

ossia il modulo della funzione di risposta armonica non varia con l'aggiunta del ritardo, mentre la fase viene ridotta dell'angolo  $\omega t_0$ , proporzionale alla pulsazione, in ogni valore di  $\omega$ . Dunque il diagramma assume l'andamento indicato con B nella

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

figura precedente, che tende per  $\omega \rightarrow +\infty$  all'origine secondo una spirale, ossia ruotando intorno a tale punto un numero infinito di volte.

Dal diagramma di Nyquist è evidente come la presenza del ritardo puro possa modificare il numero di giri che la curva compie intorno al punto critico. In particolare, se  $t_0$  è elevato può accadere che lo sfasamento introdotto dal ritardo sia tale da spostare l'intersezione del diagramma con l'asse reale, originariamente a destra del punto critico, a sinistra dello stesso, in modo da rendere  $\tilde{N} \neq 0$ . Se il sistema privo di ritardo è asintoticamente stabile in anello aperto, risulta  $P=0$ , pertanto per il criterio di Nyquist ridotto il sistema con ritardo puro è instabile in anello chiuso, mentre il sistema senza ritardo è asintoticamente stabile in anello chiuso. In altre parole, se la funzione di trasferimento di anello di un sistema in retroazione contiene un ritardo puro, valori elevati del ritardo possono destabilizzare il sistema in anello chiuso.