PROCEDIMENTI DI ANTITRASFORMAZIONE

L'operazione di passaggio inverso dal dominio della frequenza complessa s al dominio del tempo

$$F(s) \to f(t)$$

è detta *antitrasformata* o *trasformazione inversa di Laplace*.

Data una funzione complessa F(s) la sua antitrasformata di Laplace è definita come segue:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s)\, e^{st}\, ds \qquad \text{con } \sigma_0 > \sigma_c$$

e si indica con

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

Si noti che il percorso di integrazione della antitrasformata di Laplace è fissato su una retta verticale del piano complesso di ascissa σ_0 qualsiasi, contenuta nel dominio di convergenza di F(s), ossia a destra dell'ascissa di convergenza σ_c.

Come abbiamo visto, una delle condizioni perché una funzione f(t) sia trasformabile secondo Laplace è che sia nulla per t<0 (proprietà di causalità): questa condizione non è strettamente necessaria per la trasformabilità, visto che i valori di f(t) per t<0 non danno contributo nella definizione di integrale di Laplace, ma è necessaria per la biunivocità dell'operazione di trasformazione in modo che antitrasformando si ottenga comunque una funzione nulla per t<0.

Per i motivi descritti ogni volta che si ricava un'antitrasformata occorre indicare il fattore moltiplicativo *1(t)*.

L'espressione integrale che definisce l'antitrasformata è scomoda da valutare, per cui si ricorre ad una diversa procedura di valutazione.

Questa procedura si applica alle funzioni razionali fratte, che individuano le funzioni nel dominio della frequenza complessa *s* di interesse nei controlli automatici, essendo le trasformate di Laplace dei segnali tipici di questa disciplina. Una funzione F(s) di questo tipo si può esprimere come rapporto di due polinomi nella variabile s:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m\ s^m + b_{m-1}\ s^{m-1} + \ldots + b_1\ s + b_0}{a_n\ s^n + a_{n-1}\ s^{n-1} + \ldots + a_1\ s + a_0}$$

dove *m* è il grado del numeratore B(s) ed *n* quello del denominatore A(s).

Si possono verificare diversi casi.

1) m>n

Effettuando la divisione tra polinomi, si ha

$$F(s) = k_{m-n}\ s^{m-n} + k_{m-n-1}\ s^{m-n-1} + \ldots + k_0 + R(s)/A(s)$$

con R(s) polinomio resto di grado $r<n$; pertanto l'antitrasformata vale:

$$f(t) = k_{m-n}\ \delta_{m-n+1}(t) + k_{m-n-1}\ \delta_{m-n}(t) + \ldots + k_0\ \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{R(s)/A(s)\}$$

dove si è utilizzata la proprietà notevole sulla trasformazione degli impulsi di Dirac di ordine superiore. La funzione antitrasformata presenta dunque degli impulsi di vario ordine. In questo caso la funzione f(t) si dice *anticipativa* o *non realizzabile* (*non causale*) e la funzione F(s) è detta *razionale fratta impropria*.

2) m=n

Effettuando la divisione tra polinomi si ha in questo caso

$$F(s) = b_m/a_n + R(s)/A(s)$$

con R(s) polinomio resto di grado $r<n$; pertanto l'antitrasformata vale:

$$f(t) = b_m/a_n\, \delta(t) + \mathcal{L}^{-1}\{R(s)/A(s)\}$$

In questo caso si presenta solo un impulso di Dirac del primo ordine e la funzione F(s) si dice *razionale fratta propria ma non strettamente*.

3) m<n

In questo caso la divisione tra polinomi non si può effettuare, quindi l'antitrasformata f(t) non contiene impulsi di Dirac. La funzione F(s) si dice *razionale fratta strettamente propria*.

Quindi in ciascuno dei tre casi analizzati è necessario antitrasformare una funzione razionale fratta strettamente propria, pertanto è sufficiente analizzare il caso in cui sia $m<n$.

La procedura di antitrasformazione di una funzione razionale fratta strettamente propria F(s) consiste nell'esprimere la funzione come una somma di altre funzioni razionali fratte strettamente proprie, dette *fratti semplici*, che possono essere facilmente antitrasformate utilizzando le regole di trasformazione e le trasformate notevoli.

I fratti semplici dipendono dai *poli* di F(s), cioè dalle radici dell'equazione *A(s)=0,* ossia dagli zeri della funzione A(s), che vanno quindi determinati. Tali radici sono in numero pari al grado *n* del polinomio *A(s)* e possono essere reali o complesse e coniugate, semplici o multiple.

Supponendo che A(s) abbia r radici distinte p_i (i=1,..., r) ciascuna di molteplicità α_i, cioè che sia:

$$A(s) = a_n (s-p_1)^{\alpha_1} (s-p_2)^{\alpha_2} \ldots (s-p_r)^{\alpha_r} = a_n \prod_{i=1}^{r} (s-p_i)^{\alpha_i}$$

con

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = n.$$

È facile dimostrare che lo sviluppo in fratti semplici della funzione da antitrasformare razionale fratta strettamente propria F(s) è del tipo:

$$F(s) = \frac{k_{11}}{(s-p_1)^{\alpha_1}} + \frac{k_{12}}{(s-p_1)^{\alpha_1-1}} + \ldots + \frac{k_{1\alpha_1}}{(s-p_1)} +$$

$$+ \frac{k_{21}}{(s-p_2)^{\alpha_2}} + \frac{k_{22}}{(s-p_2)^{\alpha_2-1}} + \ldots + \frac{k_{2\alpha_2}}{(s-p_2)} +$$

$$\ldots$$

$$+ \frac{k_{r1}}{(s-p_r)^{\alpha_r}} + \frac{k_{r2}}{(s-p_r)^{\alpha_r-1}} + \ldots + \frac{k_{r\alpha_r}}{(s-p_r)}$$

infatti è sufficiente riportare tale espansione in fratti semplici ad un unico membro sommandone i diversi termini.

L'espansione in fratti semplici si scrive anche in forma compatta:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{k_{ij}}{(s - p_i)^{\alpha_i - j + 1}}$$

dove tutti e soli i coefficienti $k_{i\alpha_i}$ dei fratti semplici con denominatori del primo ordine si chiamano *residui* associati ai poli p_i.

Dalla proprietà della trasformata della moltiplicazione vale:

$$t^n (e^{-at}) \qquad \rightarrow \qquad \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$$

e sfruttando tale relazione per t^n (con $n=\alpha_i-j$) con la proprietà di linearità della trasformata si può antitrasformare l'equazione precedente come segue:

$$f(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{k_{ij}}{(\alpha_i - j)!} \; t^{\alpha_i - j} \; e^{p_i t} \right\} \cdot 1(t)$$

dove si è introdotto il gradino unitario per rendere biunivoca la trasformazione funzionale.

Il problema è quindi determinare i coefficienti k_{ij} dell'espansione in fratti.

Di seguito descriviamo i diversi metodi che si utilizzano per individuare i coefficienti dell'espansione in fratti semplici di una funzione F(s) razionale fratta strettamente propria.

METODO DEL MINIMO COMUNE MULTIPLO

Un primo metodo per ricavare i coefficienti k_{ij} consiste nel ricavare il minimo comune multiplo della somma dei fratti semplici ed uguagliare quello che si ottiene all'espressione nota di F(s). Questo è un metodo lungo, oneroso dal punto di vista computazionale e pertanto poco usato.

Esempio

$$F(s)=\frac{1}{s\left(\mathrm{s}+\mathrm{a}\right)^2}=\frac{k_{11}}{\left(s+a\right)^2}+\frac{k_{12}}{\left(s+a\right)}+\frac{k_2}{s}=$$

$$=\frac{\mathrm{k}_{11}\ \mathrm{s}+\mathrm{k}_{12}\ \mathrm{s}\ \left(\mathrm{s}+\mathrm{a}\right)+\mathrm{k}_2\ \left(\mathrm{s}+\mathrm{a}\right)^2}{\mathrm{s}\ \left(\mathrm{s}+\mathrm{a}\right)^2}=$$

$$=\frac{(\mathrm{k}_{12}\ +\mathrm{k}_2)\mathrm{s}^2+(\mathrm{k}_{11}+\mathrm{k}_{12}\mathrm{a}+2\mathrm{k}_2\mathrm{a})\ \mathrm{s}\ +\mathrm{k}_2\ \mathrm{a}^2}{\mathrm{s}\ \left(\mathrm{s}+\mathrm{a}\right)^2}$$

quindi

$$\begin{cases} k_{12}+k_2=0 \\ k_{11}+k_{12}\ \mathrm{a}+2\ \mathrm{k}_2\ \mathrm{a}=0 \\ \mathrm{k}_2\ \mathrm{a}^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_{11}=-\dfrac{1}{\mathrm{a}} \\ k_{12}=-\dfrac{1}{\mathrm{a}^2} \\ \mathrm{k}_2=\dfrac{1}{\mathrm{a}^2} \end{cases}$$

Pertanto si ottiene

$$F(s)=\frac{1}{s\left(\mathrm{s}+\mathrm{a}\right)^2}=\frac{\left(-\dfrac{1}{a}\right)}{\left(s+a\right)^2}+\frac{\left(-\dfrac{1}{a^2}\right)}{\left(s+a\right)}+\frac{\dfrac{1}{a^2}}{s}$$

da cui

$$f(t)=\left(-\frac{1}{a}e^{-at}\ \mathrm{t}-\frac{1}{a^2}e^{-at}+\frac{1}{a^2}\right)1(\mathrm{t})$$

METODO DELLA FORMULA GENERALE

Questo metodo sfrutta una formula generale valida per i coefficienti k_{ij}, secondo la quale risulta:

$$k_{ij} = \frac{1}{(j-1)!}\left[\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[F(s)(s - p_i)^{\alpha_i}\right]\right]_{s=p_i} \qquad \forall\, i = 1 \div r,\ j = 1 \div \alpha_i$$

In particolare i coefficienti dei fratti semplici con denominatore di ordine massimo si ottengono sostituendo j=1 nella formula precedente e valgono:

$$k_{i1} = F(s)(s - p_i)^{\alpha_i}\Big|_{s=p_i} \qquad \forall\, i = 1 \div r$$

Analogamente, i coefficienti dei fratti semplici successivi si ottengono sostituendo j=2 nella formula generale, ottenendo:

$$k_{i2} = \frac{d}{ds}\left[F(s)\ (s\text{-}p_i)^{\alpha_i}\right]\Big|_{s=p_i} \qquad \forall\ i=1 \div r$$

e così via per i fratti successivi.

Come il precedente, anche questo metodo può rivelarsi computazionalmente oneroso, soprattutto nel caso in cui alcuni poli di F(s) presentino molteplicità algebrica elevata, richiedendo quindi di effettuare molte operazioni di derivazione per l'applicazione della formula generale. Pertanto questo metodo viene di norma utilizzato per determinare i soli primi fratti semplici dell'espansione.

Esempio

Si consideri la funzione dell'esempio precedente. Si ha:

$$F(s) = \frac{1}{s\ (s+a)^2} = \frac{k_{11}}{(s+a)^2} + \frac{k_{12}}{(s+a)} + \frac{k_2}{s}$$

$$k_{11} = \left[F(s)\ (s+a)^2\right]_{s=-a} = \left[\frac{1}{s}\right]_{s=-a} = -\frac{1}{a}$$

$$k_{12} = \left[\frac{d}{ds}\ F(s)\ (s+a)^2\right]_{s=-a} = \left[-\frac{1}{s^2}\right]_{s=-a} = -\frac{1}{a^2}$$

$$k_2 = \left[F(s)\ s\right]_{s=0} = \left[\frac{1}{(s+a)^2}\right]_{s=0} = \frac{1}{a^2}$$

METODO DEL RIPORTO SUCCESSIVO A PRIMO MEMBRO

Questo metodo evita l'uso della formula generale per i coefficienti k_{ij} con $j \geq 2$ ed invece ricava nuove funzioni complesse sottraendo successivamente alla funzione F(s) i fratti semplici ricavati per j=1. A queste nuove funzioni si applica quindi la formula generale per ottenere il primo coefficiente, associato al denominatore di grado massimo.

Esempio

$$F(s) = \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)^3} = \frac{k_{11}}{(s+2)^3} + \frac{k_{12}}{(s+2)^2} + \frac{k_{13}}{(s+2)} + \frac{k_2}{(s+1)}$$

Si ottiene:

$$k_{11} = F(s)(s+2)^3\Big|_{s=-2} = 5$$

$$F_1(s) = F(s) - \frac{k_{11}}{(s+2)^3} = \frac{3s+1}{(s+2)^3(s+1)} - \frac{5}{(s+2)^3} = -\frac{2}{(s+2)^2(s+1)}$$

dunque

$$F_1(s) = -\frac{2}{(s+2)^2(s+1)} = \frac{k_{12}}{(s+2)^2} + \frac{k_{13}}{(s+2)} + \frac{k_2}{(s+1)}$$

da cui deriva che

$$k_{12} = F_1(s)(s+2)^2\Big|_{s=-2} = 2$$

Applicando ancora il metodo del riporto successivo si ha:

$$F_2(s) = F_1(s) - \frac{k_{12}}{(s+2)^2} = -\frac{2}{(s+2)^2(s+1)} - \frac{2}{(s+2)^2} = -\frac{2}{(s+2)(s+1)}$$

dunque

$$F_2(s) = -\frac{2}{(s+2)(s+1)} = \frac{k_{13}}{(s+2)} + \frac{k_2}{(s+1)}$$

da cui

$$k_{13} = \left[F_2(s)(s+2)\right]_{s=-2} = 2$$
$$k_2 = \left[F(s)(s+1)\right]_{s=-1} = -2$$

In definitiva si ha:

$$f(t) = \left[5\, e^{-2t}\, \frac{t^2}{2} + 2\, e^{-2t}\, t + 2\, e^{-2t} - 2\, e^{-t}\right] 1(t)$$

METODO DEL TEOREMA DEI RESIDUI

Questo metodo consiste nell'utilizzare uno dei metodi precedenti e nel verificare a posteriori il teorema sui residui oppure nel calcolare con uno di tali metodi tutti i coefficienti k_{ij} dell'espansione ad eccezione di un residuo, il quale viene calcolato utilizzando il risultato di tale teorema.

Il teorema dei residui afferma che, data una funzione razionale fratta F(s) *strettamente propria* del tipo visto in precedenza, la sua espansione in fratti semplici, espressa nella forma vista precedentemente, verifica la proprietà:

$$\sum_{i=1}^{r} k_{i\alpha_i} = \begin{cases} \dfrac{b_m}{a_n} & \text{se } n = m+1 \\ 0 & \text{se } n > m+1 \end{cases}$$

dove b_m ed a_n sono i coefficienti delle potenze di grado massimo presenti, rispettivamente, nel numeratore B(s) e nel denominatore A(s) di F(s).

ANTITRASFORMAZIONE DI FUNZIONI RAZIONALI FRATTE CON POLI COMPLESSI

Nel caso in cui A(s) abbia delle radici complesse e coniugate, per valutare i coefficienti associati si usa una procedura semplificata, valida solo per poli complessi e coniugati semplici.

Si può dimostrare che i residui associati a poli complessi e coniugati sono anch'essi complessi e coniugati. Ne consegue che i fratti semplici associati a due radici complesse e coniugate possono combinarsi in una forma semplice che ha coefficienti reali.

Si consideri ad esempio una coppia di poli a denominatore della funzione F(s)=B(s)/A(s) da antitrasformare del tipo $\sigma \pm j\omega$, cui quindi corrisponde nel polinomio a denominatore A(s) un termine elementare del tipo $(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)=(s-\sigma)^2+\omega^2$.

I fratti semplici corrispondenti alla coppia di radici complessi e coniugati semplici possono allora essere riscritti come segue mediante un unico fratto semplice combinato:

$$G(s)=\frac{k_{11}}{s-\sigma-j\omega}+\frac{k^*_{11}}{s-\sigma+j\omega}=$$

$$=\frac{(k_{11}+k^*_{11})s+\left[-(k_{11}+k^*_{11})\sigma+j(k_{11}-k^*_{11})\omega\right]}{(s-\sigma)^2+\omega^2}=\frac{\alpha s+\beta}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$$

dove è facile verificare che i coefficienti α e β sono reali. Per antitrasformare tale fratto semplice osserviamo preliminarmente che evidentemente si ha:

$$G(s)=\frac{\alpha s+\beta}{(s\text{-}\sigma)^2+\omega^2}=\frac{\alpha s\text{-}\alpha\sigma+\alpha\sigma+\beta}{(s\text{-}\sigma)^2+\omega^2}=$$

$$=\frac{\alpha(s-\sigma)}{(s-\sigma)^2+\omega^2}+\frac{\alpha\sigma+\beta}{\omega}\cdot\frac{\omega}{(s\text{-}\sigma)^2+\omega^2}$$

che si antitrasforma agevolmente come segue:

$$g(t) = \left\{ \alpha \cdot \cos(\omega t) \cdot e^{\sigma t} + \frac{\alpha\sigma + \beta}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \cdot e^{\sigma t} \right\} \cdot 1(t).$$

La procedura per la determinazione dei coefficienti reali α e β del fratto semplice combinato relativo ad una coppia di poli complessi e coniugati semplici è illustrata dai seguenti esempi.

Esempio

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)}$$

I poli sono $p_{1/2} = -1 \pm j$ e $p_{3/4} = -1 \pm 2j$, ciascuno di molteplicità pari a uno. Si riscrive F(s) come segue:

$$F(s) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{\alpha_2 s + \beta_2}{(s+1)^2 + 4}$$

per cui vanno valutati i coefficienti reali α_1, β_1, α_2 e β_2. Si osserva che valgono le seguenti relazioni:

$$F(s)\left(s^2 + 2s + 2\right) = \alpha_1 s + \beta_1 + \frac{\alpha_2 s + \beta_2}{(s+1)^2 + 4}\left(s^2 + 2s + 2\right)$$

$$F(s)\left(s^2 + 2s + 5\right) = \frac{\alpha_1 s + \beta_1}{(s+1)^2 + 1}\left(s^2 + 2s + 5\right) + \alpha_2 s + \beta_2$$

Calcolando ciascuna delle precedenti identità in una delle radici complesse del polinomio a numeratore del primo membro di tali espressioni si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\left[\alpha_1 s + \beta_1\right]_{s=-1+j} &= F(s)\left(s^2 + 2\ s + 2\right)\Big|_{s=-1+j} \\
\left[\alpha_2 s + \beta_2\right]_{s=-1+2j} &= F(s)\left(s^2 + 2\ s + 5\right)\Big|_{s=-1+2j}
\end{aligned}
$$

da cui dopo semplici passaggi si ha:

$$
\begin{aligned}
-\alpha_1 + \beta_1 + \mathrm{j}\alpha_1 &= \frac{1}{3} \\
-\alpha_2 + \beta_2 + 2\mathrm{j}\alpha_2 &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

per cui

$$
\begin{aligned}
-\alpha_1 + \beta_1 = 1/3 \qquad &\text{e} \qquad \alpha_1 = 0 \\
-\alpha_2 + \beta_2 = 2/3 \qquad &\text{e} \qquad 2\alpha_2 = 0
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 = 0 \qquad &\text{e} \qquad \beta_1 = 1/3 \\
\alpha_2 = 0 \qquad &\text{e} \qquad \beta_2 = 2/3
\end{aligned}
$$

Pertanto si ha:

$$
F(s) = \frac{\frac{1}{3}}{(s+1)^2 + 1} + \frac{\frac{2}{3}}{(s+1)^2 + 4}
$$

quindi

$$
f(t) = \frac{1}{3}\left[e^{-t}\left(sent + sen2t\right)\right] \cdot 1(t)
$$

A titolo di esempio risolviamo ora l'esercizio con il metodo generale, ossia utilizzando i generici coefficienti k_{ij}, in questo caso complessi e coniugati a coppie. Si riscrive F(s) come segue:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1+j)(s+1-j)(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

$$= \frac{k_{11}}{(s+1+j)} + \frac{k^*_{11}}{(s+1-j)} + \frac{k_{21}}{(s+1+2j)} + \frac{k^*_{21}}{(s+1-2j)}$$

dove

$$k_{11} = \left.\frac{s^2 + 2s + 3}{(s+1-j)(s^2 + 2s + 5)}\right|_{s=-1-j} = \frac{1}{6}j$$

$$k_{21} = \left.\frac{s^2 + 2s + 3}{(s^2 + 2s + 2)(s+1-2j)}\right|_{s=-1-2j} = \frac{1}{6}j$$

da cui

$$k^*_{11} = -\frac{1}{6}j$$

$$k^*_{21} = -\frac{1}{6}j$$

per cui si verifica la validità del teorema dei residui:

$$k_{11} + k^*_{11} + k_{21} + k^*_{21} = \frac{1}{6}j - \frac{1}{6}j + \frac{1}{6}j - \frac{1}{6}j = 0\,.$$

Pertanto si ha:

$$F(s) = \frac{1}{6}j\frac{1}{(s+1+j)} - \frac{1}{6}j\frac{1}{(s+1-j)} + \frac{1}{6}j\frac{1}{(s+1+2j)} - \frac{1}{6}j\frac{1}{(s+1-2j)}$$

quindi

$$f(t)=\left(\frac{1}{6}j\cdot e^{-(1+j)t}-\frac{1}{6}j\cdot e^{-(1-j)t}+\frac{1}{6}j\cdot e^{-(1+2j)t}-\frac{1}{6}j\cdot e^{-(1-2j)t}\right)\cdot 1(t)=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{6}j\cdot e^{-t}(\cos t-j\sin t)-\frac{1}{6}j\cdot e^{-t}(\cos t+j\sin t)+\\ +\frac{1}{6}j\cdot e^{-t}(\cos 2t-j\sin 2t)-\frac{1}{6}j\cdot e^{-t}(\cos 2t+j\sin 2t)\end{pmatrix}\cdot 1(t)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[e^{-t}\,\left(\sin t+\sin 2t\right)\right]\cdot 1(t)$$

che coincide con il risultato già trovato.

Esempio

$$F(s)=\frac{s^2+1}{s^2(s+1)(s^2+2s+2)}$$

I poli sono $p_{1/2}=0$, $p_3=-1$ e $p_{4/5}=-1\pm j$, ciascuno di molteplicità pari a uno. Si riscrive F(s) come segue:

$$F(s)=\frac{k_{11}}{s^2}+\frac{k_{12}}{s}+\frac{k_{21}}{s+1}+\frac{\alpha s+\beta}{(s+1)^2+1}$$

Si ha:

$$k_{11} = F(s)\, s^2\Big|_{s=0} = \left.\frac{s^2 + 1}{(s+1)\,(s^2 + 2\,s + 2)}\right|_{s=0}$$

$$k_{12} = \left.\frac{d(F(s)\, s^2)}{ds}\right|_{s=0} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2 + 1}{(s+1)\,(s^2 + 2\,s + 2)}\right)\right|_{s=0}$$

$$k_{21} = F(s)\,(s+1)\Big|_{s=-1} = \left.\frac{s^2 + 1}{s^2\,(s^2 + 2\,s + 2)}\right|_{s=-1}$$

$$[\alpha\, s + \beta]_{s=-1+j} = F(s)\,\left(s^2 + 2\, s + 2\right)\Big|_{s=-1+j}$$

da cui dopo semplici passaggi si ha:

$$k_{11} = 1/2 \quad \text{e} \quad k_{12} = -1$$
$$k_{21} = 2$$
$$\alpha = -1 \text{e} \quad \beta = -1/2$$

Pertanto si ha:

$$F(s) = \frac{1/2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} + \frac{-s - 1/2}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1/2}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2+1}$$

quindi

$$f(t) = \left\{\frac{1}{2}t - 1 + 2e^{-t} - \cos(t)\cdot e^{-t} + \frac{1}{2}\sin(t)\cdot e^{-t}\right\}\cdot 1(t)$$

Esempio

Vediamo ora un esercizio in cui la funzione razionale fratta da antitrasformare presenta poli complessi e coniugati multipli. Pertanto il problema di antitrasformazione è risolvibile unicamente con il metodo generale, utilizzando i generici fratti semplici con coefficienti k_{ij} complessi e coniugati a coppie.

In particolare, si antitrasformi la funzione:

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

La funzione da antitrasformare ha due coppie di radici in +j e –j. Dunque la sua espansione in fratti semplici vale:

$$F(s) = F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = \frac{k_{11}}{(s+j)^2} + \frac{k_{12}}{(s+j)} + \frac{k^*_{11}}{(s-j)^2} + \frac{k^*_{12}}{(s-j)}$$

dove

$$k_{11} = \left.\frac{1}{(s-j)^2}\right|_{s=-j} = -\frac{1}{4}$$

$$k_{12} = \left.\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s-j)^2}\right)\right|_{s=-j} = \left.\frac{-2}{(s-j)^3}\right|_{s=-j} = \frac{j}{4}$$

da cui

$$k^*_{11} = -\frac{1}{4}$$

$$k^*_{21} = -\frac{j}{4}$$

per cui si verifica la validità del teorema dei residui:

$$k_{12} + k_{22} = k_{12} + k^*_{12} = \frac{j}{4} - \frac{j}{4} = 0.$$

Pertanto si ha:

$$F(s) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(s+j)^2} + \frac{j}{4}\frac{1}{(s+j)} - \frac{1}{4}\frac{1}{(s-j)^2} - \frac{j}{4}\frac{1}{(s-j)}$$

quindi

$$f(t) = \left(-\frac{1}{4} t \cdot e^{-jt} + \frac{j}{4} \cdot e^{-jt} - \frac{1}{4} t \cdot e^{jt} - \frac{j}{4} \cdot e^{jt} \right) \cdot 1(t) =$$

$$= (-\frac{1}{4} t(\cos t - j\sin t) + \frac{j}{4}(\cos t - j\sin t) - \frac{1}{4} t(\cos t + j\sin t) +$$

$$-\frac{j}{4}(\cos t + j\sin t)) \cdot 1(t) = \left(-\frac{1}{2} t \cdot \cos t + \frac{1}{2} \sin t \right) \cdot 1(t)$$

OSSERVAZIONI SUI PROCEDIMENTI DI ANTITRASFORMAZIONE SECONDO LAPLACE

L'antitrasformazione di funzioni razionali fratte, che sono quelle trattate nei controlli automatici, è di semplice attuazione perché effettuata utilizzando alcune trasformate notevoli.

L'unica difficoltà del procedimento consiste nella fattorizzazione del polinomio a denominatore, la quale può comunque essere ottenuta utilizzando uno strumento di calcolo automatico, quale ad esempio il software MATLAB.

Si osserva che il comportamento dell'antitrasformata per t tendente all'infinito è legato alla posizione dei *poli* (ossia delle radici del denominatore A(s)) in rapporto all'asse immaginario.

Nel caso di poli semplici nell'antitrasformata si hanno dei termini (*modi*):

$$1(t), \quad e^{pt} \cdot 1(t), \quad e^{\sigma t} \cos\omega t \cdot 1(t) \quad e \quad e^{\sigma t} \sin\omega t \cdot 1(t)$$

dove il modo del primo tipo si ottiene per un polo semplice in p=0, il modo del secondo tipo si ottiene per un polo semplice in p e gli ultimi due modi corrispondono al caso in cui si abbia una coppia di poli in $\sigma \pm j\omega$.

Corrispondentemente, nel caso di poli multipli di molteplicità algebrica α, si hanno *modi* del tipo:

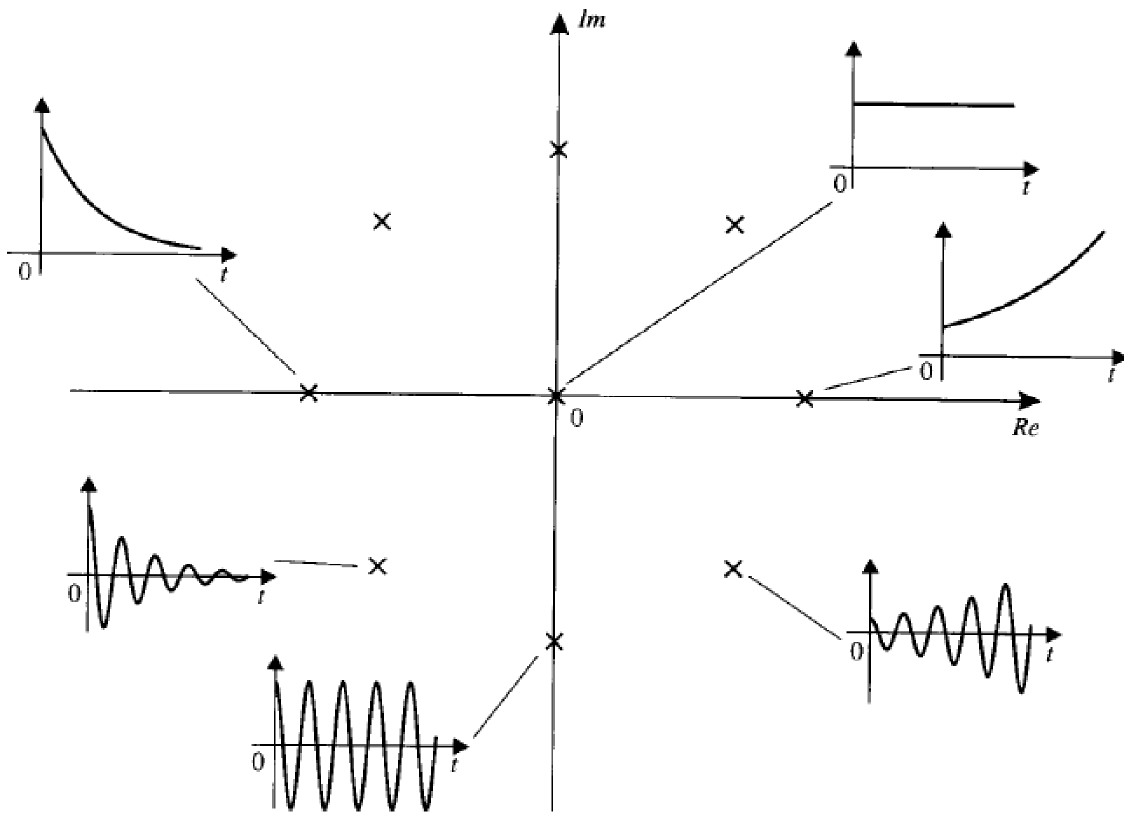
$$t^h \cdot 1(t), \quad t^h e^{pt} \cdot 1(t), \quad t^h e^{\sigma t} \cos\omega t \cdot 1(t) \quad e \quad t^h e^{\sigma t} \sin\omega t \cdot 1(t)$$

in cui h è un intero compreso fra lo zero e α-1.

Nel caso di poli semplici i modi convergono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del relativo polo è negativa, sono limitati se essa è nulla e divergono in ampiezza se essa è positiva.

Inoltre i modi associati a poli reali sono monotoni, mentre quelli associati a poli complessi sono oscillanti.

Modi della risposta nel caso di poli distinti (α=1)

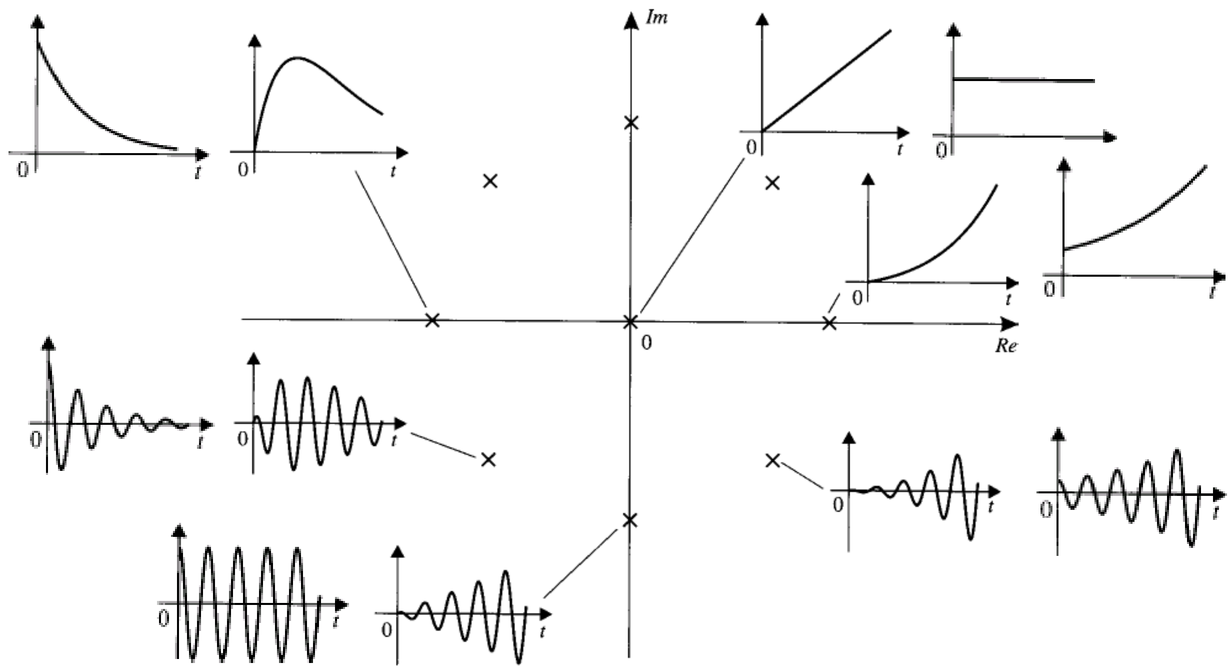


Si osservi che per semplicità di rappresentazione nella figura precedente ai poli complessi e coniugati e a quelli immaginari puri è associato uno solo dei due modi in quadratura di fase che essi presentano.

Nel caso di poli multipli, i modi ad essi associati convergono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del relativo polo è negativa e divergono in ampiezza se essa è nulla o positiva (infatti il modo limitato associato ad un polo multiplo disposto sull'asse immaginario è "coperto" per t tendente all'infinito dagli altri modi associati al polo).

Inoltre i modi associati a poli reali sono monotoni, mentre quelli associati a poli complessi sono oscillanti.

Modi della risposta nel caso di poli multipli (α=2)



Si osservi che per semplicità di rappresentazione nella figura precedente ai poli complessi e coniugati e a quelli immaginari puri sono associati due soli modi dei quattro che essi presentano, omettendone gli altri due in quadratura di fase.

Si deduce in definitiva che l'antitrasformata di una funzione razionale fratta è limitata se e solo se la funzione da antitrasformare non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici, mentre diverge in caso contrario.

RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON IL METODO DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE

Illustriamo la procedura con degli esempi.

Esempio

Si consideri la seguente equazione differenziale che lega la variabile incognita y(t) alla variabile nota di ingresso *4t* e le relative condizioni iniziali su y(t):

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) + 4\,\mathrm{y(t)} = 4\,\mathrm{t} \\ y(0^-) = 1 \\ y^{(1)}(0^-) = 0 \end{cases}$$

Trasformando secondo Laplace ed indicando la trasformata di y(t) con

$$\mathrm{Y(s)} = \mathcal{L}\,\{\mathrm{y(t)}\}$$

si ottiene

$$\mathrm{s}^2\ \mathrm{Y(s)} - \mathrm{s}\ \mathrm{y}(0^-) - \mathrm{y}^{(1)}(0^-) + 4\ \mathrm{Y(s)} = 4\ \frac{1}{\mathrm{s}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\mathrm{s}^2 + 4\right)\ \mathrm{Y(s)} = \frac{4}{\mathrm{s}^2} + \left[\mathrm{s}\ \mathrm{y}(0^-) + \mathrm{y}^{(1)}(0^-)\right]$$

quindi

$$\mathrm{Y(s)} = \underbrace{\frac{4}{\mathrm{s}^2} \cdot \frac{1}{\mathrm{s}^2 + 4}}_{\text{trasformata della evoluzione forzata}} + \underbrace{\frac{\mathrm{s}\ \mathrm{y}(0^-) + \mathrm{y}^{(1)}(0^-)}{\mathrm{s}^2 + 4}}_{\text{trasformata della evoluzione libera}}$$

Da questa espressione si nota che Y(s) e quindi y(t) dipendono da due termini: il primo legato solo all'ingresso, ossia al termine “forzante” (*risposta* o *evoluzione forzata*) ed il secondo dovuto unicamente alle condizioni iniziali (*risposta* o *evoluzione libera*).

Quindi i poli e dunque i modi che caratterizzano la trasformata dell’uscita del sistema in risposta a un segnale di ingresso (come l’impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli ottenuti dalla equazione differenziale (ossia dalla cosiddetta funzione di trasferimento) del sistema, cui si aggiungono quelli relativi alla trasformata di Laplace del segnale applicato in ingresso.

Nel caso in esempio i modi di sistema sono quelli associati al polinomio a denominatore s^2+4, ossia ai poli ±2j, quindi valgono cos(2t) e sin(2t), mentre i poli dovuti all’ingresso sono quelli associati al polinomio denominatore s^2, ossia al polo *doppio* 0, quindi sono due e valgono r(t)=t•1(t) e 1(t) e non solo r(t) come si potrebbe pensare.

Scrivendo Y(s) come funzione razionale fratta, dopo aver sostituito i valori delle condizioni iniziali, e specificando i diversi fratti semplici, si ricava:

$$Y(s) = \frac{4}{s^2}\frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4} = \frac{s^3+4}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{\alpha s + \beta}{s^2+4}$$

ed i coefficienti si determinano con i soliti metodi:

$$k_{11} = \left[\frac{s^3+4}{s^2\left(s^2+4\right)}\, s^2\right]_{s=0} = 1$$

$$Y_1(s) = Y(s) - \frac{k_{11}}{s^2} = \frac{s^3+4}{s^2\left(s^2+4\right)} - \frac{1}{s^2} = \frac{s^3\text{-}s^2}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{s\text{-}1}{s^2+4} =$$

$$= \frac{k_{12}}{s} + \frac{\alpha\ s+\beta}{s^2+4} \Rightarrow \quad k_{12}=0, \quad \alpha=1, \quad \beta=\text{-}1.$$

$$Y(s)= \frac{1}{s^2} + \frac{s\text{-}1}{s^2+4} = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\ \frac{2}{s^2+4}$$

Pertanto la trasformata inversa di Y(s) si scrive:

$$y(t) = \left(t + \cos 2t - \frac{1}{2} sen 2t \right) 1(t)\,.$$

Evidentemente lo stesso esercizio si può risolvere applicando il principio di sovrapposizione degli effetti (l'equazione è lineare) e ricordando che:

$$y(t) = \underbrace{y_f(t)}_{\text{evoluzione forzata}} + \underbrace{y_l(t)}_{\text{evoluzione libera}}$$

dove $y_f(t)$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y_f^{(2)}(t) + 4\, y_f(t) = 4\, t \\ y_f(0^-) = 0 \\ y_f^{(1)}(0^-) = 0 \end{cases}$$

e $y_l(t)$ è la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y_l^{(2)}(t) + 4\, y_l(t) = 0 \\ y_l(0^-) = 1 \\ y_l^{(1)}(0^-) = 0 \end{cases} .$$

Si ha:

$$s^2\ Y_f(s) + 4\ Y_f(s) = 4\ \frac{1}{s^2} \ \Rightarrow\ Y_f(s) = \frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)}$$

$$Y_f(s) = \frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{k_{11}}{s^2} + \frac{k_{12}}{s} + \frac{\alpha\ s + \beta}{s^2+4}$$

ed i coefficienti si determinano con i soliti metodi:

$$k_{11} = \left[\frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)}\ s^2\right]_{s=0} = 1$$

$$Y_{f1}(s) = Y_f(s) - \frac{k_{11}}{s^2} = \frac{4}{s^2\left(s^2+4\right)} - \frac{1}{s^2} = \frac{4\text{-}s^2-4}{s^2\left(s^2+4\right)} = \frac{-1}{s^2+4} =$$

$$= \frac{k_{12}}{s} + \frac{\alpha\ s+\beta}{s^2+4} \Rightarrow\quad k_{12}=0,\quad \alpha=0,\quad \beta=-1.$$

$$Y_f(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2}\ \frac{2}{s^2+4}$$

per cui la trasformata inversa è:

$$y_f(t) = \left(t - \frac{1}{2}\text{sen}2t\right)\ 1(t)\,.$$

Inoltre si ha:

$$s^2\ Y_l(s) + 4\ Y_l(s) - s\ y_l(0^-) - y_l^{(1)}(0^-) = 0 \ \Rightarrow\ Y_l(s) = \frac{s}{s^2+4}$$

per cui la trasformata inversa è:

$$y_1(t) = (\cos 2t)\ 1(t).$$

e dunque

$$y(t) = y_f(t) + y_1(t) = \left(t + \cos 2t - \frac{1}{2}\mathrm{sen} 2t \right) 1(t).$$

Esempio

Applichiamo la trasformata di Laplace ai sistemi di equazioni differenziali.

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = 2\,x(t) - 3\,y(t) \\ y^{(1)}(t) = -2\,x(t) + y(t) \\ x(0^-) = 8 \\ y(0^-) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \begin{bmatrix} x^{(1)}(t) \\ y^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x(0^-) \\ y(0^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Trasformando secondo Laplace si ha:

$$\begin{cases} s\,X(s) - x(0^-) = 2\,X(s) - 3\,Y(s) \\ s\,Y(s) - y(0^-) = -2\,X(s) + Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (s-2)\,X(s) + 3\,Y(s) = x(0^-) = 8 \\ 2\,X(s) + (s-1)\,Y(s) = y(0^-) = 3 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix}$$

da cui, invertendo la matrice:

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 3s - 4}\begin{bmatrix} s-1 & -3 \\ -2 & s-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2 - 3s - 4}\begin{bmatrix} 8s-17 \\ 3s-22 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} X(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{8s-17}{(s-4)(s+1)} \\ \dfrac{3s-22}{(s-4)(s+1)} \end{bmatrix}.$$

L'espansione in fratti semplici è dunque:

$$X(s) = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)} = \frac{k_1}{s-4} + \frac{k_2}{s+1} = \frac{3}{s-4} + \frac{5}{s+1}$$
$$Y(s) = \frac{3s-22}{(s-4)(s+1)} = \frac{k_3}{s-4} + \frac{k_4}{s+1} = \frac{-2}{s-4} + \frac{5}{s+1}$$

Antitrasformando secondo Laplace si ottiene la soluzione del sistema:

$$x(t) = \left(3e^{4t} + 5e^{-t}\right)\cdot 1(t)$$
$$y(t) = \left(-2e^{4t} + 5e^{-t}\right)\cdot 1(t)$$