Esercizio n. 1

1) Dati i vettori

$$u = 3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k} \qquad \text{applicato in } P_1(0,2,1)$$
$$\vec{v} = -i + 3\vec{j} - 2\vec{k} \qquad \text{applicato in } P_2(1,0,2)$$
$$\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} \qquad \text{applicato } P_3(0,0,0)$$

a: determinare la loro risultante.
b: calcolare il prodotto scalare $\vec{u} \cdot \vec{v}$
c: calcolare il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
d: calcolare il prodotto misto $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$.

Risposte.
a: la risultante vale $\vec{R} = 3\vec{i} + 8\vec{j} - \vec{k}$
b: il prodotto scalare dei primi due vettori vale **–3+12-2=7**
c: il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ si ricava dal determinante

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

e vale

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -11\vec{i} + 5\vec{j} + 13\vec{k}.$$

d: il prodotto misto $\vec{u} \wedge \vec{v} \cdot \vec{w}$ è dato dal seguente determinante le cui righe sono rispettivamente le componenti dei tre vettori dati

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

2) Determinare il momento del vettore $(\vec{u}, P_1)$ rispetto al punto A(0,3,2), il momento risultante dei tre vettori dati rispetto al punto A e il momento risultante assiale dei tre vettori dati rispetto alla parallela all'asse z passante per A.

Risposte.

Si ha per il $\vec{M}_A$ di $\vec{u}$

$$M_A = (P - A) \wedge \vec{u} = \left(-\vec{j} - \vec{k}\right) \wedge \left(3\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

mentre il momento assiale del solo vettore $\vec{u}$ è dato da

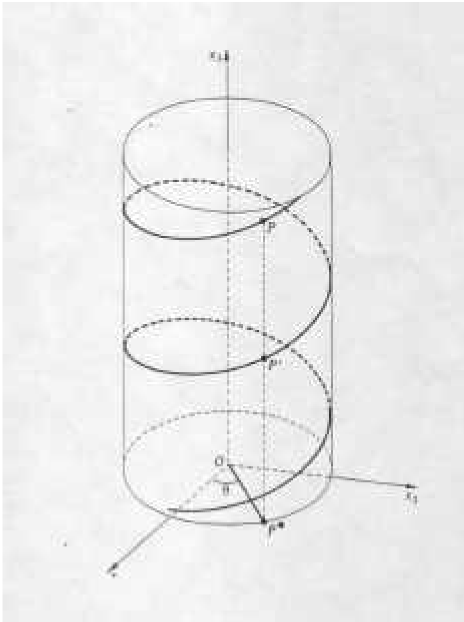
$$M_a = \left(P - A\right) \wedge \vec{u} \cdot \vec{k} = \vec{M}_A \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Per ottenere il Momento risultante e il momento risultante assiale e i tre vettori dati è necessario sommare ai momenti già calcolati del primo vettore $\vec{u}$ i momenti (ancora da calcolare!) riguardanti gli altri due vettori. Notiamo che il momento risultante rispetto ad A continua ad essere un vettore (la somma, o risultante,dei tre momenti) e il momento risultante assiale è comunque uno scalare in quanto somma di tre numeri.

Esercizio n. 2

1) Dato un punto P mobile su un'elica circolare si scriva la velocità di P.
2) Si osservi che istante per istante, il moto di P è la somma di due moti: uno parallelo all'asse z e l'altro, circolare, che avviene su una circonferenza, di raggio pari al raggio dell'elica, sempre perpendicolare al detto asse e mobile lungo la verticale.

(Si faccia uso di coordinate cilindriche nello spazio)



Risposta.

Con riferimento alla figura le coordinate di P espresse nel riferimento indicato sono:

$$x = r\cos q \qquad y = r\sin q \qquad z = hq$$

Pertanto la velocità di P è

$$\vec{v}_P = -r\sin q\dot{q}\vec{i} + r\cos q\dot{q}\vec{j} + h\dot{q}\vec{k} =$$
$$= r\dot{q}(-\sin q\vec{i} + \cos q\vec{j}) + h\dot{q}\vec{k}$$

La formula mostra chiaramente che la velocità del punto P è data dal contributo di due moti : uno rettilineo (lungo $\vec{k}$)e uno circolare. Difatti la quantità entro parentesi è il versore tangente alla circonferenza di raggio r disegnata in figura nel

piano (x, y). Durante il moto possiamo immaginare il punto P che descrive questa circonferenza mentre la stessa si muove lungo l'asse z con velocità $\dot{z} = h\dot{J}$.

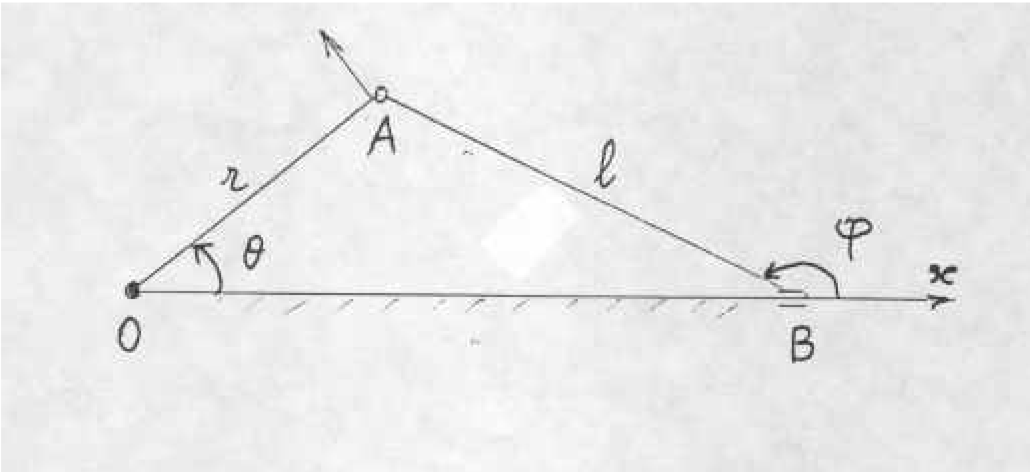
La quantità h è detta *passo dell'elica* ed è tale che la distanza tra due punti consecutivi P e P' situati sulla stessa generatrice vale

$$\left|P - P'\right| = 2ph.$$

Invertendo la formula si legge che h non è altro che l'incremento di quota del punto P corrispondente alla rotazione di un radiante.

Esercizio n. 3

Nel manovellismo di primo genere (vedi fig.) la velocità angolare della manovella è costante. Determinare la velocità e l'accelerazione angolare della biella e la velocità e l'accelerazione del piede della biella.



Risposte.

Questo sistema ha un grado di libertà. Si è quindi in grado di esprimere la posizione di B sull'asse x e l'angolo di rotazione della biella l tramite un unico parametro geometrico che viene assunto come coordinata langrangiana: l'angolo J che la manovella r forma con la retta orizzontale passante per O.

Una volta scritte le relazioni geometriche, le derivate prima e seconda rispetto al tempo danno rispettivamente le velocità e le accelerazioni richieste.

Dal triangolo si ha (teorema dei seni)

(1) $$\sin J = l \sin q \qquad \text{con} \qquad l = \frac{r}{l}$$

derivando

(2) $$\cos J = l \cos q \dot{q}$$

e, sfruttando la (1),

(3) $$\dot{j} = \frac{l \cos q}{\cos J} q = \frac{l \cos q}{\sqrt{1 - l^2 \sin^2 q}} \dot{q}$$

che è la velocità angolare richiesta.

Derivando ulteriormente la (3) rispetto al tempo si ottiene l'accelerazione angolare $\ddot{J}$. Notiamo la mancanza del termine che contiene $\ddot{J}$ data l'assegnata velocità angolare costante $\dot{q}$.

(4) $$\ddot{J} = l\left[\frac{l^2 \sin q \cos q}{(1-l^2\sin^2 q)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\sin q}{\sqrt{1-l^2 \sin q^2}}\right]\dot{q}^2$$

Per il piede di biella B di ha

(5) $$x_B = r\cos q - l\cos J \qquad \dot{x}_B = -r\sin q\dot{q} + l\sin J\dot{J}$$

Utilizzando i precedenti calcoli possiamo scrivere

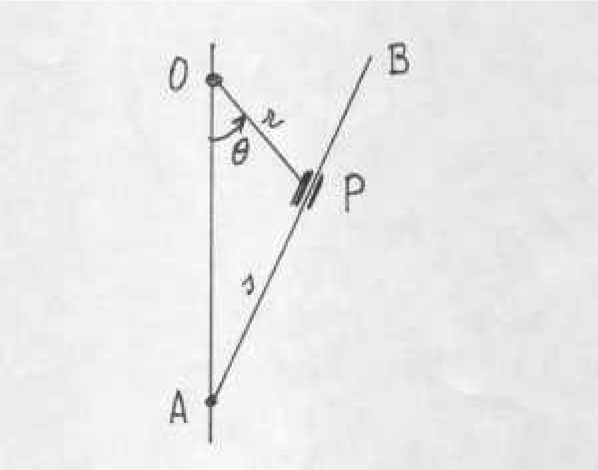
(6) $$x_B = r\dot{q}\left(\frac{1}{2}\frac{l\sin 2q}{\sqrt{1-l^2\sin^2 q}} - \sin q\right)$$

Un'ulteriore derivazione rispetto al tempo fornisce l'accelerazione $\ddot{x}_B$.

Esercizio n.4

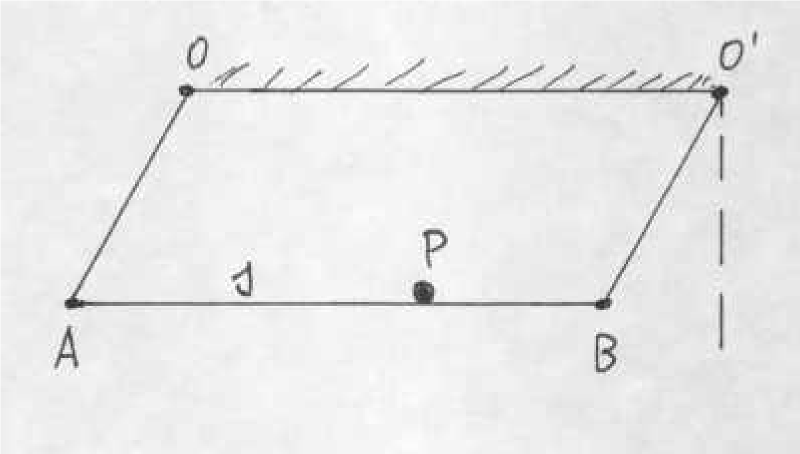
1) Data la guida di Fairbain indicata in figura, supponendo nota la velocità angolare della manovella, si determini, per una data configurazione, la velocità e l'accelerazione angolare del glifo.

2) Nelle stesse condizioni di cui al punto precedente si determini la velocità e l'accelerazione con cui il punto *P* si muove sull'asta *AB*.



3) Utilizzando le formule di velocità e l'accelerazione dei moti composti del punti, si scrivano le formule di velocità e accelerazione del punto *P* che si muove sul lato *AB* del parallelogramma articolato indicato in figura.

Si noti che i punti O e O' delle aste uguali *OA* e *OB* sono fissi. Qual è l'atto di moto dell'asta *AB* ?



Risposte

1) Il punto *P* appartiene alla manovella e nello stesso tempo scorre sul glifo seguendo questo nel suo moto. Quindi possiamo affermare che il suo moto assoluto, rotatorio attorno ad *O*, è somma

- del moto di scorrimento sul glifo che ruota attorno ad *A*.
- del moto di trascinamento del glifo che ruota attorno ad *A*.

Pertanto in formule possiamo scrivere

$$\vec{v}_P = \dot{s}\vec{l} + s\dot{J}\vec{m}$$

dove *s* è la distanza istantanea di *P* da *O*.

Per le accelerazioni si ha una formula analoga

$$\vec{a}_P = \ddot{s}\vec{l} + s\ddot{J}\vec{m} - s\dot{J}^2\vec{l} + 2\dot{J}\vec{k} \wedge \dot{s}\vec{l}$$

nella quale compare l'ultimo termine che viene chiamato accelerazione complementare o do Coriolis. Come si nota questa è sempre normale alla velocità relativa.

Le formule precedenti si prestano molto bene a una scrittura che metta in evidenza le altre grandezze richieste.

In ogni caso lo studente può provare da solo a scrivere delle relazioni geometriche tratte dalla figura, come fatto a proposito del manovellismo, e poi derivarle rispetto al tempo. A titolo di suggerimento, provare a scrivere il teorema sei seni e il teorema di Carnot per il triangolo *AOP*,tenendo conto che la coordinata langrangiana più comoda è l'angolo J e che il lato *s* è variabile.

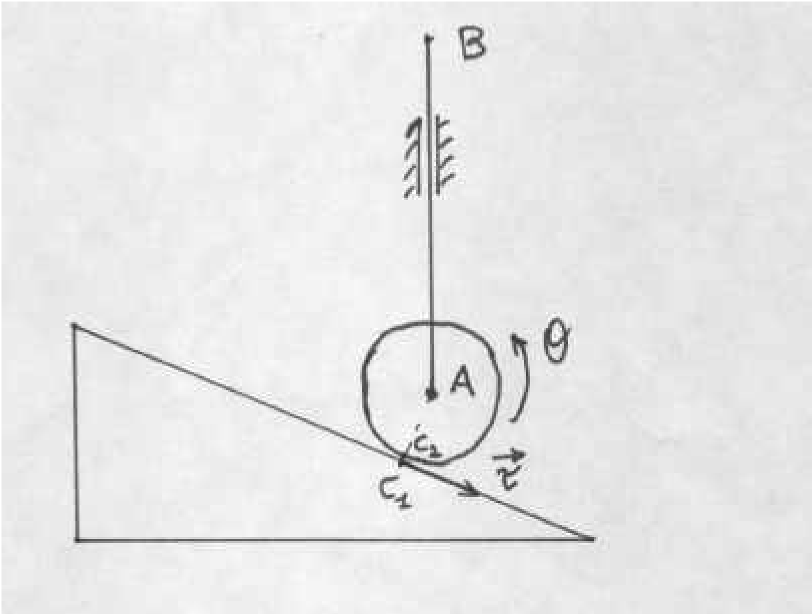
3) Dal punto di vista teorico questo esempio è simile al precedente. Si tratta infatti di un moto composto del punto *P* con la differenza che il sistema che genera il moto di trascinamento, l'asta *AB*, non ruota ma trasla. Difatti si tratta di un moto traslatorio circolare. Avremo quindi

$$\vec{v}_P = \dot{s}\vec{l} + l\dot{q}t \qquad \vec{a}_P = \ddot{s}l + \ddot{q}\vec{m} + l\dot{q}^2\vec{n}$$

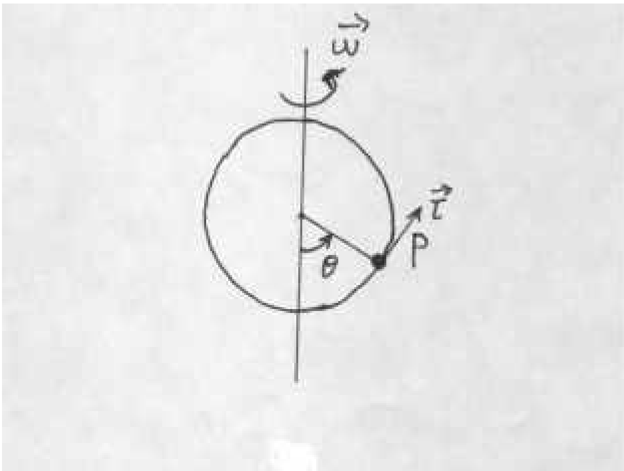
L'accelerazione di Coriolis non è presente in quanto è nulla la rotazione di trascinamento.

Esercizio n.5

1) Sia dato il sistema indicato in figura costituito da un triangolo dotato di moto traslatorio lungo l'asse x, da una rotella che può rotolare senza strisciare sull'ipotenusa del triangolo e da un'asta AB, incernierata con l'estremo A nel centro della rotella e vincolata a rimanere in posizione verticale durante il moto. Nota in data configurazione la velocità di traslazione del triangolo si determini la velocità angolare della rotella e la velocità dell'estremo B dell'asta.



2) Un punto P percorre una circonferenza di raggio r mentre questa ruota attorno a un suo diametro (fisso) con rotazione costante $\vec{w}$. Scrivere la velocità e l'accelerazione di P.



Risposte

1) Dato il vincolo di rotolamento puro possiamo considerare la rotella e il triangolo come due polari in moto relativo. Pertanto imponiamo l'eguaglianza della velocità dei punti punti a contatto C_1 e C_2. Ma tutti i punti del triangolo hanno egual velocità assegnata e sia questa $\dot{x}$. La velocità del punto C_2 della rotella si scrive con la formula fondamentale riferendola al punto A. La velocità di A è inoltre la stessa di B appartenendo alla stessa parte rigida che trasla verticalmente.
Pertanto in formule si ha

$$vc_1 = \vec{v}c_2 \qquad\qquad \dot{x}\vec{i} = \vec{v}A + r\dot{q}\vec{t}$$

con $\vec{t}$ versore tangente alla rotella e parallelo all'ipotenusa del triangolo. La formula ricavata si presta a una facile risoluzione grafica. Lo studente provi a risolverla partendo dal vettore noto a primo membro.

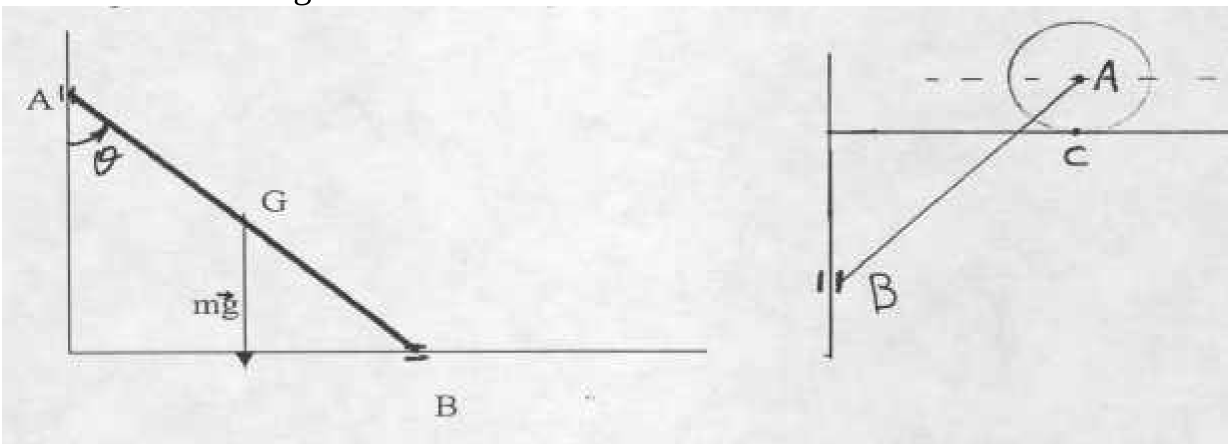
2) Il secondo quesito riguarda la cinematica del punto P. Esso si muove sulla circonferenza che a sua volta ruota con velocità angolare costante w attorno alla retta fissa. Pertanto valgono le formule dei moti composti del punto

$$\vec{v}P = r\dot{q}\vec{t} + r\sin qw\,\vec{m}$$

Il vettore $\vec{t}$ è tangente alla circonferenza nel piano ruotante è normale a detto piano (vettore entrante). Lo studente ricavi in modo analogo l'accelerazione di P.

Esercizio n. 6

1)Data l'asta l, di massa m, i cui estremi A e B scorrono su due guide ortogonali fisse si scriva l'energia cinetica.



3) Per il manovellismo di primo genere già studiato nell'esercizio n.3 si scriva l'energia cinetica complessiva, la quantità di moto e il momento della quantità di moto dell'asta AB rispetto al punto A.
4) Dato il sistema costituito dall'asta AB vincolata a scorrere con l'estremo B sull'asse y e dal disco di raggio r, incernierato all'asta nel punto A e vincolato a rotolare senza strisciare sulla retta x, si scriva l'energia cinetica del sistema. (m_1 massa dell'asta e m_2 massa del disco)

Risposte

1) Il problema è continuamente ricorrente nella meccanica del corpo rigido. Si tratta di scrivere con il teorema di Koning l'espressione dell'energia cinetica. Si ha con ovvio significato dei simboli

$$T = \frac{1}{2} m v^2 G + \frac{1}{2} I_G \dot{q}^2$$

dove

$$v_G^2 = \dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 \text{ e } I_G = \frac{ml^2}{12}$$

Osservazione importante: il centro di velocità dell'asta, C, che si trova per il teorema di Chasles sull'intersezione delle perpendicolari alle direzioni delle traiettorie di due punti qualsiasi, in questo caso si trova all'intersezione delle parallele agli assi per A e B, punti dei quali sono certe le traiettorie, e mantiene sempre la stessa distanza dal baricentro G. Si può allora scrivere l'energia cinetica T come se l'asta ruoti attorno a C

$$T = \frac{1}{2} I_C \dot{q}^2 = \frac{1}{2} \frac{ml^2}{3} \dot{q}^2$$

Come utile esercizio lo studente controlli l'identità della due formule.

5) L'energia cinetica sarà la somma delle energie cinetiche di biella e manovella. Pertanto dette m_1 e m_2 le masse rispettive avremo

$$T = \frac{1}{2} I_O \dot{q}^2 + \frac{1}{2}(m_2 v_G{}^2 + I_G \dot{j}^2)$$

con $I_O = \frac{m_1 r^2}{3}, \mathrm{I_G} = \frac{m_2 l^2}{12}$ e le altre grandezze note dalla cinematica del problema. Si ha inoltre

$$\vec{Q} = m_1 \vec{v}_{G_1} + m_2 \vec{v}_{G_2}$$

$$\vec{K}_A = m_2 (G - A) \wedge \vec{v}_A + I_A \dot{j} \vec{k}$$

6) L'asta si muove con gli estremi su due guide ortogonali, pertanto ricordando il caso 1) avremo

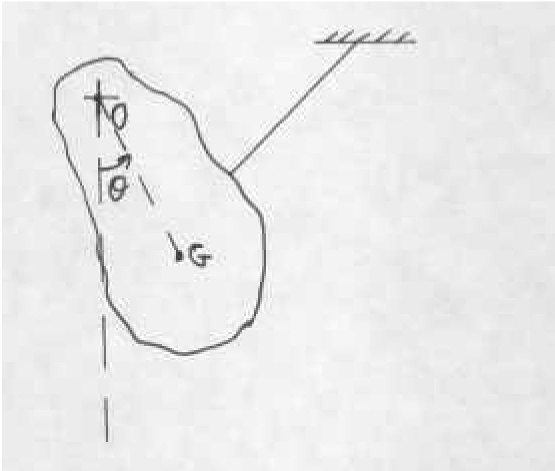
$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 l^2}{3} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} I_C \dot{j}^2$$

con $I_C = \frac{3}{2} m_2 r^2$ le velocità angolari legate dalla relazione

$$\dot{j}^2 = \frac{l^2 \sin^2 q \; {}^2\dot{q}^2}{r^2}$$

Esercizio n.7

1) Dato un pendolo composto, determinare l'accelerazione angolare e la reazione vincolare in O in condizioni di moto incipiente.



Risposte

Si supponga il pendolo trattenuto da un filo una parte fissa col baricentro allontanato dalla verticale per O. Il moto incipiente può essere realizzato troncando il filo che trattiene il pendolo. In tale istante la velocità angolare è ancora nulla mentre l'accelerazione angolare è quella che viene richiesta.
Per scrivere un'equazione del moro si può pensare a un equazione di un momento con polo O. Pertanto si ha

$$-mgOG\sin\theta - I_O\ddot{\theta} = 0$$

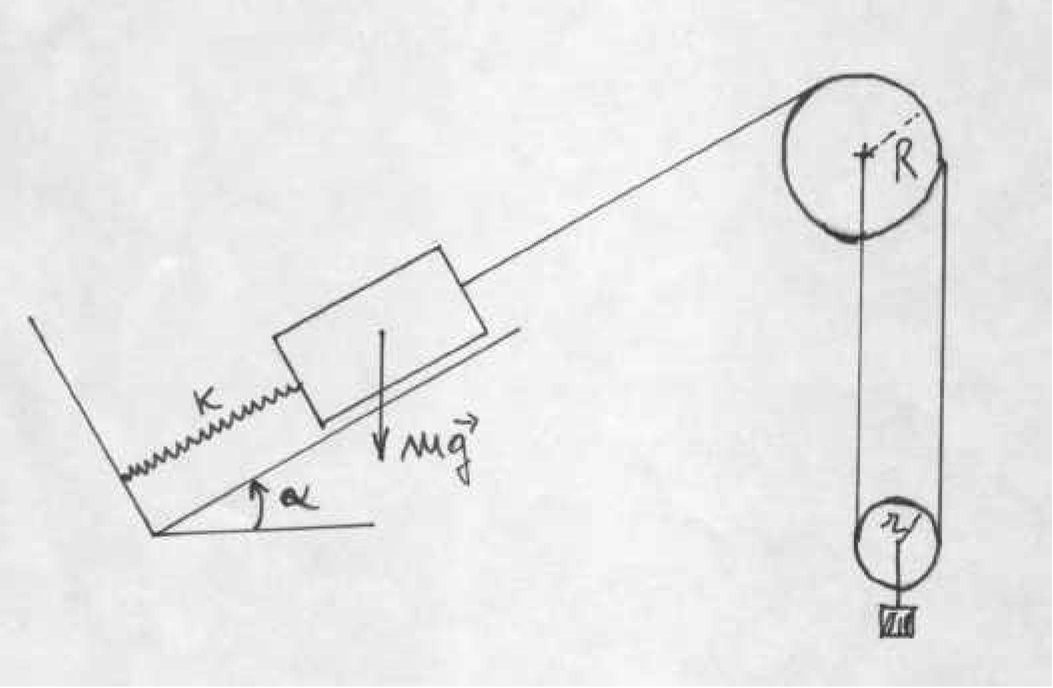
dove I_O è il momento d'inerzia del pendolo rispetto alla normale alla figura passante per O. Dall'equazione precedente si ricava l'accelerazione angolare. La reazione vincolare si ricava scrivendo un'equazione vettoriale di risultante e proiettando quindi lungo le direzioni orizzontale e verticale.

$$m\vec{g} + \vec{f}_O - mOG\ddot{\theta}\vec{\tau} = 0$$

La $\ddot{\theta}$ che compare è quella già ricavata.

Esercizio n. 8

Il sistema materiale di figura è contenuto in un piano verticale ed è costituito da un blocco scorrevole senza attrito su un piano, inclinato di un angolo a sull'orizzontale, e da un peso collegato tramite una fune al blocco scorrevole. La fune è vincolata a passare senza strisciamento su due carrucole, una mobile e una fissa, di raggio rispettivamente r e R.
Un'estremità della fune è fissata al centro della carrucola fissa di modo che sono eguali mentre quelle delle carrucole sono trascurabili.
Scelta x come coordinata lagrangiana, si ricavi, in condizioni di equilibrio, il valore della costante k della molla di figura.
Si scriva poi l'equazione del moto del sistema e si indichi il valore della pulsazione propria.
Si indichi infine la soluzione dell'equazione del moto ricavando l'integrale particolare corrispondente a condizioni iniziali assegnate $\dot{x}_O, x_O$.



Risposte

Il legame tra la coordinata langranciana e gli altri parametri è dato dalle relazioni

$$x = -Rq; \qquad z_P = -\frac{1}{2}Rq = \frac{x}{2}$$

La costante della molla si ricava imponendo che in condizioni di equilibrio sia soddisfatta l'equazione dei lavori virtuali

$$\delta\Gamma = -kxdx + mg\sin a\,dx + mg\frac{dx}{2} = 0$$

della quale dividendo per δx si ricava k.

Si può anche scrivere il potenziale e poi eguagliare a zero la derivata rispetto a x. Si ritrova l'equazione precedente.

$$U = \frac{-kx^2}{2} + mgx\sin a + mg\frac{x}{2}$$

$$\frac{dU}{dx} = -kx + mg(\sin a + \frac{1}{2})$$

L'equazione del moto si ottiene o dall'equazione dei lavori con l'aggiunta in questo caso delle forze d'inerzia o procedendo a scrivere l'energia cinetica del sistema e quindi l'equazione di Langrange. In questo ultimo modo si ha

$$T = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + m\frac{\dot{x}^2}{4}\right) = \frac{15}{24}m\dot{x}^4$$

e l'equazione del moto sarà

$$\ddot{x} + \frac{4k}{5m}x = \frac{4}{5}g\left(\sin a + \frac{1}{2}\right)$$

L'equazione scritta è una delle più trattate nei primi corsi di Analisi e quindi ben nota allo studente.

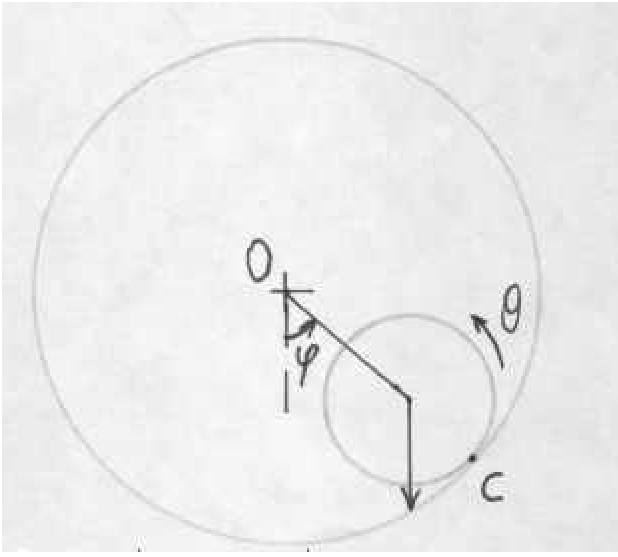
Esercizio n. 9

1) Dato il disco di raggio r e massa m, mobile all'interno di una cavità circolare fissa di raggio R e centro O, si scrivano nell'ordine

Il potenziale

L'energia cinetica

L'equazione del moto tramite un'equazione di momento attorno a C.



Questo esercizio è strettamente semplice ma presenta qualche difficoltà che è bene chiarire.

- Per quanto riguarda il potenziale è bene riferirsi al punto fisso O. Pertanto, indicato con J l'angolo formato tra la congiungente OA e la verticale per O, scriveremo

$$U = mg(R-r)\cos J$$

- Per l'energia cinetica del disco, essendo il moto piano, avremo

$$T = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}I_A\dot{q}^2 \equiv \frac{1}{2}I_C\dot{q}^2$$

dove l'angolo q, angolo di rotazione del disco **non** è l'angolo precedentemente indicato con J ma è l'angolo di cui ruota il disco, angolo che deve essere scelto tra una direzione fissa e una mobile e solidale col disco. Questo angolo quindi deve essere un angolo diverso da J, in quanto quest'ultimo indica la rotazione del segmento OA rispetto alla verticale, e il segmento OA non è solidale al disco.

Ma il disco è un sistema a un grado di liberta, la coordinata langrangiana è una sola, quindi bisogna scrivere una relazione tra questi due angoli o tra le loro derivate.

Tale relazione si ricava eguagliando le velocità del punto A, considerato una volta come punto che ruota attorno ad O su una circonferenza di raggio $(R-r)$ con velocità angolare $\dot{J}$, e una seconda volta come punto solidale al disco, sfruttando quindi il centro di istantanea rotazione C e la rotazione $\dot{q}$. Si ha pertanto

$$v_A = (R-r)\dot{J} = -r\dot{q}$$

(Il segno meno è necessario tenuto conto che le due rotazioni sono di segno opposto.)

Si ha quindi l'energia cinetica tramite la formula già ricavata, in funzione della velocità angolare $\dot{J}$,

$$T = \frac{1}{2}\frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{J}^2$$

Notiamo ancora che essendo C il centro di velocità del disco e mantenendosi a distanza fissa da O si può scrivere direttamente l'energia cinetica attorno a C ottenendola in forma monomia e in funzione di $\dot{q}$

$$T = \frac{1}{2}I_C\dot{q}^2$$

L'equazione del moto si ottiene scrivendo la seconda equazione cardinale della dinamicacon polo dei momenti C.

$$mgr\sin J - I_C\ddot{q} = 0$$

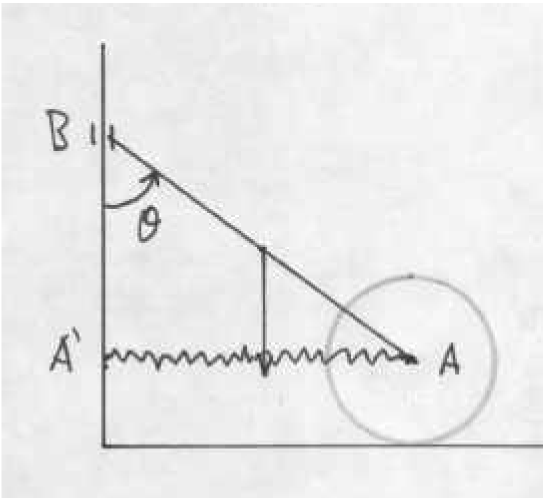
nella quale non compare il momento della reazione vincolare in quanto questa passa per C. La relazione ricavata per le velocità, derivata rispetto al tempo, permette, eliminando $\ddot{q}$, di pervenire alla forma finale dell'equazione del moto

$$\ddot{J} + \frac{g}{(R-r)}\sin J = 0$$

Esercizio n.10

1) Il sistema materiale indicato in figura è costituito da un'asta di lunghezza l e massa m_1 incernierata con l'estremo A nel centro di un disco di massa m_2 e di raggio r. Il disco rotola senza strisciare su una retta x mentre l'asta è vincolata in A con una cerniera mobile e in B a scorrere senza attrito su una retta y. Oltre alle forze peso è applicata una forza elastica tra il punto A' ed il punto A.

a) Scrivere il potenziale del sistema.
b) Scrivere l'energia cinetica del sistema
c) Scrivere l'equazione del moto



Risposte:

a)Le forze attrattive sono conservative pertanto il potenziale si scrive immediatamente. Esso vale

$$U = -m_1 g \frac{l}{2} \cos q - \frac{k}{2} l^2 \sin^2 q + \cos t$$

b) L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2} \frac{m_1 l^2}{3} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{2} m_2 r^2 \dot{j}^2$$

Per eliminare j^2 si scrive la velocità di A come punto del disco dell'asta : eguagliando ed elevando al quadrato si ottiene

$$r^2 \dot{j}^2 = l^2 \cos^2 q \dot{q}^2$$

Si ha così

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 l^2}{3} + \frac{3}{2} m_2 l^2 \cos^2 q \right)\dot{q}^2$$

Per scrivere l'equazione del moto facciamo uso dell'equazione di Lagrange nella coordinata langrangiana q.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{dU}{dq}$$

Si ha intanto

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{m_1 l^2}{3} + \frac{3}{2} m_2 l^2 \cos^2 q \right)\dot{q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) = \left(\frac{m_1 l^2}{3} + \frac{3}{2} m_2 l^2 \cos^2 q \right)\ddot{q} - 3 m_2 l^2 \sin q \cos q \dot{q}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{3}{2} m_2 l^2 \sin q \cos q \dot{q}^2$$

$$\frac{dU}{dq} = m_1 g \frac{l}{2} \sin q - k l^2 \sin q \cos q$$

quindi l'equazione del moto

$$\left(\frac{3}{2} m_2 l \cos^2 q + \frac{m_1 l}{3} \right)\ddot{q} - \frac{3}{2} m_2 l \sin q \cos q \dot{q}^2 = \frac{1}{2} m_1 g \sin q - k l \cos q \sin q$$

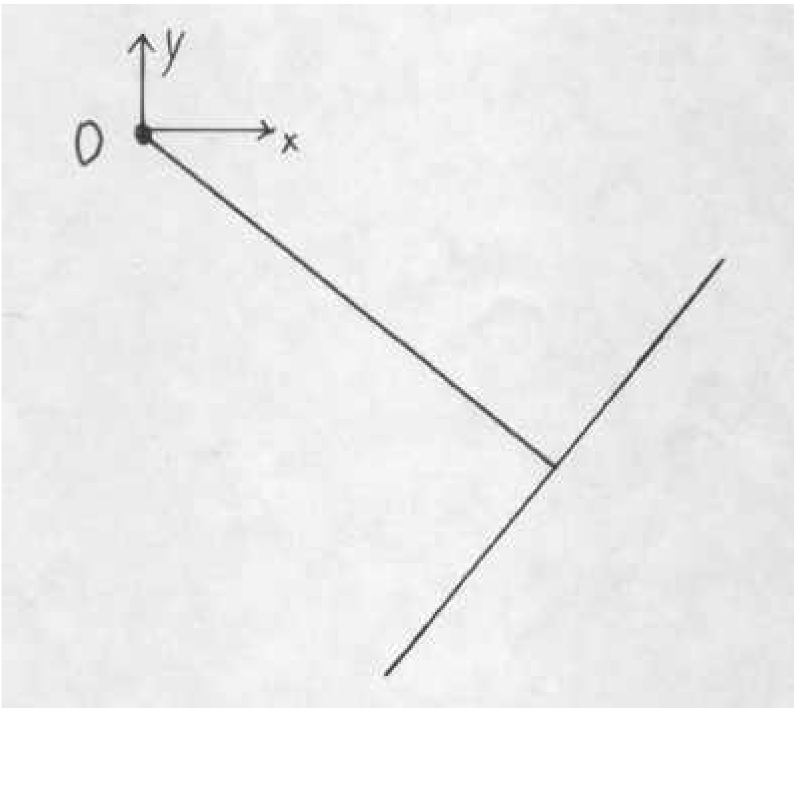
Esercizio n. 11

La trave a T di figura è formata da due aste di egual lunghezza l e massa m saldate ad un angolo retto come in figura e ruotanti in un piano verticale.

Supposto che la trave ruoti, con velocità angolare costante, attorno al punto fisso O si determini la reazione vincolare f_0 quando $q = p/2$ e quando $q = 0$.

Si eseguano i calcoli numerici nel caso

$$l = 50\ cm$$
$$m = 8Kg_m$$
$$\dot{q} = w = 4rad/\sec$$



Risposte

Con una equazione di risultante di ricavano le componenti della reazione vincolare in O:

$$f_{0_x} = m(\ddot{x}_{G1} + \ddot{x}_{G_2}) \qquad f_{0_Y} - 2mg = m(\ddot{y}_{G_1} + \ddot{y}_{G_2})$$

$q = p/2$:

$$\ddot{x}_{G_1} = -\frac{1}{2}w^2 \qquad \ddot{x}_{G_2} = -lw^2 \qquad \ddot{y}_{G_1} = \ddot{y}_{G_2} = 0$$

Sostituendo i valori nelle componenti della reazione vincolare già trovata si ottiene

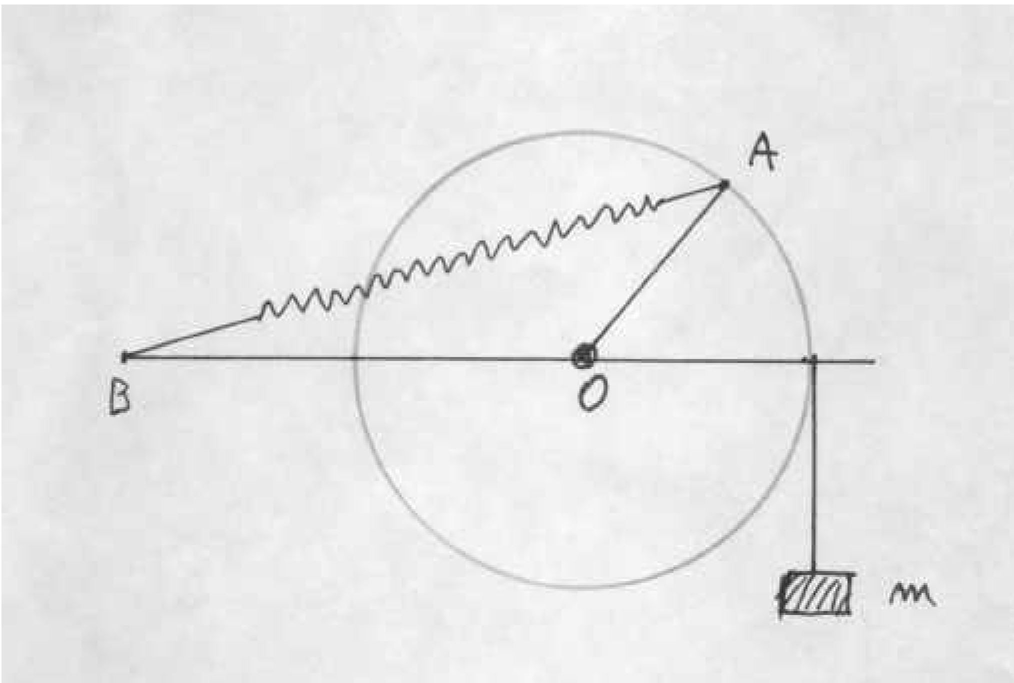
$$f_{O_x} = 0 \qquad f_{O_y} = 256{,}96N$$

Esercizio n. 12

La carrucola indicata in figura, di massa M e raggio r, incernierata nel suo centro O e può quindi ruotare attorno ad O nel piano verticale. Sulla carrucola è avvolta una fune che all'estremità libera porta un peso m. Il tratto di fune svolgentesi dalla carrucola si mantiene verticale. Una molla di rigidezza k collega il punto $B(-2r,0)$ al punto A situato sulla periferia della carrucola.

Si assuma la rigidezza della molla $K = \frac{mg}{r}$.

a) Determinare le configurazioni di equilibrio discutendone la stabilità.
b) Se per $t = 0$ il disco parte dalla posizione $q = \frac{p}{2}$ con velocità angolare nulla, si determini la velocità quando raggiunge la configurazione $q = p$.
c) Si scriva l'equazione del moto del sistema.
d) Si determini la tensione della fune per $\ddot{q}(t) = \frac{2g}{r}$



Risposte.

Calcoliamo prima di tutto il potenziale e l'energia cinetica del sistema. Con riferimento agli assi di figura con origine in O si ha :

$$\vec{F}el = -kr(2+\cos q)\vec{i} - kr\sin q\ \vec{j}\ ,\quad \vec{P} = y_P\vec{j} = (rq + \cos t)\vec{j}\ ,\quad d\vec{P} = rdq\ \vec{j}$$

e quindi il potenziale e l'energia cinetica

$$U(q) = -mgrq - \frac{k}{2}r^2\left[(2+\cos q)^2 + \sin^2 q\right]$$

$$T = \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{q}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)r^2\dot{q}^2$$

a) Configurazione di equilibrio con $k = \dfrac{mg}{r}$:

$$\frac{dU}{dq} = -mgr - kr^2\left[-(2+\cos q)\sin q + \sin q\ \cos q\right] = -mgr + 2kr^2\ \sin q\ =$$

$$= mgr(-1 + 2\sin q) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin q_{eq} = \frac{1}{2}:\ q_1 = \frac{p}{6}\quad q_2 = \frac{5}{6}p$$

Si arriva allo stesso risultato scrivendo un'equazione di momento attorno ad O.

La discussione della stabilità è semplice tenuto conto che è

$$\frac{d^2U}{dq^2} = 2kr^2\cos q$$

e che tale valore della derivata seconda è positivo per $q_1 = \dfrac{p}{6}$ e negativo per $q_2 = \dfrac{5}{6}p$.

La prima posizione risulta di equilibrio instabile, la seconda stabile.

b) Determinazione di $\dot{q}$ per $q = p$ con le condizioni assegnate.
Conviene ricorrere all'integrale primo dell'energia cinetica (dopo averne verificato l'esistenza) scritto per le due posizioni $q_0 = \dfrac{p}{2}$ e $q_1 = p$.

$$T_0 - U_0 = T_1 - U_1$$

Le espressioni già ricavate di T e U forniscono

$$\frac{p}{2}mgr + \frac{5}{2}kr^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{2}\right)r^2\dot{q}^2 + p\,mgr + \frac{1}{2}kr^2$$

dalla quale si ricava $\dot{q}$. Per $k = \dfrac{mg}{r}$ si ha quindi

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{2mg(4-p)}{r(2m+M)}}$$

c) Equazione del moto:
Sull'intero sistema equazione di momento rispetto a O

$$\vec{M}_0 = \frac{d\vec{K}_0}{dt} \;:\; -mgr + 2kr^2\sin q = I_0\ddot{q} + m\ddot{y}_P r = \frac{Mr^2}{2}\ddot{q} + mr^2\ddot{q}$$

d) Tensione della fune (con $\ddot{q}(t) = \dfrac{2g}{r}$):
Equazione di risultante sul solo peso

$$-mg\vec{j} + T\,\vec{j} = m\ddot{y}\vec{j} = mr\ddot{q}\,\vec{j}$$
$$T = m\left(r\ddot{q} + g\right) = 3mg$$

Esercizio n.13

Il sistema materiale indicato in figura è costituito da un disco di massa m_1 e raggio r_1 che rotola senza strisciare su un piano inclinato e da una carrucola mobile di massa m_2 e raggio r_2 . Una fune flessibile e in estendibile e di massa trascurabile collega, tramite un rinvio B, il baricentro G_1 del disco e un punto fisso, avvolgendosi attorno alla carrucola. Si assume che esista puro rotolamento tra la carrucola e la fune stessa.

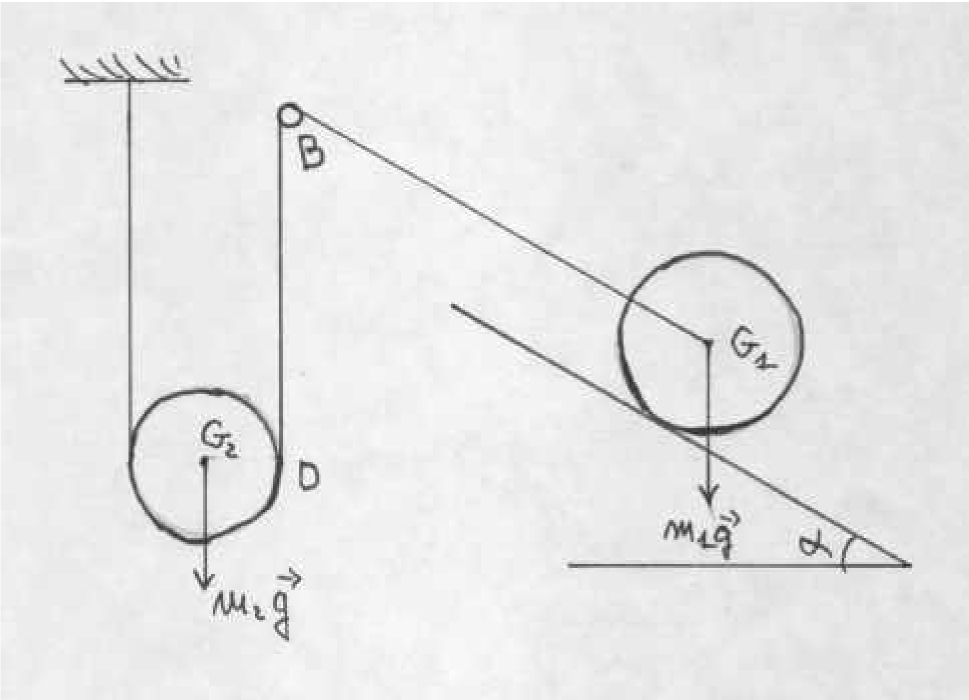
Assegnata come coordinata langrangiana lo spostamento x del disco sul piano inclinato

a) Si determini la velocità del baricentro G_2 della carrucola nota la velocità angolare del disco sul piano inclinato.

b) Determinare il rapporto $\dfrac{m_1}{m_2}$ tra le due masse quando il sistema è in condizioni di equilibrio.

c) Scrivere l'equazione del moto del sistema e integrarla con le condizioni iniziali $t = 0 \,:\, x(0) = x_0 \;\; ; \dot{x}(0) = \dot{x}_0$.

d) Calcolare, in condizioni generiche di moto, la reazione vincolare in C e la tensione della fune nel tratto parallelo al piano inclinato.



Risposte

a) Chiamati j_1 e j_2 gli angoli di rotazione dei due dischi, si ha per l'ipotesi di puro rotolamento

$$v_{G1} = v_D = \dot{x} = r_1 \dot{j}_1 = -2r_2 \dot{j}_2 = 2v_{G2}$$

quindi

$$\vec{v}_{G2} = -\frac{r_1}{2}\dot{j}_1 \vec{j} \;\; ; \;\; \dot{j}_1 = \frac{\dot{x}}{r_1} \;\; ; \;\; \dot{j}_2 = -\frac{\dot{x}}{2r_2}$$

b) Con il principio dei lavori virtuali si ha per l'equilibrio :

$$\partial L^{(a)} \; m_1 g \sin a d x - m_2 g \frac{dx}{2} = \left(m_1 \sin a - \frac{m_2}{2} \right) g dx = 0$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2 \sin a} .$$

c) L'energia cinetica vale

$$T = \frac{1}{2}\left\{ m_1 \dot{x}^2 + \frac{m_1 r_1}{2}\dot{j}_1^2 + m_2 \frac{\dot{x}_2}{4} + \frac{m_2 r_2^2}{2}\dot{j}^2 \right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} m_1 + \frac{5}{8} m_2 \right) \dot{x}^2$$

L'equazione del moto si può scrivere o con l'equazione dei lavori o scrivendo un'equazione cardinale di momento ad es. sul disco 1 e poi eliminando la tensione del filo con una seconda cardinale sull'altro disco. In ogni caso si giunge a :

$$\frac{1}{2}\left(3m_1 + \frac{5}{4} m_2 \right) \ddot{x} = \left(m_1 \sin a - \frac{m_2}{2} \right) g$$

da cui

$$\ddot{x} = 4g \frac{2m_1 \sin a - m_2}{12m_1 + 5m_2} = \cos t = a$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a t^2 + \dot{x}_0 t + x_0$$

d) La reazione vincolare in C ha due componenti che si ricavano mediante equazioni di momento rispetto a G_1 e di risultante sul disco 1

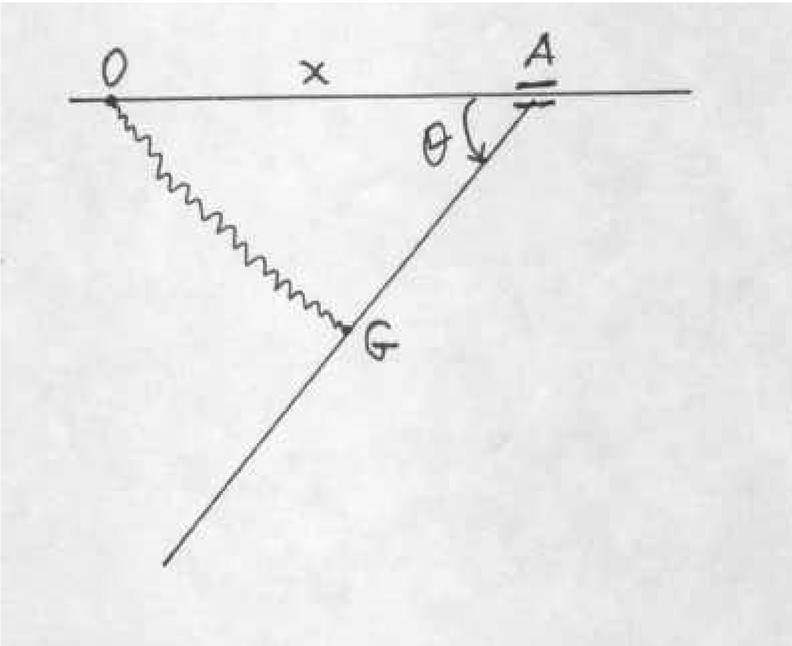
$$f_{Cx} = -\frac{m_1}{2}\ddot{x} \qquad f_{Cy} = m_1 g \cos a \qquad Tens = m_1\left(g \sin a - \frac{3}{2}a\right)$$

Esercizio n. 14

Il sistema materiale indicato in figura, contenuto in un **piano verticale,** è costituito da una sbarra, omogenea e pesante, di lunghezza l e massa m. La sbarra può scorrere con l'estremo A su una retta orizzontale fissa mentre una molla di rigidezza nota k ne collega il baricentro G con il punto fisso O situato sulla retta orizzontale anzidetta.

Assunte come coordinate langrangiane la distanza x di O da A e l'angolo q che l'asta forma con l'orizzontale:

1. Si scriva il potenziale dell'asta.
2. Si determinino le configurazioni di equilibrio discutendone la stabilità.
3. Si scriva l'energia cinetica del sistema
4. Si scrivano le equazioni del moto.



Risposte

Questo sistema ha due gradi di libertà pertanto sono necessarie due coordinate langrangiane e si otterranno quindi due equazioni del moto.

Si ha intanto

$$x_G = x - \frac{l}{2}\cos q \qquad y_G = \frac{l}{2}\sin q$$

$$U = mg\frac{l}{2}\sin q - \frac{k}{2}\left(\frac{l^2}{4} + x^2 - xl\cos q\right)$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2 + \frac{ml^2}{12}\dot{q}^2\right)$$

e effettuando i calcoli si ha per T

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{3}\dot{q}^2 + \dot{x}^2 + l\dot{x}\sin q\,\dot{q}\right)$$

La scrittura del potenziale e dell'energia cinetica permette di ricavare le due equazioni del moto richieste nella x e nella q .

Esercizio n. 15

Il sistema materiale indicato in figura, contenuto in un **piano verticale,** è costituito da una sbarra OB, di lunghezza l e peso trascurabile, incernierata in un punto fisso O e riportante all'estremo B una massa m. Una molla di rigidezza nota k collega il punto di mezzo A' della sbarra con un punto A situato sulla verticale per O a distanza $\frac{l}{2}$ da O.

Assunta come unica coordinata langrangiana l'angolo q che l'asta forma con l'orizzontale:

1. Si scriva il potenziale dell'asta.
2. Si determini la configurazione di equilibrio discutendone la stabilità.
3. Si scriva l'energia cinetica del sistema.
4. Si scrivano le equazioni del moto.

Il sistema ha un grado di libertà. Si tratta di ripetere i procedimenti visti nei precedenti esercizi. Vuole lo studente cimentarsi da solo?