

LAVORO ED ENERGIA

Esercizi svolti e discussi dal prof. Gianluigi Trivia
(scritto con Lyx - www.lyx.org)

1. ENERGIA CINETICA

Exercise 1. Determinare l'energia cinetica posseduta da un razzo, completo del suo carico, di massa complessiva $2.9 \times 10^5 \text{ kg}$ quando raggiunge la velocità di fuga di 11.2 km/s .

Soluzione:: Basta applicare la definizione di energia cinetica, con velocità di $11.2 \frac{\text{km}}{\text{s}} = 11200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{2.9 \times 10^5 \text{ kg} \cdot (11200 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{2} = 1.82 \times 10^{13} \text{ J}$$

Exercise 2. Un elettrone di conduzione (massa $m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$), che viaggia nel rame a una temperatura prossima allo zero assoluto, ha un'energia cinetica di $6.7 \times 10^{-19} \text{ J}$. Trovare la sua velocità.

Soluzione:: Appliciamo la relazione che definisce l'energia cinetica, risolvendola rispetto alla velocità:

$$K = \frac{mv^2}{2}$$

da cui,

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 6.7 \times 10^{-19} \text{ J}}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 1.2 \times 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Exercise 3. Un'esplosione a livello del suolo lascia un cratere di diametro proporzionale all'energia dell'esplosione elevata a $\frac{1}{3}$: il cratere prodotto dall'esplosione di 1 megaton di TNT ha il diametro di 1 km . Se un cratere di impatto ha un diametro di 50 km , calcolare l'energia cinetica spesa in questo impatto in megaton di TNT.

Soluzione:: Traducendo quanto descritto nel problema in linguaggio matematico, si ha $d \propto \sqrt[3]{K}$. Se l'energia $K = 10^6 \text{ ton TNT}$, produce un diametro di 1 km , allora un diametro di 50 km sarà stato prodotto da un'energia

$$K \propto d^3 \propto 50^3 \propto 1,25 \cdot 10^5 \text{ Megaton TNT}$$

Exercise 4. Un protone (massa $m = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$) è accelerato in un acceleratore lineare. In ogni stadio gli viene impressa un'accelerazione, in linea retta, di $3.6 \cdot 10^{15} \text{ m/s}^2$. Se un protone entra in uno stadio, di lunghezza totale 3.5 cm , con velocità iniziale di $2.7 \cdot 10^7 \text{ m/s}$, trovare la sua velocità all'uscita dallo stadio e il guadagno in energia cinetica dovuto all'accelerazione.

Soluzione:: Il moto nei singoli tratti può essere considerato come moto uniformemente accelerato; le leggi di tale moto consentono di calcolare la velocità all'uscita dal tratto lineare

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as$$

risolvendo, sostituendo i valori dati, si ha

$$v_f = \sqrt{(2.7 \cdot 10^7)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \cdot 3.6 \cdot 10^{15} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 3.1 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il guadagno in energia cinetica è dato da

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = 0.5 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \left[(3.1 \cdot 10^7)^2 - (2.7 \cdot 10^7)^2 \right] \frac{\text{m}}{\text{s}} = 1.9 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Exercise 5. Un padre che corre con il figlio ha un'energia cinetica pari alla metà di quella del figlio, la cui massa è metà di quella del padre. Questi accresce la propria velocità di 1 m/s , arrivando così ad avere la stessa energia cinetica del figlio. Determinare le loro velocità iniziali.

Soluzione:: Esercizio di decodifica del testo. Indichiamo con m_p la massa del padre e m_f quella del figlio. Sappiamo che $m_p = 2m_f$; chiamiamo poi K_p , K_f le energie cinetiche del padre e del figlio e $v_{i,p}$, v_f le rispettive velocità iniziali. Allora confrontando le energie cinetiche iniziali si ha

$$K_p = \frac{1}{2}K_f$$

cioè

$$\frac{1}{2}m_p v_{i,p}^2 = \frac{1}{4}m_f v_f^2$$

sostituendo la relazione tra le masse, si ha

$$m_f v_{i,p}^2 = \frac{1}{4}m_f v_f^2$$

da cui si ricava che

$$v_f = 2v_{i,p}$$

Dopo l'incremento di velocità da parte del padre, entrambi hanno la stessa energia cinetica

$$K_p = K_f \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{2}m_p v_{f,p}^2 = \frac{1}{2}m_f v_f^2$$

sempre sostituendo la relazione tra le masse e

$$m_f v_{f,p}^2 = \frac{1}{2}m_f v_f^2$$

si ha, indicando con $v_{f,p} = v_{i,p} + 1$, la velocità finale del padre

$$(v_{i,p} + 1)^2 = \frac{1}{2}v_f^2$$

Ma introducendo la relazione tra le velocità iniziali del padre e del figlio, si avrà

$$(v_{i,p} + 1)^2 = \frac{4v_{i,p}^2}{2}$$

cioè

$$v_{i,p} + 1 = \sqrt{2}v_{i,p}$$

Risolvendo, si ha

$$v_{i,p} (\sqrt{2} - 1) = 1$$

Da cui

$$\begin{aligned} v_{i,p} &= 2.4 \frac{m}{s} \\ v_{f,p} &= 4.8 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Exercise 6. Determinare l'energia cinetica associata alla rivoluzione della Terra attorno al Sole, sapendo che la Terra ha una massa $m_T = 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, il raggio medio dell'orbita terrestre $R = 1.50 \cdot 10^{11} \text{ m}$ e il tempo di rivoluzione $T = 3.16 \cdot 10^7 \text{ s}$

Soluzione:: calcoliamo la velocità lineare della Terra nella sua orbita di rivoluzione

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 1.50 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3.16 \cdot 10^7 \text{ s}} = 29825 \frac{m}{s}$$

L'energia cinetica sarà pertanto

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (29825)^2 \frac{m}{s} = 2.7 \cdot 10^{33} \text{ J}$$

2. LAVORO ED ENERGIA CINETICA

Exercise 7. Un oggetto di 102 kg sta inizialmente muovendosi in linea retta alla velocità di 53 m/s . Per arrestarlo con una decelerazione di 2.0 m/s^2 determinare l'intensità della forza necessaria, la distanza percorsa durante il rallentamento e il lavoro fatto dalla forza rallentante.

Soluzione:: La forza decelerante può essere ottenuta dalla seconda legge di Newton

$$F = ma = 102\text{ kg} \cdot 2.0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 204\text{ N}$$

Il corpo, prima di fermarsi, ha un'energia cinetica di

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \cdot 102\text{ kg} \cdot \left(53 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 143259\text{ J}$$

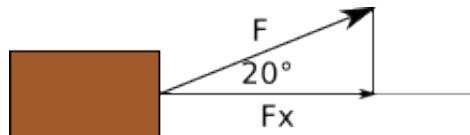
Il lavoro necessario ad arrestare il corpo è dato dalla variazione dell'energia cinetica del corpo

$$W = K_{fin} - K_{ini} = -143259\text{ J}$$

La distanza sarà quindi

$$s = \frac{W}{F} = \frac{143259\text{ J}}{204\text{ N}} = 702\text{ m}$$

Exercise 8. Per spingere una cassa di 50 kg su un pavimento privo di attrito un facchino applica una forza di 210 N in una direzione inclinata di 20° sopra l'orizzontale. Durante lo spostamento di 3.0 m trovare il lavoro fatto sulla cassa dal facchino; sulla cassa dal peso proprio della cassa e dalla forza normale esercitata dal pavimento sulla cassa. Determinare infine il lavoro totale sulla cassa.



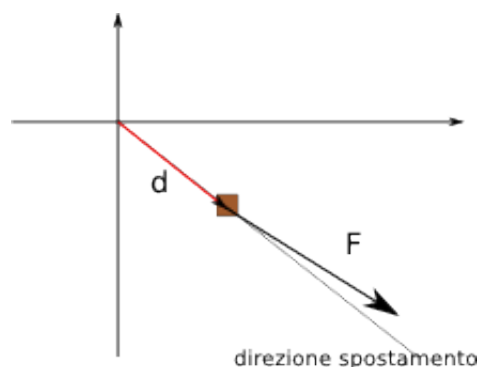
Soluzione:: La figura sopra descrive il modo in cui si deve scomporre il vettore che descrive la forza applicata. Solo la componente F_x compie lavoro nello spostamento orizzontale (sul pavimento) della cassa; la componente verticale forma un angolo retto con la direzione dello spostamento e il prodotto scalare tra la forza e lo spostamento risulta in questo caso nullo.

Calcoliamo il lavoro fatto dal facchino tramite la forza F_x

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F_s \cdot \cos 20^\circ = 210\text{ N} \cdot 3\text{ m} \cdot \cos 20^\circ = 592\text{ J}$$

Le altre forze, essendo perpendicolari allo spostamento non compiono alcun lavoro mentre la cassa si sposta sul pavimento e il lavoro totale sarà pertanto quello del facchino (si trascura infatti l'attrito).

Exercise 9. Un blocco di ghiaccio galleggiante è spinto lungo un molo diritto, per uno spostamento $\vec{d} = (15\text{ m})\vec{i} - (12\text{ m})\vec{j}$ da una corrente di marea che esercita sul blocco una forza $\vec{F} = (210\text{ N})\vec{i} - (150\text{ N})\vec{j}$. Trovare il lavoro sviluppato dall'acqua sul blocco nel corso dello spostamento.



Soluzione:: La figura rappresenta, rispetto ad un piano cartesiano arbitrario, i vettori forza e spostamento. In questo caso è necessario calcolare la componente della forza lungo lo spostamento. Lo spostamento forma un angolo rispetto all'orizzontale (asse x) (prendiamo positivo il verso orario)

$$\beta_{spos} = \tan^{-1} \frac{12}{15} = 38.7^\circ$$

mentre la forza forma con l'orizzontale un angolo

$$\beta_F = \tan^{-1} \frac{150}{210} = 35.5^\circ$$

L'angolo tra i due vettori sarà pertanto di

$$\alpha = 38.7^\circ - 35.5^\circ = 3.2^\circ$$

Calcoliamo ora il modulo dello spostamento e della forza

$$s = \sqrt{144 + 225} = 19.2 \text{ m} \quad F = \sqrt{210^2 + 150^2} = 258 \text{ N}$$

Il lavoro sarà pertanto

$$W = Fs \cos \alpha = 258 \text{ N} \cdot 19.2 \text{ m} \cdot \cos 3.2^\circ = 4946 \text{ J}$$

Exercise 10. Un protone, partendo dallo stato di riposo, è accelerato in un ciclotrone a una velocità finale di $3.0 \cdot 10^6 \text{ m/s}$. Calcolare il lavoro, in eV , sviluppato sul protone dalla forza elettrica acceleratrice.

Soluzione:: La variazione di energia cinetica del protone è legata alla variazione di velocità. L'energia cinetica iniziale è nulla, essendo la particella a riposo, mentre l'energia cinetica finale vale

$$K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 = 0.5 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(3.0 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 7.5 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

il fattore di trasformazione da Joule a elettronvolt è

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

per cui

$$K_f = \frac{7.5 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{1.6 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 4.7 \cdot 10^3 \text{ eV} = 47 \text{ keV}$$

Exercise 11. Una manichetta antincendio viene srotolata tirando orizzontalmente l'estremo libero su una superficie senza attrito alla velocità costante di 2.3 m/s . La massa di 1 m di manichetta è 0.25 kg . Calcolare l'energia cinetica fornita per svolgere 12 m di manichetta.

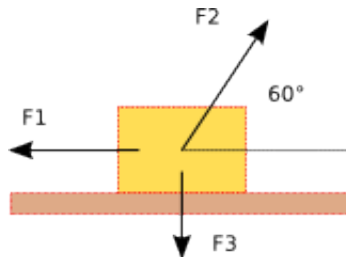
Soluzione:: La massa totale della manichetta che viene srotolata è

$$m = 0.25 \frac{\text{kg}}{\text{m}} \cdot 12 \text{ m} = 3 \text{ kg}$$

L'energia cinetica fornita è

$$= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kg} \cdot \left(2.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 7.9 \text{ J}$$

Exercise 12. La figura mostra tre forze applicate a un blocco che scivola su un piano lubrificato di 3.00 m verso sinistra. I loro moduli sono: $F_1 = 5.00 \text{ N}$, $F_2 = 9.00 \text{ N}$, $F_3 = 3.00 \text{ N}$. Calcolare il lavoro netto svolto sulla cassa dalle tre forze durante lo spostamento.



Soluzione:: La cassa si muove lungo la direzione orizzontale scorrendo senza attrito sul piano. Calcoliamo la risultante delle tre forze lungo la direzione orizzontale, supponendo positivo lo spostamento verso sinistra

$$\begin{aligned} F_1 &= 5.00 \text{ N} \\ F_2 &= \frac{9.00}{2} = -4.50 \text{ N} \\ F_3 &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$

dove F_{2x} è calcolata tenendo conto che la sua proiezione sulla direzione orizzontale descrive un triangolo rettangolo metà di un triangolo equilatero, avente come lato F_2 e come semi lato F_{2x} . La risultante sarà allora

$$F = 0.50 \text{ N}$$

cioè la cassa si sposta verso sinistra sotto l'azione di una forza di modulo 0.5 N . Il lavoro netto è

$$W = Fs = 0.50 \text{ N} \cdot 3.00 \text{ m} = 1.50 \text{ J}$$

Exercise 13. Una forza agisce su un corpo puntiforme di 3.0 kg in modo tale che la posizione del corpo in funzione del tempo è data dalla espressione $x = 3.0t - 4.0t^2 + 1.0t^3$, con x in metri e t in secondi. Trovare il lavoro sviluppato dalla forza da $t = 0$ a $t = 4.0 \text{ s}$.

Soluzione:: Il lavoro compiuto da una forza si traduce in variazione della sua energia cinetica, in questo caso. Calcoliamo quindi l'energia cinetica nei due istanti di tempo indicati, determinando la velocità con la quale il corpo si muove. La velocità è calcolabile tramite il limite del rapporto incrementale della funzione, cioè la derivata prima della stessa

$$\frac{ds}{dt} = v = 3t^2 - 8t + 3$$

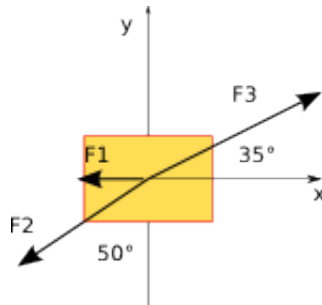
e nei due momenti indicati

$$\begin{aligned} v(0) &= 3 \frac{m}{s} \\ v(4) &= 19 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

a queste velocità corrisponde una variazione dell'energia cinetica

$$W = \Delta E = \frac{1}{2} m (v^2(4) - v^2(0)) = \frac{1}{2} \cdot 3.0 \text{ kg} \cdot (361 - 9) = 528 \text{ J}$$

Exercise 14. In figura sono mostrate dall'alto tre forze orizzontali che agiscono su un corpo inizialmente fermo, ma che ora si muove su un piano privo di attrito. I moduli delle forze sono: $F_1 = 3.00 \text{ N}$, $F_2 = 4.00 \text{ N}$, $F_3 = 10.0 \text{ N}$. Trovare il lavoro svolto sul corpo dalle tre forze durante uno spostamento di 4.00 m .



Soluzione:: il corpo si muove nel piano xy . Calcoliamo le componenti delle forze lungo i due assi

$$\begin{aligned} F_{1x} &= -3.00 \text{ N} & F_{1y} &= 0 \\ F_{2x} &= -4.00 \cdot \cos 40^\circ = -3.06 \text{ N} & F_{2y} &= -4.00 \cdot \cos 50^\circ = -2.57 \text{ N} \\ F_{3x} &= 10.0 \cdot \cos 35^\circ = 8.19 \text{ N} & F_{3y} &= 10.0 \cdot \cos 55^\circ = 5.74 \text{ N} \end{aligned}$$

La forza risultante avrà componenti

$$\begin{aligned} F_x &= 2.13 \text{ N} \\ F_y &= 3.17 \text{ N} \end{aligned}$$

Il modulo della forza risultante è

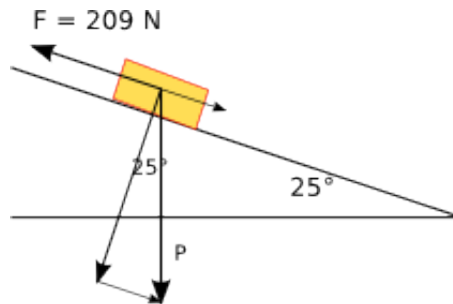
$$F = \sqrt{2.13^2 + 3.17^2} = 3.82 \text{ N}$$

Il lavoro sarà pertanto

$$W = 3.82 \text{ N} \cdot 4.00 \text{ m} = 15.28 \text{ J}$$

3. LAVORO SVOLTO DALLA FORZA PESO

Exercise 15. Per spingere una cassa di 25.0 kg su un piano privo di attrito inclinato di 25° rispetto al piano orizzontale, si applica una forza di 209 N parallela al piano inclinato. Trovare il lavoro sulla cassa per uno spostamento di 1.50 m lungo il piano inclinato fatto dalla forza parallela, dal peso della cassa e dalla forza normale esercitata dal piano inclinato. Indicare infine il lavoro totale sviluppato sulla cassa.



Soluzione:: Il peso della cassa vale $P = mg = 25.0\text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 245\text{ N}$. La componente parallela è

$$P_{par} = 245 \cdot \sin 25^\circ = 104\text{ N}$$

e la componente perpendicolare sarà

$$P_{per} = 245 \cdot \cos 25^\circ = 222\text{ N}$$

Per lo spostamento di 1.5 m , la forza applicata, presa con verso positivo, compie un lavoro (in questo caso la direzione dei due vettori, forza e spostamento, è la stessa)

$$W_F = 209\text{ N} \cdot 1.5\text{ m} = 314\text{ J}$$

la forza esercitata dal piano inclinato sulla cassa è perpendicolare allo spostamento e il suo lavoro è pertanto nullo; il peso compie un lavoro resistente

$$W_P = 245\text{ N} \cdot 1.5 \cdot \cos 115^\circ = -155\text{ J}$$

Il lavoro complessivo è quindi

$$W_{tot} = 314 - 155 = 159\text{ N}$$

Exercise 16. Un blocco di ghiaccio di 45 kg scivola in basso lungo un piano inclinato lungo 1.5 m e alto 0.91 m . Uno scaricatore spinge dal basso contro il blocco con una forza parallela al piano inclinato in modo da obbligarlo a scendere a velocità costante. Trovare la forza esercitata dallo scaricatore, il lavoro sviluppato sul ghiaccio dallo scaricatore, dal peso del blocco dalla forza normale esercitata dal piano sul blocco e dalla forza risultante.

Soluzione:: in questo caso le informazioni che descrivono l'inclinazione del piano non sono assegnate mediante un angolo, ma sono desumibili dal rapporto tra altezza e lunghezza del piano stesso. Lo scaricatore si oppone parzialmente alla caduta del ghiaccio, impedendo che questa sia descritta da un moto uniformemente accelerato. Infatti il ghiaccio scivola con moto rettilineo uniforme. Il peso del blocco è

$$P = mg = 45\text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 441\text{ N}$$

Le sue componenti, parallele e perpendicolari, al piano inclinato sono;

$$P_{par} = P \frac{h}{l} = 441\text{ N} \cdot \frac{0.91\text{ m}}{1.5\text{ m}} = 268\text{ N}$$

$$P_{per} = \sqrt{P^2 - P_{par}^2} = \sqrt{441^2 - 268^2} = 350\text{ N}$$

Se il ghiaccio scende con moto rettilineo uniforme, la sua accelerazione è nulla; cioè il ghiaccio dopo una prima breve fase di caduta accelerata, scende senza più accelerazione per l'azione dello scaricatore; tale forza dovrà essere pertanto $F = -268\text{ N}$. Tale scaricatore compirà un lavoro (forza e spostamento sono paralleli)

$$W = Fs = -268\text{ N} \cdot 1.5\text{ m} = -402\text{ N}$$

Il peso compie lavoro solo nella sua componente parallela e sarà uguale al precedente, ma non resistente. La componente perpendicolare compie un lavoro nullo, essendo tale forza perpendicolare allo spostamento. Il lavoro della forza risultante sarà pure nullo, essendo la forza risultante, componente parallela della forza peso più la forza esercitata dallo scaricatore, nulla.

Exercise 17. Un elicottero recupera dall'oceano un astronauta di 72 kg , sollevandolo di 15 m sospeso a un cavo, con un'accelerazione pari a $g/10$. Trovare il lavoro fatto sull'astronauta dall'elicottero e dal suo peso. Determinare poi l'energia cinetica e la velocità dell'astronauta immediatamente prima di raggiungere l'elicottero.

Soluzione:: Sull'astronauta agiscono due forze, la tensione del cavo e il peso. La risultante è una forza diretta verso l'alto che produce una accelerazione $g/10$. Il peso dell'astronauta è

$$P = mg = 72\text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 706\text{ N}$$

L'elicottero, attraverso il cavo, esercita una forza che, oltre a sovrastare il peso, sposta l'astronauta verso l'alto.

$$T + P = ma = 72\text{ kg} \cdot 0.98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 71\text{ N}$$

La tensione sarà

$$T = 706 + 71 = 777\text{ N}$$

Il lavoro compiuto dall'elicottero sarà quindi

$$W = 777\text{ N} \cdot 15\text{ m} = 11655\text{ J}$$

Il peso compie invece un lavoro resistente

$$W = -706\text{ N} \cdot 15\text{ m} = -10590\text{ J}$$

Se l'astronauta era inizialmente fermo, l'energia cinetica da esso acquistata è pari al lavoro svolto dalla forza risultante, cioè

$$K = 71\text{ N} \cdot 15\text{ m} = 1065\text{ J}$$

La velocità si calcola dalla relazione che esprime l'energia cinetica, risolvendola rispetto a v :

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1065\text{ J}}{72\text{ kg}}} = 5.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Exercise 18. Un blocco di massa M , partendo da fermo, viene calato verticalmente per mezzo di una fune con accelerazione costante, diretta verso il basso, pari a $g/4$. Trovare, quando è calato di una distanza d , i valori del lavoro fatto sul blocco dalla fune e dal suo peso. Determinare poi l'energia del blocco e la sua velocità.

Soluzione:: In questo caso la fune compie un lavoro resistente atto ad impedire al blocco di cadere con accelerazione g . La forza risultante produce un'accelerazione $\frac{g}{4}$. Il peso del blocco è

$$P = Mg$$

il lavoro da esso compiuto è

$$W = Mgd$$

La tensione sarà

$$T = -P + M\frac{g}{4} = -\frac{3}{4}Mg$$

Il lavoro da essa compiuto è

$$W = -\frac{3}{4}Mgd$$

L'energia cinetica è pari al lavoro compiuto dalla forza risultante:

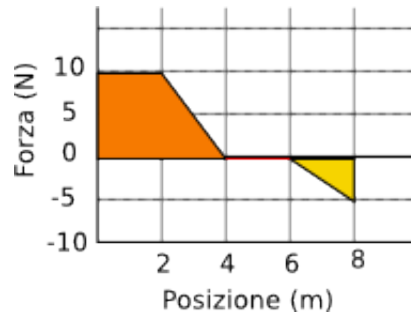
$$K = \frac{1}{4}Mgd$$

e la velocità è

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{1}{4}Mgd}{M}} = \sqrt{\frac{gd}{2}}$$

4. LAVORO SVOLTO DA UNA FORZA VARIABILE

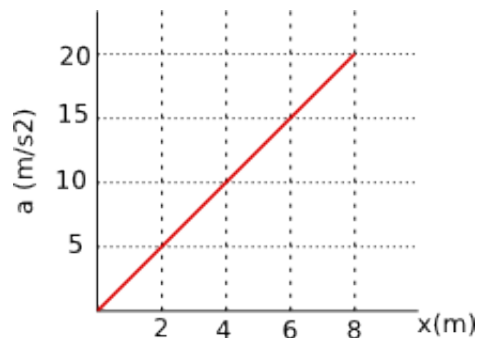
Exercise 19. Un blocco pesante 5.0 kg si muove in linea retta su una superficie orizzontale priva di attrito sotto l'azione di una forza che varia con la posizione come mostrato nella figura. Trovare il lavoro compiuto da tale forza per uno spostamento del blocco dall'origine al punto $x = 8.0\text{ m}$.



Soluzione:: Il lavoro è dato dal prodotto della forza per lo spostamento, intesi vettorialmente. Nel caso qui descritto, la forza è variabile e il lavoro da essa compiuto può essere ottenuto, sottraendo l'area compresa tra i due poligoni colorati e l'asse orizzontale, posti uno al di sopra e l'altro al di sotto della linea della zero (il secondo, inteso come lavoro resistente)

$$W = \frac{(4 + 2) \cdot 10}{2} - \frac{2 \cdot 5}{2} = 25\text{ J}$$

Exercise 20. Una massa di 10 kg si sposta lungo l'asse x . Il grafico sotto rappresenta la sua accelerazione in funzione della sua posizione. Trovare il lavoro netto fatto sulla massa durante lo spostamento da $x = 0$ a $x = 8.0\text{ m}$



Soluzione:: Dal grafico è possibile osservare che lungo gli 8 metri, l'accelerazione media è pari a 10 m/s^2 . Il lavoro compiuto è pertanto

$$F = max = 10\text{ Kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8\text{ m} = 800\text{ N}$$

5. POTENZA

Exercise 21. La cabina di un montacarichi, con massa a pieno carico di $3.0 \times 10^3\text{ kg}$, sale di 210 m in 23 s , a velocità costante. Determinare la potenza media sviluppata dal cavo sulla cabina.

Soluzione:: Portando la cabina verso l'alto si compie un lavoro che accresce l'energia potenziale della cabina e del suo contenuto

$$U = 3.0 \cdot 10^3\text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 210\text{ m} = 6.2 \cdot 10^6\text{ J}$$

La potenza sviluppata è

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{6.2 \cdot 10^6\text{ J}}{23\text{ s}} = 268435\text{ W}$$

Exercise 22. Trovare la potenza media assorbita da una scivola che in 60 s trasporta su un dislivello di 150 m , a velocità costante, 100 sciatori del peso medio di 70 kg .

Soluzione:: Il lavoro compiuto in un campo gravitazionale non dipende dal percorso compiuto, ma solo dal punto iniziale e finale, cioè dal dislivello. La massa complessiva che deve essere trasportata è

$$M = 100 \times 70 \text{ kg} = 7000 \text{ kg}$$

Il lavoro complessivo, che si traduce in energia potenziale è

$$U = 7000 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 150 \text{ m} = 1.03 \times 10^7 \text{ J}$$

La potenza sviluppata è pertanto

$$P = \frac{1.03 \times 10^7 \text{ J}}{60 \text{ s}} = 171500 \text{ W}$$

Exercise 23. La cabina di un ascensore, con massa di 4500 kg e carico utile massimo di 1800 kg, sale a pieno carico alla velocità di 3.8 m/s. Quale potenza occorre per tenere questa velocità?

Soluzione:: La potenza è il lavoro compiuto nell'intervallo di tempo, cioè $P = \frac{W}{\Delta t}$; ma $W = Fs$, da cui sostituendo si ha

$$P = Fv$$

Pertanto è possibile calcolare la potenza in questa situazione, prendendo come massa, quella complessiva a pieno carico, $m = 4500 + 1800 \text{ kg}$; inoltre, il lavoro viene fatto dal motore che deve contrastare la forza peso dell'ascensore

$$P = 6300 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 234612 \text{ W att} \simeq 235 \text{ kW}$$

Exercise 24. Una particella soggetta a una forza $\vec{F} = (4.0 \text{ N}) \vec{i} - (2.0 \text{ N}) \vec{j} + (9.0 \text{ N}) \vec{k}$ si sposta, in un certo istante, alla velocità $\vec{v} = -(2.0 \text{ m/s}) \vec{i} + (4.0 \text{ m/s}) \vec{k}$. Calcolare la potenza istantanea con cui la forza produce lavoro sulla particella; in un altro momento la velocità ha soltanto la componente secondo \vec{j} .

Soluzione:: la situazione è assai simile alla precedente; la differenza consiste nella trattazione vettoriale delle grandezze. La potenza è una grandezza scalare; il prodotto tra la forza e la velocità è pertanto scalare, cioè $F \cdot v \cdot \cos \theta$.

$$F = \sqrt{(4.0)^2 + (-2.0)^2 + (9.0)^2} = 11 \text{ N}$$

$$v = \sqrt{(-2.0)^2 + (4.0)^2} = 4.47 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

calcoliamo ora il prodotto scalare tra le componenti, (trascuriamo per comodità di scrittura le unità di misura)

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = [(-2.0i \cdot 4.0i) + (-2.0i \cdot (-2.0)j) + (-2.0i \cdot 9.0k) + (4.0i + 4.0k) + (-2.0j \cdot 4.0k) + (9.0k \cdot 4.0k)]$$

ora, l'angolo tra due versori uguali è 0° e quindi $\cos 0^\circ = 1$, mentre quello tra versori diversi è sempre 90° e quindi $\cos 90^\circ = 0$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -8 + 36 = 28 \text{ W}$$

Exercise 25. Un blocco di 100 kg è trascinato a velocità costante di 5.0 m/s su un pavimento orizzontale da una forza di 122 N diretta con angolo di 37° sopra il piano orizzontale. Trovare la potenza.

Soluzione:: Calcoliamo la potenza applicando il prodotto scalare tra le velocità e la forza, conoscendo l'angolo che essi formano. Da $P = Fv \cos \varphi$, si ha

$$P = 122 \text{ N} \cdot 5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 37^\circ = 487 \text{ W}$$

Exercise 26. Un oggetto di 2.0 kg accelera uniformemente da fermo alla velocità di 10 m/s in 3.0 s. Trovare il lavoro compiuto in questo intervallo di tempo.

Soluzione:: «Modalità «cinematica»: I dati ci consentono di calcolare l'accelerazione uniforme a cui è stato sottoposto l'oggetto; applicando, poi, la seconda legge di Newton, è possibile ottenere la forza applicata che compie questo lavoro.

$$a = \frac{(10 - 0) \frac{m}{s}}{3 s} = 3.3 \frac{m}{s^2}$$

Troviamo ora la forza applicata

$$F = ma = 2.0 \text{ kg} \cdot 3.3 \frac{m}{s^2} = 6.7 \text{ N}$$

Serve poi calcolare la distanza percorsa

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 0.5 \cdot 3.3 \frac{m}{s} \cdot 9 s^2 = 15 \text{ m}$$

Il lavoro sarà

$$L = Fs = 6.7 \text{ N} \cdot 15 \text{ m} = 100 \text{ J}$$

È possibile ottenere tale informazione ricordando il teorema dell'energia cinetica, secondo il quale, il lavoro compiuto è uguale alla variazione dell'energia cinetica del corpo; in questo caso, essendo la velocità iniziale nulla, anche l'energia cinetica iniziale è nulla, quindi

$$L = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 2.0 \text{ kg} \cdot 100 = 100 \text{ J}$$

Exercise 27. Una forza di 5.0 N agisce su un corpo di 15 kg che si trova inizialmente in quiete. Calcolare il lavoro fatto dalla forza in tre secondi e la potenza sviluppata dalla forza.

Descrizione:: La forza produce sul corpo una accelerazione

$$a = \frac{F}{m} = \frac{5.0 \text{ N}}{15 \text{ kg}} = 0.33 \frac{m}{s^2}$$

partendo da fermo, il corpo in tre secondi avrà una velocità

$$v = at = 0.33 \frac{m}{s^2} \cdot 3 s = 1.0 \frac{m}{s}$$

Il lavoro fatto dalla forza sarà

$$L = \Delta K = \frac{1}{2} \cdot 15.0 \text{ kg} \cdot 1^2 \frac{m^2}{s^2} = 7.5 \text{ J}$$

La potenza sviluppata sarà

$$P = Fv = 5.0 \text{ N} \cdot 1 \frac{m}{s} = 5.0 \text{ W}$$

Exercise 28. La cabina di un montacarichi a pieno carico, di massa complessiva 1200 kg , deve salire di 54 m in 3.0 min . Il contrappeso ha massa 950 kg . Trovare la potenza richiesta al motore quando il cavo solleva la cabina. (Supporre che la velocità sia sempre costante).

Soluzione:: Il montacarichi ha una massa maggiore del contrappeso, per cui tende a cadere verso il basso come se la sua massa fosse la differenza tra le due. Possiamo quindi calcolare il lavoro del motore contrario alla forza peso

$$L = mgh = 250 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 54 \text{ m} = 132300 \text{ J}$$

Tale lavoro deve essere speso in $3 \text{ min} = 180 \text{ s}$, per cui

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{132300 \text{ J}}{180 \text{ s}} = 735 \text{ W}$$

Exercise 29. La forza richiesta per rimorchiare una barca a velocità costante è proporzionale alla velocità. Se per una velocità di 4 km/h occorre una potenza di 10 kW , trovare la potenza necessaria per una velocità di 12 km/h .

Soluzione:: La potenza può essere espressa dalla relazione $P = F \cdot v$, dove v è la velocità del corpo sul quale si compie lavoro. Se la forza è proporzionale alla velocità, la potenza sarà allora proporzionale al quadrato della velocità; quindi

$$\frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2 = 9$$

La potenza cercata sarà quindi

$$P_1 = 9 \cdot 10 \text{ kW} = 90 \text{ kW}$$

Exercise 30. Un corpo di massa di 0.30 kg , che scivola su una superficie orizzontale priva di attrito, è attaccato all'estremità libera di una molla orizzontale avente costante $k = 500 \text{ N/m}$, fissata all'altro lato. Al passaggio per la sua posizione di equilibrio, la massa possiede una energia cinetica di 10 J . Trovare la potenza con cui la molla sviluppa lavoro sulla massa quando questa passa per la sua posizione di equilibrio.

Soluzione:: Nella condizione di equilibrio, la forza che trascina il corpo è pari alla forza di richiamo della molla; se, in tale situazione, il corpo possiede una energia cinetica di 10 J , allora avrà una velocità istantanea pari a

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \text{ J}}{0.30 \text{ kg}}} = 8.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nella condizione di equilibrio il lavoro esterno fatto sul corpo e quello fatto dalla molla sono tra loro opposti, pertanto la potenza sarà pari a zero.