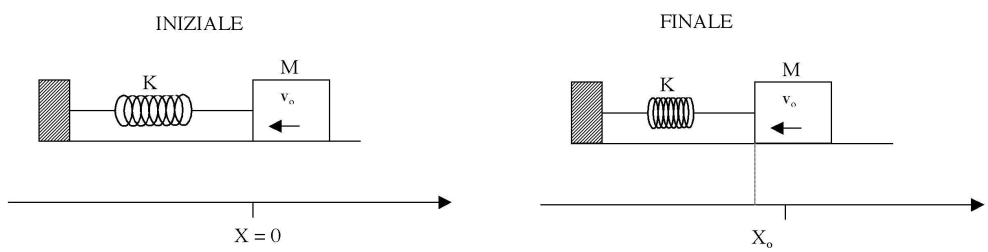
# ESERCIZIO




Sia dato un corpo di massa m = 10 kg e velocità $v_o$ = 10 m/s che impatta sull'estremo libero di una molla di costante elastica k = 1000 N/m in modo da provocarne la compressione. Si consideri dapprima liscia la superficia su cui scorre il corpo e successivamente scabra con un coefficiente di attrito dinamico pari a $\mu_d = 0.5$.

# SOLUZIONE

Superficie liscia: Si considerino le situazioni iniziale e finale rappresentate in figura; le energie associate (energia cinetica $T$, energia potenziale elastica $U$ e l'energia meccanica totale $E = T + U$) alle due situazioni sono riportate nella seguente tabella:

| | T | U | E |
|---|---|---|---|
| iniziale | $\frac{1}{2}mv_o^2$ | 0 | $\frac{1}{2}mv_o^2$ |
| finale | 0 | $\frac{1}{2}kx_o^2$ | $\frac{1}{2}kx_o^2$ |

Poichè non ci sono forze non conservative, l'energia meccanica totale si conserva, quindi si può scrivere

$$E_{iniziale} = \frac{1}{2}mv_o^2 = \frac{1}{2}kx_o^2 = E_{finale} \tag{1}$$

Risolvendo l'eq. 1 si ottiene

$$x_o = \pm \sqrt{\frac{m}{k}}\ v_o = \pm \sqrt{\frac{10}{1000}}\ 10 = \pm\ 1.00\ m = \pm\ 100\ cm \tag{2}$$

Delle due soluzioni matematiche, una solamente rappresenta la soluzione del problema fisico, ed in particolare, $x_o$ = + 100 cm. L'altra soluzione $x_o$ = - 100 cm rappresenta la soluzione legata ad un diverso problema fisico che verrà messo in evidenza in seguito. Non si tratta però della soluzione relativa alla distensione della molla partendo dalla stessa posizione iniziale, come potrebbe essere facile pensare.

Superficie scabra: Si considerino le situazioni iniziale e finale rappresentate in figura; le energie associate alle due situazioni sono riportate nella seguente tabella:

| | T | U | E |
|---|---|---|---|
| iniziale | $\frac{1}{2}mv_o^2$ | 0 | $\frac{1}{2}mv_o^2$ |
| finale | 0 | $\frac{1}{2}kx_{at}^2$ | $\frac{1}{2}kx_{at}^2$ |

Poichè ci sono forze non conservative, l'energia meccanica totale non si conserva, e si può quindi scrivere

$$E_{finale} - E_{iniziale} = L_{attrito} \tag{3}$$

dove $L_{attrito}$ è il lavoro compiuto dalla forza di attrito dinamico che vale

$$F_{attrito} = \mu_d\ mg \tag{4}$$

e quindi

$$\frac{1}{2}kx_{at}^2 - \frac{1}{2}mv_o^2 = \vec{F}_{attrito} \cdot \vec{x}_{at} = -\ F_{attrito}\ x_{at} = -\ \mu_d\ mg\ x_{at} \tag{5}$$

riordinando l'eq. 5 si ottiene un'equazione di secondo grado

$$\frac{1}{2}kx_{at}^2 + F_{attrito}x_{at} - \frac{1}{2}mv_o^2 = 0 \tag{6}$$

le cui soluzioni sono date da

$$x_{1/2} = \frac{-F_{attrito} \pm \sqrt{(-F_{attrito})^2 - 4\frac{1}{2}k(-\frac{1}{2}mv_o^2)}}{2(\frac{1}{2}k)} \tag{7}$$

Sostituendo i valori numerici delle variabili si ottiene

$$x_{at\ 1/2} = \frac{-0.5\ 10\ 9.8 \pm \sqrt{(0.5\ 10\ 9.8)^2 + 1000\ 10\ 10^2}}{1000)} \tag{8}$$

che porta ai seguenti valori

$$x_{at\ 1} = 0.9338\ m = 93.38\ cm \tag{9}$$

$$x_{at\ 2} = -1.071\ m = -107.1\ cm \tag{10}$$

la soluzione del problema fisico è quindi rappresentata dal valore $x_{at\ 1}$ che dimostra che la molla si può comprimere di 93.38 cm, quindi la presenza della superficia scabra ha un effetto di ridurre di 7.62 cm la compressione della molla.
Ma cosa rappresenta l'altra soluzione $x_{at\ 2}$ = -107.1 cm? Sicuramente non rappresenta di quanto si sarebbe estesa la molla nel caso in cui la massa in velocità avesse un moto tale da estendere la molla invece di comprimerla. Allora quale situazione fisica dobbiamo associare quel valore?

Per rispondere al quesito, affrontiamo un problema fisico leggermente differente, la cui utilità diventerà chiara ed evidente in seguito. Consideriamo ora la distensione della molla, e cioè che la situazione iniziale è quella in cui il corpo si trova nel punto di massima compressione e che la situazione finale è quella in cui il corpo si stacca dalla molla. Questo porta ad avere la seguente tabella:

| | T | U | E |
|---|---|---|---|
| iniziale | 0 | $\frac{1}{2}kx_{at}^2$ | $\frac{1}{2}kx_{at}^2$ |
| finale | $\frac{1}{2}mv_o^2$ | 0 | $\frac{1}{2}mv_o^2$ |

L'eq. 3 porta quindi alla seguente equazione

$$\frac{1}{2}mv_o^2 - \frac{1}{2}kx_{at}^2 = -\ \mu_d\ mg\ x_{at} \tag{11}$$

che si riduce in'equazione di secondo grado

$$\frac{1}{2}kx_{at}^2 - F_{attrito}x_{at} - \frac{1}{2}mv_o^2 = 0 \tag{12}$$

le cui soluzioni sono date da

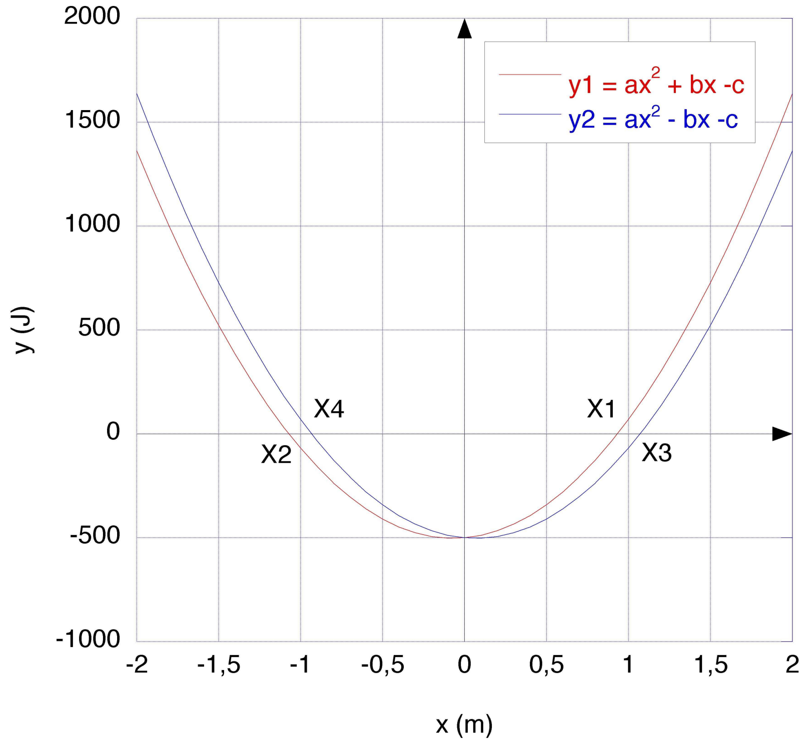
$$x_{3/4} = \frac{F_{attrito} \pm \sqrt{(F_{attrito})^2 - 4\frac{1}{2}k(-\frac{1}{2}mv_o^2)}}{2(\frac{1}{2}k)} \tag{13}$$

i cui valori sono

$$x_{at\ 3} = 1.071\ m = 107.1\ cm \tag{14}$$

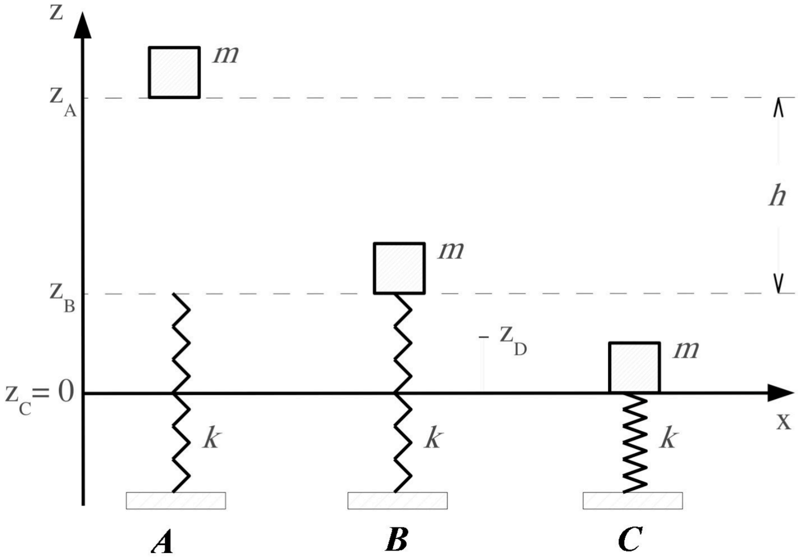
$$x_{at\ 4} = -0.9338\ m = -93.38\ cm \tag{15}$$

Quindi 107.1 cm rappresenta la distanza da cui dovrà partire il corpo (dal punto di massima compressione) per arrivare a scaricare completamente la molla ed avere una velocità $v_o$. Il risultato mostra che le soluzioni delle due equazioni sono simmetriche, e questo non è casuale, ma è legato alle proprietà delle equazioni di secondo grado. L'eq. 6 rappresenta l'intersezione della parabola $y = \frac{1}{2}kx_{at}^2 + \mu_d F_{attrito} x_{at} - \frac{1}{2}mv_o^2$ con l'asse delle x, come mostrato in figura.




È visibile che le due parabole sono simmetriche tra loro rispetto all'asse y ($y1(-x) = a(-x)^2 + b(-x) - c = ax^2 - bx - c = y2(x)$) e le loro soluzioni sono quindi simmetriche rispetto ad $x = 0$, cioé $x_{at\ 1} = -x_{at\ 4}$ e $x_{at\ 2} = -x_{at\ 3}$.

## ESERCIZIO




Un corpo di massa *m* è lasciato cadere da un'altezza $h$ sull'estremo libero di una molla di costante elastica *k* in modo da provocarne la compressione. Determinare:
1) la velocità del corpo all'impatto con l'estremo libero della molla;
2) la massima compressione della molla;
3) la posizione in cui il corpo assume la massima velocità;
4) la massima velocità assunta dal corpo.
[*m*=1 kg, *h*=2 m e *k*=500 Nm$^{-1}$].

## SOLUZIONE

13 Aprile 2011

Si considerino le situazioni iniziale A e finale C rappresentate in figura. In particolare dovranno essere analizzate le energie associate (energia cinetica *T*, energia potenziale gravitazionale $U_g$, energia potenziale elastica $U_{el}$ e l'energia totale $E = T + U_g + U_{el}$) alle situazioni $z_A$-$z_B$ e $z_B$-$z_C$. Assumendo come sistema di riferimento dell'energia potenziale gravitazionale quello riportato in figura, $z_C$ corrisponde a $z = 0$ (punto di massima compressione della molla), $z_B$ corrisponde alla posizione di riposo della molla mentre $z_A = z_B + h$.

Velocità del corpo all'impatto con l'estremo libero della molla
$z_A$-$z_B$: in questa situazione le energie associate sono riportate nella seguente tabella:
dove $v_B$ rappresenta la velocità con cui il corpo impatta sull'estremo libero della molla.

| | T | $U_g$ | $U_{el}$ | E |
|---|---|---|---|---|
| $E_A$ | 0 | $mg(h+z_B)$ | 0 | $mg(h+z_B)$ |
| $E_B$ | $\frac{1}{2}mv_B^2$ | $mgz_B$ | 0 | $\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$ |

Poichè non ci sono forze non conservative, l'energia meccanica totale si conserva, perciò si può scrivere

$$\Delta E = E_B - E_A = 0 \tag{1}$$

da cui

$$E_A = mg(h+z_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = E_B \tag{2}$$

Semplificando la (2) si ottiene

$$mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 \tag{3}$$

da cui è possibile ricavare $v_B$:

$$v_B = \sqrt{2\,g\,h} = 6.26\,ms^{-1} \tag{4}$$

Massima compressione della molla
$z_B$-$z_C$: le energie associate a questa situazione sono riportate nella seguente tabella:

| | T | $U_g$ | $U_{el}$ | E |
|---|---|---|---|---|
| $E_B$ | $\frac{1}{2}mv_B^2$ | $mgz_B$ | 0 | $\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B$ |
| $E_C$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}kz_B^2$ | $\frac{1}{2}kz_B^2$ |

Anche in questo caso non ci sono forze non conservative, si può quindi scrivere

$$\Delta E = E_C - E_B = 0 \tag{5}$$

da cui

$$E_B = mg(h+z_B) = \frac{1}{2}kz_B^2 = E_C \tag{6}$$

Riordinando la (6) tenendo conto della (3) si ottiene un'equazione di secondo grado in $z_B$:

$$\frac{1}{2}kz_B^2 - mgz_B - mgh = 0 \tag{7}$$

le cui soluzioni sono date da

$$z_B = \frac{mg}{k}\left[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right] \tag{8}$$

ovvero

$$z_{B\,1} = \frac{mg}{k}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right] = 0.30\,m\;(30\,cm) \tag{9}$$

$$z_{B\,2} = \frac{mg}{k}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\right] = -0.26\,m\;(-26\,cm) \tag{10}$$

La soluzione del problema fisico è rappresentata dal valore $z_B = z_{B\,1}$ = 30 cm che dimostra che la molla si comprime di 30 cm.

Se l'esercizio avesse chiesto solamente di calcolare la massima compressione della molla, non sarebbe stato necessario calcolare la velocità del corpo all'impatto con l'estremo libero della molla, e quindi si sarebbe potuto applicare la conservazione dell'energia direttamente tra la situazione iniziale A e quella finale C

$$\Delta E = E_C - E_A = 0 \tag{11}$$

da cui

$$E_C = \frac{1}{2}kz_B^2 = mg(h + z_B) = E_A \tag{12}$$

che è appunto identica alla (6), e quindi le soluzioni sono uguali a quelle discusse in precedenza.

Massima velocità e posizione in cui il corpo la assume

Si consideri una generica posizione $z$ compresa tra $z_B$ e $z_C$; le energie associate a questa situazione sono riportate nella seguente tabella:

| | T | $U_g$ | $U_{el}$ | E |
|---|---|---|---|---|
| $E_C$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}kz_B^2$ | $\frac{1}{2}kz_B^2$ |
| $E_D$ | $T(z)$ | $mgz$ | $\frac{1}{2}k(z_B - z)^2$ | $T(z) + \frac{1}{2}k(z_B - z)^2 + mgz$ |

Poichè tutte le forze che agiscono sono conservative, si può quindi scrivere che

$$\Delta E = E_D - E_C = 0 \tag{13}$$

e quindi

$$E_D = T(z) + \frac{1}{2}k(z_B - z)^2 + mgz = \frac{1}{2}kz_B^2 = E_C \tag{14}$$

dalla quale si ricava l'espressione dell'energia cinetica $T(z)$ in funzione di $z$:

$$T(z_D) = -\frac{1}{2}kz^2 + z(kz_B - mg) \tag{15}$$

L'equazione (15) è un'equazione di secondo grado del tipo $y(z) = az^2 + bz + c$ con coefficienti $a = -\frac{1}{2}k$, $b = (kz_B - mg)$ e $c = 0$. Attenzione al fatto che il grafico dell'energia cinetica nella Fig. 1 non è parabolico; questa non è una contraddizione, ma l'andamento parabolico è ristretto al moto che esiste tra il punto B e il punto C, tra il punto A e B l'andamento è lineare. Il punto di massima velocità si ricava in corrispondenza del massimo valore di energia cinetica perchè la parabola ha una concavità negativa (verso il basso); le coordinate $[z_v, T(z_v)]$ del vertice della parabola $T(z)$ sono date da $\left[-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right]$ dove $\Delta = b^2 - 4ac$. Sostituendo l'espressione dei coefficienti nella formula del vertice e ricordando la (7) si ottiene

$$z_v = z_B - \frac{mg}{k} \tag{16}$$

$$T(z_v) = mgh + \frac{m^2 g^2}{2k} \tag{17}$$

Come risulta dalle coordinate del vertice, il massimo di energia cinetica (e dunque di velocità ) viene raggiunto ad una quota inferiore a $z_B$ nel sistema di riferimento adottato (esattamente $z_v = z_B - mg/k$ = 0.28 m), ed il valore dell'energia cinetica risulta superiore al valore corrispondente alla quota $z_B$ ($E_B = mgh$): questo significa che durante la fase iniziale della compressione il corpo accelera. Fino a che l'accelerazione risulta positiva il corpo accelera, quando essa diventa negativa il corpo rallenta. Il punto in cui il corpo assume la massima velocità ha una accelerazione nulla e questo implica che in quel punto sussiste l'equilibrio delle forze. La velocità massima raggiunta dal corpo si ottiene imponendo

$$\frac{1}{2} m v_{max}^2 = T(z_v) \tag{18}$$

e dunque $v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m} T(z_v)}$ = 6.27 m s$^{-1}$.

L'energia cinetica $T(z)$ assume il valore $mgh$ in due punti che si ricavano ponendo $T(z) = mgh$ (o, in modo equivalente, $T(z) - mgh$ = 0):

$$-\frac{1}{2} k z^2 + z(k z_B - mg) - mgh = 0 \tag{19}$$

Le soluzioni di quest'ultima equazione sono rispettivamente $z_1 = z_B$ = 0.30 m e $z_2 = z_B - 2mg/k$ = 0.26 m; è importante notare che queste due soluzioni sono simmetriche rispetto alla posizione del vertice $z_v$ = 0.28 m.

In Fig. 1 vengono riportati gli andamenti delle energie associate al problema analizzato.

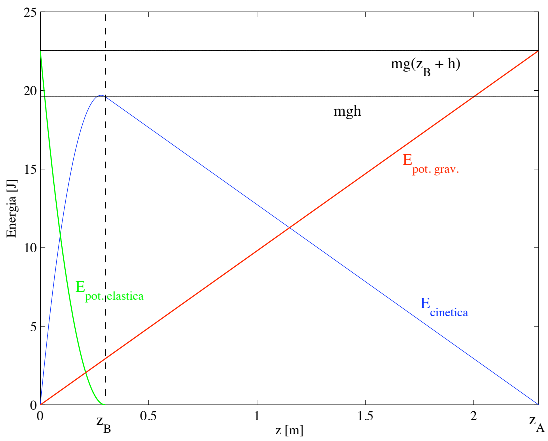



Figura 1: Andamento delle energie in gioco in funzione dalla posizione verticale $z$

In Fig. 2 viene infine riportato un ingrandimento del diagramma delle energie intorno alla quota $z_B - mg/k$ al fine di evidenziare le intersezioni tra l'energia cinetica ed il valore $mgh$.

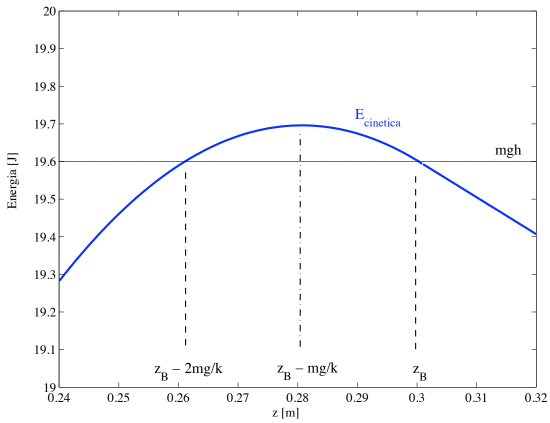



Figura 2: Ingrandimento relativo al diagramma delle energie

Analogamente si sarebbe potuto seguire un'altra strada.

Subito dopo l'impatto con la molla inizia ad agire la forza elastica, con modulo sempre maggiore mano a mano che il corpo comprime la molla. Poichè la forza peso rimane costante durante tutto il moto, con una forza elastica piccola, la forza totale che agisce sul corpo è sempre diretta verso il basso, concorde con il verso della velocità e quindi il corpo continua ad aumentare la propria velocità fino a quando l'accelerazione, e quindi la forza totale che agisce sul corpo, si annulla. Dopo questo punto la forza totale è diretta verso l'alto e quindi il corpo inizia a rallentare. Il punto $z_*$ in cui la forza totale è nulla, è il punto in cui il corpo assume la massima velocità , e pertanto vale l'equazione

$$F_{tot} = -P + F_{el} = 0 \tag{20}$$

da cui si ottiene

$$P = mg = F_{el} = k(z_B - z_*) \tag{21}$$

Risolvendo la (21) si ottiene che la posizione in cui il corpo assume la massima velocità vale

$$z_* = z_B - mg/k = 0.30 - 19.8/500 = 0.28\, m \tag{22}$$

Si noti come la (22) coincide esattamente con la (16)

## APPENDICE

Riguardo il significato della soluzione $z_{B\,2}$ = -26 cm, consideriamo il seguente esercizio: sia un corpo di massa *m* ancorato ad una molla di costante elastica *k* che si trova in posizione verticale (si assumano gli stessi valori per *k* ed *m*). La molla sia estesa rispetto alla sua posizione di riposo e sia bloccata con il corpo ancorato.

Improvvisamente il blocco cessa di agire e la molla ritorna verso la sua posizione di riposo, portandosi dietro il corpo. Il corpo passa nella posizione di riposo con una velocità pari a $v_B$, precedentemente calcolata. Calcolare l'estensione della molla.

Come si può facilmente notare questo esercizio è simile ma non uguale a quello precedente.

Assumendo un sistema di riferimento simile a quello dell'esercizio precedente ma, per semplicità, con l'origine $z = 0$ nella posizione di riposo della molla, il problema appena descritto porta alla seguente tabella delle energie:

| | T | $U_g$ | $U_{el}$ | E |
|---|---|---|---|---|
| $E_E$ | 0 | $mgz_E$ | $\frac{1}{2}kz_E^2$ | $mgz_E + \frac{1}{2}kz_E^2$ |
| $E_B$ | $\frac{1}{2}mv_B^2$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}mv_B^2$ |

dove $E$ rappresenta la posizione da cui parte il corpo, $z_E$ l'estensione incognita della molla relativa alla posizione $E$ e $B$ la posizione di riposo della molla . Dato che l'energia meccanica si conserva vale

$$\Delta E = E_B - E_E = 0 \tag{23}$$

da cui

$$E_E = mgz_E + \frac{1}{2}kz_E^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 = E_B \tag{24}$$

quindi si ottiene la seguente equazione di secondo grado

$$\frac{1}{2}kz_E^2 + mgz_E - \frac{1}{2}mv_B^2 = 0 \tag{25}$$

le cui soluzioni sono date da

$$z_E = \frac{mg}{k}\left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{kv_B^2}{mg^2}}\right] \tag{26}$$

ovvero

$$z_{E\,1} = \frac{mg}{k}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{kv_B^2}{mg^2}}\right] = 0.26\,m\ (26\,cm) \tag{27}$$

$$z_{E\,2} = \frac{mg}{k}\left[-1 - \sqrt{1 + \frac{kv_B^2}{mg^2}}\right] = -0.30\,m\ (-30\,cm) \tag{28}$$

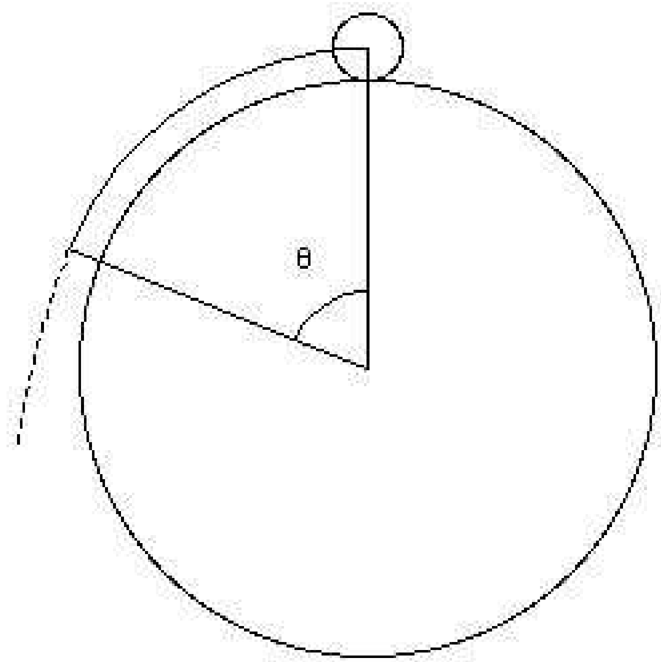
L'estensione della molla risulta dunque $z_E$ = 26 cm. In questo caso l'estensione della molla è minore della sua compressione perchè nel caso della compressione iniziale della molla il corpo si sposta verso l'alto e quindi parte dell'energia potenziale elastica viene trasformata in energia potenziale gravitazionale; invece nel caso della distensione iniziale della molla il corpo si sposta verso il basso quindi anche l'energia potenziale gravitazionale si trasforma in energia cinetica.

Il risultato mostra che le soluzioni della (7) e della (25) sono simmetriche, e questo non è casuale, ma è legato alle proprietà delle equazioni di secondo grado. Per un approfondimento di questo argomento, riferirsi all'esercizio svolto pubblicato dal docente alla pagina web http://www.isf.univpm.it/esami/agraria/Esercizi/molla.pdf

# ESERCIZIO

Sia dato un corpo puntiforme appoggiato su di un cilindro con l'asse orizzontale. Il corpo sia posto nella posizione superiore e sia lasciato cadere da fermo come in figura. Determinare in quale posizione tale corpo si stacca dalla superficie durante la sua discesa lungo la superficie laterale del cilindro, trascurando tutti gli attriti.

13 Febbraio 2007



## SOLUZIONE

Il corpo cade da fermo, e quindi l'energia potenziale che perde viene trasformata in energia cinetica. La legge di conservazione dell'energia ci fa scrivere

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \tag{1}$$

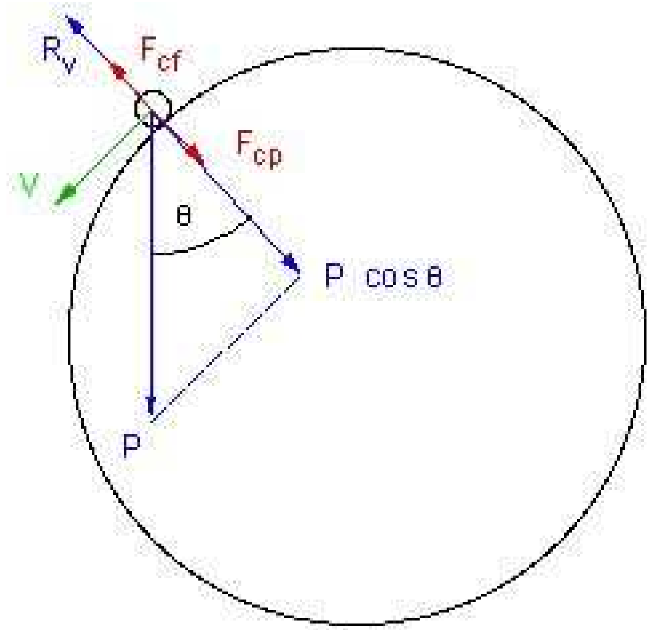
dove $h$ può essere scritto

$$h = R - Rcos\theta = R(1 - cos\theta) \tag{2}$$

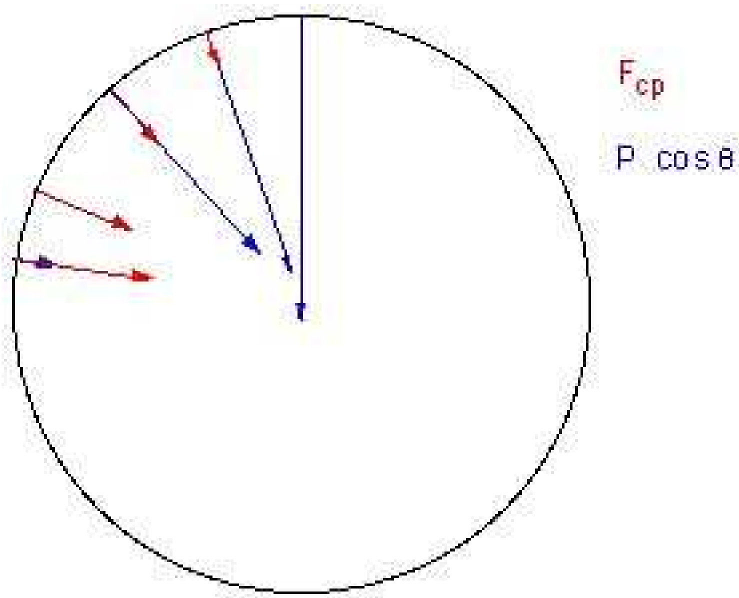
Quindi mano a mano che il corpo scende acquista velocità e perde energia cinetica, sotto la spinta della forza peso. Nel sistema di riferimento inerziale del laboratorio, le forze che agiscono sul corpo sono:

- forza peso P - che si scompone con una componente tangenziale che serve a trascinare il corpo verso il basso ed una componente radiale.
- reazione vincolare di appoggio sulla superficie del cilindro $R_v$ - parallela alla componente radiale della forza peso.

Inoltre, dal momento che il corpo compie un moto circolare, la risultante delle forze applicate dovrà necessariamente svolgere il ruolo della forza centripeta $F_{cp}$, diretta verso il centro della circonferenza su cui scorre il corpo ed ha modulo uguale a $mv^2/r$. Da notare che il modulo della forza centripeta non è costante dal momento che il corpo scendendo aumenta la propria velocità.




La forza peso rimane costante durante tutto il moto, ma le sue componenti (radiale $P_R$ e tangenziale $P_T$ alla traiettoria) e le altre forze variano a seconda della posizione assunta dal corpo durante la discesa. All'inizio la forza centripeta necessaria a tenere il corpo in un moto circolare uniforme è minore della componente radiale della forza peso e pertanto il corpo rimane attaccato alla superficie; man mano che il corpo scende la componente radiale della forza peso diminuisce il suo modulo, mentre la forza centripeta necessaria a tenere il corpo attaccato al cilindro aumenta. Prima del distacco dalla




superficie sul corpo, la componente radiale della forza peso è maggiore della forza centripeta per tenere il corpo attaccato alla traiettoria circolare (la cui differenza è compensata dalla presenza della reazione vincolare), mentre la componente tangenziale fa accelerare il corpo. Lungo la direzione radiale,

$$\vec{P_R} + \vec{R_v} = \vec{F_{cp}} \tag{3}$$

dove $F_{cp}$ è la forza centripeta che tiene il corpo attaccato ad un moto circolare. Esiste una posizione in cui la forza centripeta e la componente radiale della forza peso sono uguali (la reazione vincolare è nulla). Da questa posizione in poi, la componente radiale della forza peso non riesce piu' ad avere un modulo tale da agire da forza centripeta e quindi il corpo si stacca dalla superficie. In pratica la posizione limite è quindi definita dall'uguaglianza della componente radiale della forza peso con la forza centripeta

$$Pcos\theta = m\frac{v^2}{R} \tag{4}$$

dove $mv^2$ può essere sostituito con quanto ricavabile dall'eq. 1. Questo porta a

$$Pcos\theta = mgcos\theta = 2mgR(1 - cos\theta)\frac{1}{R} = 2mg(1 - cos\theta) \tag{5}$$

da cui si ottiene

$$cos\theta = 2(1 - cos\theta) \tag{6}$$

Questo risultato mette in evidenza che non c'è alcuna dipendenza dalla massa del corpo e dal raggio del cilindro. La soluzione dell'eq. 6 è data dalla soluzione della seguente equazione

$$cos\theta = \frac{2}{3} \tag{7}$$

che vale quindi $\theta = 0.841$ radianti, circa 48 gradi.

Possiamo anche risolvere il presente esercizio in un sistema di riferimento non inerziale solidale con il corpo. In tale situazione, lungo la direzione radiale sul corpo agiscono le seguenti forze:

- forza peso - componente radiale.
- reazione vincolare di appoggio sulla superficie del cilindro - parallela alla componente radiale della forza peso.
- forza centrifuga - uguale e contraria alla forza centripeta.

In questo caso, l'equilibrio lungo la direzione radiale è dato da

$$\vec{P_R} + \vec{R_v} + \vec{F_{cf}} = 0 \tag{8}$$

da cui si ha

$$\vec{P_R} = -(\vec{R_v} + \vec{F_{cf}}) \tag{9}$$

e la posizione limite è data dall'uguaglianza del modulo della componente radiale della forza peso con quello della forza centrifuga (reazione vincolare di appoggio uguale a 0). Questa condizione porta a scrivere l'eq. 4, la cui soluzione è identica al caso sviluppato nel sistema di riferimento inerziale.

Da notare che le due trattazioni relative al sistema di riferimento inerziale del laboratorio e del sistema di riferimento non inerziale solidale col corpo, sono assolutamente equivalenti; infatti l'eq. 3 può essere riscritta

$$\vec{P_R} + \vec{R_v} - \vec{F_{cp}} = \vec{P_R} + \vec{R_v} + \vec{F_{cf}} = 0 \tag{10}$$

da cui segue l'eq. 9.