5.1 Due forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ agiscono su di un punto materiale di massa m = 2 kg la cui posizione in movimento è data da $\mathbf{r} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, con $\mathbf{b} = 8\,\mathbf{u}_y - 3.2\,\mathbf{u}_z$ e $\mathbf{c} = (0.5 + t)\mathbf{u}_x + (2 - t^2)\mathbf{u}_z$ dove t è espresso in secondi e r in metri. Sapendo che $\mathbf{F}_1 = -11.2\,\mathbf{u}_x + 7\,\mathbf{u}_z$ N, calcolare 1) la forza $\mathbf{F}_2$; 2) il lavoro della risultante di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ nell'intervallo di tempo da t_1 = 1 s a t_2 = 7.25 s. [$\mathbf{F}_2 = -20.8\,\mathbf{u}_x - 7\,\mathbf{u}_z$ N, $W = 1.32 \times 10^{24}$ J]

$i := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad j := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad k := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$M := 2 \cdot kg$ $\quad F1 := (-11.2 \cdot i + 7 \cdot k) \cdot newton$

$b := 8 \cdot j - 3.2 \cdot k$ $\quad c(t) := (0.5 + t) \cdot i + (2 - t^2) \cdot k$

$t1 := 1.0$ $\quad t2 := 7.25$ N.B. per ora tengo t adimensionale

$r(t) = b \times c(t)$ $\quad r(t) := (16 - 8 \cdot t^2) \cdot i - (1.6 + 3.2 \cdot t) \cdot j - (4.0 + 8 \cdot t) \cdot k$

La velocità v e l'accelerazione a si possono calcolare direttamente (ora aggiungo le unita' di misura)

$v(t) = \frac{d}{dt} r(t)$ $\quad v(t) := (-16 \cdot t \cdot i - 3.2 \cdot j - 8 \cdot k) \cdot m \cdot sec^{-1}$

$a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$ $\quad a := -16 \cdot i \cdot m \cdot sec^{-2}$

Ricavo F2 dalla seconda legge della dinamica:

$F1 + F2 = M \cdot a$ $\quad F2 := M \cdot a - F1$ $\quad F2 = \begin{bmatrix} -20.800 \\ 0.000 \\ -7.000 \end{bmatrix} \cdot newton$

La risultante è una forza costante diretta lungo l'asse x

$R := F1 + F2$ $\quad R = \begin{bmatrix} -32.000 \\ 0.000 \\ 0.000 \end{bmatrix} \cdot newton$

Il lavoro W si calcola direttamente (aggiungo le unita di misura anche a r)

$r2 := r(t2) \cdot m$ $\quad r1 := r(t1) \cdot m$

$\Delta r := (r2 - r1) \cdot m$ $\quad \Delta r = \begin{bmatrix} -412.500 \\ -20.000 \\ -50.000 \end{bmatrix} \cdot m^2$

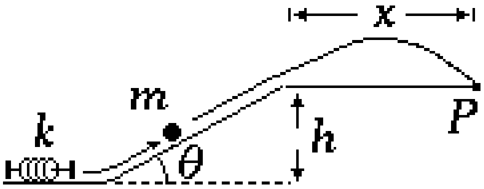
$W := R \cdot \Delta r$ $\quad W = 1.320 \cdot 10^4 \cdot m \cdot joule$

Oppure anche dal teorema dell'energia cinetica:

$v1 := |v(t1)|$ $\quad v2 := |v(t2)|$ $\quad v1 = 18.173 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$v2 = 116.320 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$W := \frac{1}{2} \cdot M \cdot v2^2 - \frac{1}{2} \cdot M \cdot v1^2$ $\quad W = 1.320 \cdot 10^4 \cdot joule$



5.2 Un proiettile di massa *m*, inizialmente fermo, viene spinto da una molla ideale di costante elastica k = 336 N/m prima su un piano orizzontale senza attrito e poi lungo una rampa senza attrito, inclinata di un angolo $\theta = 25^\circ$ rispetto all'orizzontale. Dopo aver percorso tutta la rampa superando un dislivello h = 60 cm, prima di ricadere a terra il proiettile continua il suo moto nel vuoto. Se la molla viene compressa di un tratto d = 12 cm, il proiettile tocca il suolo in un punto P alla distanza x = 1.25 m dalla fine della rampa. Calcolare a) la massa m del proiettile; b) il tempo di volo. [m = 0.174 kg; t = 0.345 s]

$k := 336 \cdot \text{newton} \cdot \text{m}^{-1}$ $\qquad$ $\theta := 25 \cdot \text{deg}$

$h := 60 \cdot \text{cm}$ $\qquad$ $d := 12 \cdot \text{cm}$

$x := 1.25 \cdot \text{m}$

Osservo che il punto di caduta è alla stessa quota del punto di lancio. Allora x è la gittata ed è funzione della velocità del proiettile alla fine della rampa e dell'inclinazione iniziale. Ricavando v dall'espressione della gittata ottengo:

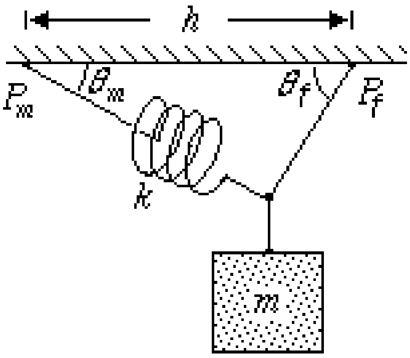
$$x = \frac{v^2}{g} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \qquad v := \sqrt{\frac{g \cdot x}{\sin(2 \cdot \theta)}} \qquad v = 4.00 \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^{-1}$$

Questo valore della velocita deve soddisfare la conmswervazione dell'energia fra l'istante iniziale in cui la molla è compressa e la massa ferma e quello finale in cui la massa inizia il suo volo:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + M \cdot g \cdot h \qquad M := \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2}{\frac{1}{2} \cdot v^2 + g \cdot h} \qquad M = 0.174 \cdot \text{kg}$$

Per calcolare il tempo di volo, considero il moto in direzione orizzontale che Ë uniforme. Il tempo t necessario per percorrere il tratto x Ë:

$$x = v \cdot \cos(\theta) \cdot t \qquad t := \frac{x}{v \cdot \cos(\theta)} \qquad t = 0.345 \cdot \text{sec}$$



5.3 Un blocco di massa m = 2.35 kg è sostenuto da una molla e da una fune, collegate ai due punti P_m e P_f come in figura. La molla ha una lunghezza a riposo d= 25 cm. Sapendo che la distanza fra i due punti P_m e P_f è h = 90 cm e che all'equilibrio la molla e la fune formano due angoli θ_m= 35° e θ_t= 55° rispetto all'orizzontale, calcolare 1) la costante elastica k della molla; Successivamente la molla viene tagliata e il blocco inizia a oscillare sostenuto solamente dalla fune. Calcolare 2) la sua velocità quando raggiunge il punto più basso. [k = 29.13 N/m; v = 1.36 m/s]

$M := 2.35 \cdot kg$ $\qquad d := 25 \cdot cm$ $\qquad h := 90 \cdot cm$

$\theta_m := 35 \cdot deg$ $\qquad \theta_f := 55 \cdot deg$

Dalla condizione di equilibrio, dette F la forza della molla e T la tensione della fune, risulta:

$$T \cdot \sin(\theta_f) + F \cdot \sin(\theta_m) - M \cdot g = 0$$

$$T \cdot \cos(\theta_f) - F \cdot \cos(\theta_m) = 0$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$F := \frac{M \cdot g}{\cos(\theta_m) \cdot \tan(\theta_f) + \sin(\theta_m)} \qquad F = 13.218 \cdot newton$$

$$T := F \cdot \frac{\cos(\theta_m)}{\cos(\theta_f)} \qquad T = 18.878 \cdot newton$$

Per determinare la costante k occorre prima calcolare la lunghezza dei lati del triangolo. Osservando che si tratta di un triangolo rettangolo, dette lm e lf le lunghezze della molla (tesa) e della fune, risulta:

$l_f := h \cdot \sin(\theta_m)$ $\qquad l_m := h \cdot \sin(\theta_f)$ $\qquad l_f = 51.622 \cdot cm$

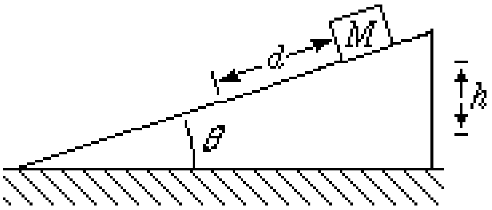
$l_m = 73.724 \cdot cm$

$F = k \cdot (l_m - d)$ $\qquad k := \dfrac{F}{(l_m - d)}$ $\qquad k = 27.129 \cdot newton \cdot m^{-1}$

Quando la molla viene tolta il blocco si mette ad oscillare come un pendolo semplice. Nel punto più basso ha perso una quota h1 rispetto alla posizione di partenza. Applicando la conservazione dell'energia:

$h_1 := l_f - l_f \cdot \sin(\theta_f)$ $\qquad h_1 = 9.336 \cdot cm$

$M \cdot g \cdot h_1 = \dfrac{1}{2} \cdot M \cdot v^2$ $\qquad v := \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$ $\qquad v = 1.353 \cdot m \cdot sec^{-1}$



5.4 Un blocco di massa M = 160 g, tenuto inizialmente fermo su un piano inclinato di un angolo θ = 15° rispetto all'orizzontale, viene lasciato libero di scendere. Dopo aver percorso un primo tratto privo di attrito di lunghezza d = 35 cm, il blocco prosegue su un secondo tratto nel quale il coefficiente d'attrito dinamico vale μ_k= 0.225. Calcolare 1) la velocità v del blocco dopo che esso è sceso in verticale di un dislivello h = 80 cm rispetto al punto di partenza; 2) la variazione di energia meccanica nei primi 3 s del moto. [v = 2.00 m/s; ΔE = –1.55 J]

$M := 160 \cdot gm$ $\qquad \theta := 15 \cdot deg$ $\qquad \mu k := 0.225$

$d := 35 \cdot cm$ $\qquad h := 80 \cdot cm$ $\qquad t0 := 3 \cdot sec$

Calcolo prima il dislivello h0 corrispondente al tratto senza attrito:

$h0 := d \cdot \sin(\theta)$ $\qquad h0 = 0.091 \cdot m$

Quindi per scendere di 80 cm la massa M deve percorrere tutto il tratto senza attrito piu' un tratto d1 con attrito dinamico. Durante la discesa nel tratto senza attrito vale la conservazione dell'energia meccanica con la quale trovo la velocità v0 acquistata alla fine del tratto senza attrito:

$M \cdot g \cdot h0 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v0^2$ $\qquad v0 := \sqrt{2 \cdot g \cdot h0}$ $\qquad v0 = 1.333 \cdot m \cdot sec^{-1}$

In alternativa posso usare la legge del moto: il blocco scende il tratto senza attrito con moto uniformemente accelerato in cui l'accelerazione e la velocità sono:

$a0 := g \cdot \sin(\theta)$ $\qquad a0 = 2.538 \cdot m \cdot sec^{-2}$

$v0^2 = 2 \cdot a0 \cdot d$ $\qquad v0 := \sqrt{2 \cdot a0 \cdot d}$ $\qquad v0 = 1.333 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Posso anche calcolare il tempo t necessario per percorrere il tratto d:

$d = \frac{1}{2} \cdot a0 \cdot t^2$ $\qquad t := \sqrt{\frac{2 \cdot d}{a0}}$ $\qquad t = 0.525 \cdot sec$

Nel tratto con attrito invece, detta F la risultante delle forze parallele al piano inclinato, abbiamo:

$N := M \cdot g \cdot \cos(\theta)$ $\qquad Fk := \mu k \cdot N$ $\qquad N = 1.516 \cdot newton$

$Fk = 0.341 \cdot newton$

$F := M \cdot g \cdot \sin(\theta) - \mu k \cdot N$ $\qquad a := \frac{F}{M}$ $\qquad F = 0.065 \cdot kg \cdot m \cdot sec^{-2}$

$a = 0.407 \cdot m \cdot sec^{-2}$

Quindi il blocco dapprima scende con accelerazione "a0" il tratto senza attrito per un tempo t, poi il tratto con attrito con accelerazione "a". Per scendere di 80 cm rispetto al punto di partenza il blocco deve percorrere una distanza totale l sul piano inclinato. Chiamando s la parte percorsa sul tratto con attrito si trova:

$$l := \frac{h}{\sin(\theta)} \qquad s := l - d \qquad l = 3.091 \cdot m \qquad s = 2.741 \cdot m$$

Anche la discesa nel tratto con attrito avviene con moto uniformemente accelerato, con velocità iniziale v0 e accelerazione. pertanto la velocità v alla fine del tratto s si trova dalla:

$$v^2 = v0^2 + 2 \cdot a \cdot s \qquad v := \sqrt{v0^2 + 2 \cdot a \cdot s} \qquad v = 2.002 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Nel tempo t0 = 3 s il blocco si muove dapprima con accelerazione a0 (senza attrito) per un tempo t e poi nel tempo rimanente con accelerazione "a" (con attrito dinamico). Il tempo t1 durante il quale il blocco si muove con l'accelerazione "a" è

$$t1 := t0 - t \qquad t1 = 2.475 \cdot sec$$

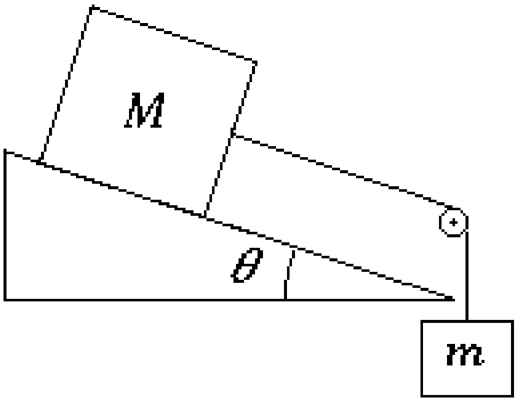
e lo spazio percorso sul tratto con attrito s1 e la velocita v1 all'istante t1 sono:

$$s1 := v0 \cdot t1 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t1^2 \qquad v1 := v0 + a \cdot t1 \qquad s1 = 4.545 \cdot m$$

$$v1 = 2.340 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Per quanto riguarda l'energia meccanica, essa è costante nel tratto senza attrito, e subisce una variazione pari al lavoro (negativo) della forza Fk durante il tratto s1. Allora

$$\Delta E := -Fk \cdot s1 \qquad \Delta E = -1.550 \cdot joule$$



5.5 Un blocco di massa M = 1.1 kg è posto su un piano, inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale ed è collegato mediante una fune ed una carrucola ideali ad una massa m = 150 g sospesa. Aumentando lentamente l'inclinazione del piano, si verifica che il blocco rimane immobile fino a θ = 28˚ e poi si mette in moto. Determinare 1) il coefficiente d'attrito statico μ_s fra il blocco e il piano. Successivamente l'inclinazione viene fissata a θ_1 = 30˚ e il blocco viene lasciato scendere a partire da fermo. Sapendo che, dopo aver percorso un tratto d = 1.24 m lungo il piano, l'energia interna del sistema costituito dal blocco più il piano inclinato è aumentata di una quantità ΔE_i = 5.35 J, calcolare 2) la velocità del blocco alla fine del tratto d. [μ_s= 0.69; v = 2.25 m/s]

$M := 1.1 \cdot kg$ $\qquad m0 := 150 \cdot gm$ $\qquad \theta := 28 \cdot deg$

$d := 1.24 \cdot m$ $\qquad \Delta Ei := 5.35 \cdot joule$ $\qquad \theta 1 := 30 \cdot deg$

Detta Fs la massima forza di attrito statico e T la tensione della fune, abbiamo nella posizione estrema di equilibrio

$$M \cdot g \cdot \sin(\theta) - Fs + T = 0 \qquad Fs = \mu s \cdot M \cdot g \cdot \cos(\theta)$$

$$T = m0 \cdot g \qquad M \cdot g \cdot \sin(\theta) - \mu s \cdot M \cdot g \cdot \cos(\theta) + m0 \cdot g = 0$$

$$\mu s := \frac{M \cdot g \cdot \sin(\theta) + m0 \cdot g}{M \cdot g \cdot \cos(\theta)} \qquad \mu s = 0.686$$

Per calcolare la velocità del blocco dopo la discesa osserviamo che, in base alla conservazione dell'energia, la variazione dell'energia interna ΔEi sarà opposta alla variazione di energia meccanica. Allora:

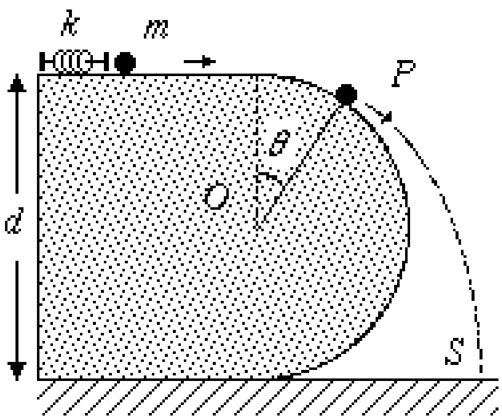
$$\Delta U + \Delta Ec + \Delta Ei = 0$$

ΔU è la variazione di energia potenziale gravitazionale. Per calcolarla scelgo per ciascuna massa il livello di riferimento corrispondente alla sua quota piu' bassa

$$\Delta U := -m0 \cdot g \cdot d - M \cdot g \cdot d \cdot \sin(\theta 1) \qquad \Delta U = -8.512 \cdot joule$$

$$\Delta Ec := -\Delta U - \Delta Ei \qquad \Delta Ec = 3.162 \cdot joule$$

$$\Delta Ec = \frac{1}{2} \cdot m0 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 \qquad v := \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta Ec}{(M + m0)}} \qquad v = 2.249 \cdot m \cdot sec^{-1}$$



5.6 Un punto materiale di massa m = 25 g è lanciato da una molla di costante elastica k = 8 N/m lungo un ripiano orizzontale senza attrito di spessore d = 20 cm appoggiato al suolo e che all'estremità destra si raccorda dolcemente ad un bordo smussato a forma di calotta semicilindrica. Se inizialmente la massa è ferma e la molla è compressa di una quantità x, la massa si solleva dal profilo semicilindrico in un punto P la cui congiungente rispetto ad O forma un angolo $\theta = 20^\circ$ con la verticale. Calcolare a) la velocità v della massa al momento del distacco; b) la compressione iniziale x della molla; c) il punto S dell'impatto al suolo. [v = 0.96 m/s; x = 5.01 cm; S è posto a 15.17 cm a destra rispetto alla verticale per il punto di distacco P]

$M := 25 \cdot gm$ $\qquad$ $k := 8 \cdot newton \cdot m^{-1}$

$d := 20 \cdot cm$ $\qquad$ $\theta := 20 \cdot deg$

Durante il moto lungo la calotta semicilindrica, l'accelerazione centripeta della massa e' dovuta alla somma delle componenti radiali della forza di gravità e della forza normale N

$$M \cdot g \cdot \cos(\theta) - N = M \cdot a$$

Quando la massa comincia a sollevarsi N=0. Allora, ricordando che:

$$a = \frac{v^2}{R} \qquad R := \frac{d}{2}$$

si trova la velocita' necessaria perche' avvenga il distacco

$$M \cdot g \cdot \cos(\theta) = M \cdot \frac{v^2}{R} \qquad v := \sqrt{R \cdot g \cdot \cos(\theta)} \qquad v = 0.96 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

La massa acquista questa velocita' per effetto dell'energia fornita dalla molla compressa e per l'energia cinetica acquistata discendendo la calotta semicilindrica. Scegliendo lo zero dell'energia potenziale al suolo e detta h la quota rispetto al suolo in cui avviene il distacco, applicando la conservazione dell'energia fra l'istante iniziale in cui la massa è ferma e la molla compressa e l'istante del distacco trovo:

$$M \cdot g \cdot d + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = M \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2$$

$$h := R + R \cdot \cos(\theta) \qquad h = 0.194 \cdot m$$

e ricavando x si trova:

$$M \cdot g \cdot d + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = M \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2$$

$$x := \sqrt{M \cdot \frac{v^2 - 2 \cdot g \cdot (d - h)}{k}} \qquad x = 5.01 \cdot cm$$

Dopo che si è sollevata la massa si muove in volo come un proiettile che parte dal punto di distacco.La velocità iniziale è v ed è inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ verso il basso. Le componenti della velocità sono:

$vx := v \cdot \cos(\theta)$ $\qquad vx = 0.902 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$vy := -v \cdot \sin(\theta)$ $\qquad vy = -0.328 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Scegliendo un sistema di riferimento con l'asse x al suolo e l'asse y che passa per il punto di distacco le equazioni del moto sono:

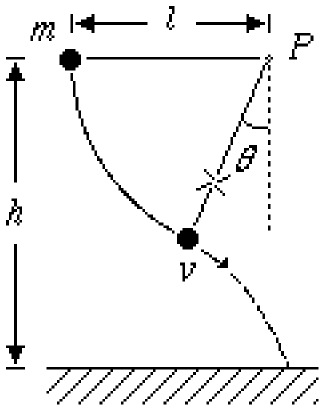
$x = vx \cdot t$ $\qquad y = h + vy \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Ponendo y = 0 nella seconda trovo il tempo di caduta t (solo la soluzione positiva è accettabile)

$h + vy \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0$ $\qquad t := \frac{vy + \sqrt{vy^2 + 2 \cdot g \cdot h}}{g}$ $\qquad t = 0.168 \cdot sec$

e, sostituendo nella prima trovo lo spazio percorso in direzione orizzontale al momento dell'impatto al suolo rispetto al punto di distacco:

$x := vx \cdot t$ $\qquad x = 15.174 \cdot cm$



5.7 Una particella di massa m = 540 g è attaccata ad una funicella di massa trascurabile di lunghezza l = 85 cm, sospesa ad un punto P situato ad una quota h = 120 cm rispetto al suolo. La massa viene lasciata cadere da ferma, a partire dalla posizione in cui la fune è tesa ed orizzontale e scende inizialmente lungo una traiettoria circolare. Quando la fune forma un angolo θ = 18° rispetto alla verticale, la fune si spezza e la particella prosegue il suo moto in presenza della sola forza di gravità. Calcolare 1) la tensione massima T sopportata dalla funicella e 2) la posizione in cui la particella tocca il suolo. [T = 15.11 N; la massa cade al suolo in un punto posto a 0.696 m a destra della verticale per il punto di distacco]

$M := 540\cdot gm$ $\qquad l := 85\cdot cm$

$h := 120\cdot cm$ $\qquad \theta := 18\cdot deg$

Dalla conservazione dell'energia calcolo la velocità della massa nel punto in cui la fune si spezza:

$$\frac{1}{2}\cdot M\cdot v^2 = M\cdot g\cdot l\cdot \cos(\theta) \qquad v := \sqrt{2\cdot g\cdot l\cdot \cos(\theta)} \qquad v = 3.982\cdot m\cdot sec^{-1}$$

L'accelerazione centripeta della massa nel punto in cui la fune si spezza è dovuta alla tensione della fune e alla componente radiale della forza peso. Dalla legge di Newton

$$T - M\cdot g\cdot \cos(\theta) = M\cdot \frac{v^2}{l} \qquad T := M\cdot g\cdot \cos(\theta) + M\cdot \frac{v^2}{l} \qquad T = 15.109\cdot newton$$

Il moto successivo è quello di un proiettile. Scegliendo un sistema di riferimento con l'origine nel punto di distacco e con gli assi x verso destra e y verso l'alto la quota del suolo d e le componenti della velocità iniziale sono:

$$d := h - l\cdot \cos(\theta) \qquad d = 0.392\cdot m$$

$$vx := v\cdot \cos(\theta) \qquad vx = 3.787\cdot m\cdot sec^{-1}$$

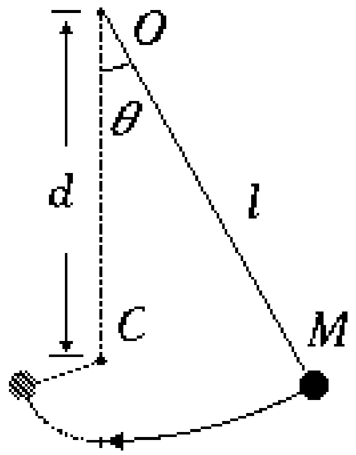
$$vy := -v\cdot \sin(\theta) \qquad vy = -1.23\cdot m\cdot sec^{-1}$$

Dalla legge del moto in senso verticale trovo il tempo di caduta

$$vy\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = -d \qquad t := \frac{vy + \sqrt{vy^2 + 2\cdot g\cdot d}}{g} \qquad t = 0.184\cdot sec$$

Nel tempo t la distanza percorsa in orizzontale è

$$x := vx\cdot t \qquad x = 0.696\cdot m$$



5.8 Un pendolo con una particella di massa M=32 g e lunghezza l = 1.2 m, inizialmente nella posizione in cui θ =35° è lasciato libero di oscillare. Quando la massa arriva nel punto più basso della traiettoria, la cordicella comincia ad arrotolarsi attorno ad un chiodo C posto sulla verticale del vertice O ad una distanza d più in basso. Calcolare quale deve essere la distanza d affinchè 1) la massa risalga dall'altra parte fino alla stessa quota del chiodo; 2) la massa compia un giro completo attorno al chiodo lungo una traiettoria circolare. [d_1 = 0.983 m; $d_2 \geq$ 1.113 m]

$M := 32 \cdot gm$ $\qquad$ $l := 1.2 \cdot m$

$\theta := 35 \cdot deg$ $\qquad$ $g = 9.807 \cdot m \cdot sec^{-2}$

La massa M Ë sottoposta alla forza di gravità e alla tensione del filo. Quest'ultima però non fa lavoro perchè è sempre perpendicolare alla velocità. Vale quindi la conservazione dell'energia durante tutto il moto. Nel caso 1) all'istante finale la massa è ferma e quindi la quota alla quale risale è proprio la quota di partenza che quindi sarà uguale alla quota del chiodo. Detta d1 la distanza del chiodo da O:

$l - d1 = l - l \cdot \cos(\theta)$ $\qquad$ $d1 := l \cdot \cos(\theta)$ $\qquad$ $d1 = 0.983 \cdot m$

Nel caso 2), detta d2 la distanza minima, all'istante finale la massa possiede energia cinetica. La sua velocità minima v si può calcolare osservando che l'accelerazione centripeta nel punto più' in alto sarà interamente dovuta alla forza di gravità. Allora:

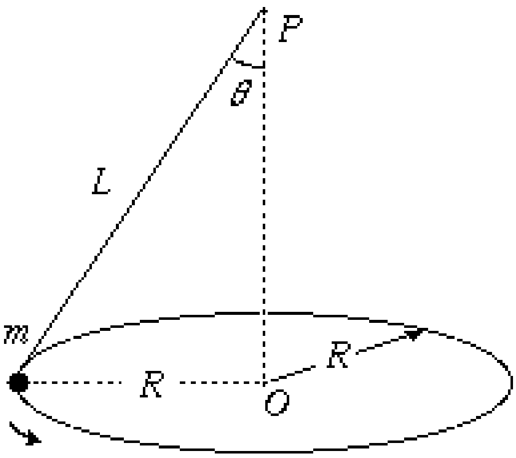
$\dfrac{v^2}{l - d2} = g$ $\qquad$ $v = \sqrt{g \cdot (l - d2)}$

Dalla conservazione dell'energia, scegliendo lo zero dell'energia potenziale quando la massa si trova nel punto più basso della traiettoria, trovo:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + M \cdot g \cdot 2 \cdot (l - d2) = M \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos(\theta))$$

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot (l - d2) + 2 \cdot M \cdot g \cdot (l - d2) = M \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos(\theta))$$

$d2 := \dfrac{3}{5} \cdot l + \dfrac{2}{5} \cdot l \cdot \cos(\theta)$ $\qquad$ $d2 = 1.113 \cdot m$



5.9 Un pendolo conico è costituito da una massa $m = 50$ g attaccata ad un punto fisso P tramite una fune di lunghezza $L = 60$ cm. La massa ruota in una traiettoria circolare con periodo $\tau = 1.5$ s. Calcolare 1) l'energia cinetica del pendolo. Successivamente, mediante forze esterne si fa aumentare la velocità di rotazione della massa, in modo che l'energia cinetica del pendolo raddoppi. Calcolare 2) l'angolo di inclinazione finale della fune e 3) il lavoro delle forze esterne necessario per il cambio di traiettoria.[$E = 2.09 \times 10^{-2}$ J; q = 29.77°; $W = 3.96 \times 10^{-2}$ J]

$M := 50 \cdot gm \qquad L := 60 \cdot cm \qquad \tau := 1.50 \cdot sec$

Dalle formule del pendolo conico si ricavano il periodo τ l'inclinazione iniziale del filo θ, e la velocità v

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L0 \cdot \cos\theta}{g}} \qquad \cos\theta := \left(\frac{\tau}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \frac{g}{L} \qquad \cos\theta = 0.932$$

$$\theta := \operatorname{acos}\left[\left(\frac{\tau}{2 \cdot \pi}\right)^2 \cdot \frac{g}{L}\right] \qquad \theta = 0.372 \cdot rad$$

$$\theta = 21.327 \cdot deg$$

$$R := L \cdot \sin(\theta) \qquad v := \sqrt{g \cdot R \cdot \tan(\theta)} \qquad v = 0.914 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

$$R = 0.218 \cdot m$$

$$Ei := \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 \qquad Ei = 2.089 \cdot 10^{-2} \cdot joule$$

L'energia cinetica finale Ef e la velocità finale vf sono quindi:

$$Ef := 2 \cdot Ei \qquad Ef = 4.177 \cdot 10^{-2} \cdot joule$$

$$Ef = \frac{1}{2} \cdot M \cdot vf^2 \qquad vf := \sqrt{2 \cdot \frac{Ef}{M}} \qquad vf = 1.293 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Ora ricavo ilo raggio finale Rf e l'inclinazione finale θf

$$Rf = L \cdot \sin(\theta f) \qquad vf = \sqrt{g \cdot Rf \cdot \tan(\theta f)}$$

$$vf = \sqrt{g \cdot L \cdot \frac{\sin(\theta f)^2}{\cos(\theta f)}} \qquad \frac{1 - \cos(\theta f)^2}{\cos(\theta f)} = \frac{vf^2}{g \cdot L} \qquad \cos(\theta f)^2 + \frac{vf^2}{g \cdot L} \cdot \cos(\theta f) - 1 = 0$$

Questa e' un'equazione di secondo grado in $\cos(\theta f)$ che ha due soluzioni

$$\cos(\theta f1) = \frac{-vf^2 + \sqrt{vf^4 + 4 \cdot g^2 \cdot L^2}}{2 \cdot g \cdot L} \qquad \frac{-vf^2 + \sqrt{vf^4 + 4 \cdot g^2 \cdot L^2}}{2 \cdot g \cdot L} = 0.868$$

$$\cos(\theta f1) = \frac{-vf^2 - \sqrt{vf^4 + 4 \cdot g^2 \cdot L^2}}{2 \cdot g \cdot L} \qquad \frac{-vf^2 - \sqrt{vf^4 + 4 \cdot g^2 \cdot L^2}}{2 \cdot g \cdot L} = -1.152$$

Solo la soluzione per cui $|\cos(\theta f)| <1$ è accettabile. Quindi trovo il raggio Rf l'inclinazione finale θf:

$$\theta f := \operatorname{acos}\left[\frac{-vf^2 + \sqrt{vf^4 + 4 \cdot g^2 \cdot L^2}}{2 \cdot g \cdot L}\right] \qquad \theta f = 0.52 \cdot rad \qquad \theta f = 29.77 \cdot deg$$

$$Rf := L \cdot \sin(\theta f) \qquad Rf = 0.298 \cdot m$$

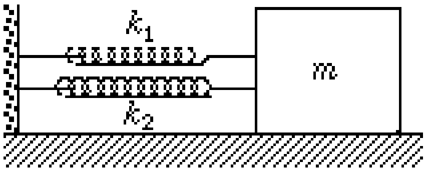
Nella nuova traiettoria la massa ruota in un'orbita posta su un piano sollevato rispetto a quello iniziale e, oltre a raddoppiare l'energia cinetica acquista un'energia potenziale gravitazionale. Detta h la differenza fra le quote dell'orbita finale e iniziale, il lavoro delle forze esterne W è pari alla variazione di energia meccanica

$$h := L \cdot \cos(\theta) - L \cdot \cos(\theta f) \qquad h = 3.809 \cdot 10^{-2} \cdot m$$

$$\Delta U := M \cdot g \cdot h \qquad \Delta U = 1.868 \cdot 10^{-2} \cdot joule$$

$$\Delta Ec := Ef - Ei \qquad \Delta Ec = 2.089 \cdot 10^{-2} \cdot joule$$

$$W := \Delta U + \Delta Ec \qquad W = 3.956 \cdot 10^{-2} \cdot joule$$



5.10 Un cubo di massa m = 0.3 kg è posto su un piano orizzontale senza attrito, collegato a due molle disposte come in figura. Le due molle hanno costanti elastiche k_1=10 N/m e k_2 = 25 N/m e lunghezze a riposo d_1= 40 cm e d_2=30 cm rispettivamente. Calcolare 1) l'estensione delle molle nella posizione di equilibrio. Successivamente il cubo viene spostato rispetto alla posizione di equilibrio di una piccola distanza x e lasciato libero di muoversi. Calcolare 2) il periodo delle oscillazioni; 3) l'energia meccanica del sistema.[d = 0.33 m; T = 0.58 s, E = 0.121 J].

$M := 0.3 \cdot kg$ $\qquad d1 := 40 \cdot cm$ $\qquad d2 := 30 \cdot cm$

$k1 := 10 \cdot newton \cdot m^{-1}$ $\qquad k2 := 25 \cdot newton \cdot m^{-1}$ $\qquad x := 7 \cdot cm$

Sia d la lunghezza comune delle due molle quando il cubo è in equilibrio. Dato che la lunghezza a riposo delle due molle è diversa, all'equilibrio una delle molle è compressa, e l'altra è estesa. Le forze che agiscono sul cubo sono due forze elastiche la cui risultante dovrà essere nulla. Allora, sia per la molla estesa che per la molla compressa, sarà:

$F1 = -k1 \cdot (d - d1)$ $\qquad F2 = -k2 \cdot (d - d2)$ $\qquad F1 + F2 = 0$

$-k1 \cdot (d - d1) - k2 \cdot (d - d2) = 0$ $\qquad d := \dfrac{k1 \cdot d1 + k2 \cdot d2}{k1 + k2}$ $\qquad d = 0.329 \cdot m$

Se il cubo viene spostato di un tratto x rispetto alla posizione di equilibrio:

$$-k1 \cdot (d + x - d1) - k2 \cdot (d + x - d2) = M \cdot \frac{d^2 \cdot x}{dt^2}$$

$$-k1 \cdot (d - d1) - k2 \cdot (d - d2) - k1 \cdot x - k2 \cdot x = M \cdot \frac{d^2 \cdot x}{dt^2}$$

Dalla relazione che definisce la condizione di equilibrio risulta che la somma dei primi due termini è zero. E quindi si trova:

$$\frac{d^2 \cdot x}{dt^2} + \frac{k1 + k2}{M} \cdot x = 0$$

Questa è l'equazione di un moto armonico con pulsazione e periodo

$\omega := \sqrt{\dfrac{k1 + k2}{M}}$ $\qquad T := \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$ $\qquad T = 0.582 \cdot sec$ $\qquad \omega = 10.801 \cdot rad \cdot sec^{-1}$

L'energia meccanica del sistema e' costante e si puo' calcolare come l'energia potenziale delle due molle nella posizione spostata di x

$E := \dfrac{1}{2} \cdot k1 \cdot (d + x - d1)^2 + \dfrac{1}{2} \cdot k2 \cdot (d + x - d2)^2$ $\qquad E = 0.121 \cdot joule$