1.1 Dati i vettori **A** = 2**i** + 4**j** – 6**k**, **B** = – 3**i** + 3**j** + 2**k** e **C** = 6**j** – **k** e la costante *a* = 3, determinare due vettori **U** e **V** in modo che (**A** · **B**)**C** = **U** e *a*(**B** × **V**) = **C** [**U** = –36**j** + 6**k**, **V** non esiste].

$$A := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad a := 3 \qquad B := \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Il vettore U si può calcolare direttamente:

$$(A \cdot B) = -6 \qquad U := C \cdot (A \cdot B) \qquad U = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda V, osserviamo che C dovrebbe essere perpendicolare sia a V che a B. Dato però che risulta:

$$B \cdot C = 16$$

B e C non sono perpendicolari e quindi non esiste nessun vettore V in grado di soddisfare la relazione richiesta.

1.2 Dati i vettori $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ e $\mathbf{C} = -10\mathbf{k}$, determinare un vettore $\mathbf{V}$ in modo che sia simultaneamente $\mathbf{V} \times \mathbf{A} = \mathbf{C}$ e $\mathbf{V} \cdot \mathbf{B} = 5$ [$\mathbf{V} = -0.5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$].

$$A := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad C := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Dette x,y e z le componenti di V, dalle relazioni V x A = –10 k e V•B = 5 si ricava

$$z = 0 \qquad 2\cdot x - 3\cdot y = -10 \qquad 2\cdot x + 2\cdot y = 5$$

Risolvendo il sistema costituito dalla seconda e dalla terza si trova:

$$x := -\frac{1}{2} \qquad y := 3$$

Per verifica calcolo esplicitamente V x A e V•B

$$V := \begin{bmatrix} -0.5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V \times A = \det\begin{bmatrix} i & j & k \\ -0.5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad V \times A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$V\cdot B = -0.5\cdot 2 + 3\cdot 2 + 0\cdot 3 \qquad V\cdot B = 5$$

1.3 Dati i vettori **A** = 2 **i** + 3 **j** – **k** e **B** = – 0.5 **j** + **k**, determinare un vettore **V** in modo che sia (**A** · **B**)**V** = **A** × **B**. Successivamente determinare un vettore **U** in modo che **U** + **V** = B^2**A**.
[**V** = – **i** + 0.8 **j** + 0.4 **k**, **U** = 3.5 **i** + 2.95 **j** – 1.65 **k**]

$$A := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori U e V si possono calcolare direttamente. Infatti per V:

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2.5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (A \cdot B) = -2.5$$

$$(|B|)^2 = 1.25$$

$$(A \cdot B) \cdot V = (A \times B) \qquad V := \frac{A \times B}{A \cdot B} \qquad V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$$

mentre U si ottiene dalle:

$$U + V = (|B|)^2 \cdot A \qquad U := (|B|)^2 \cdot A - V \qquad U = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 2.95 \\ -1.65 \end{pmatrix}$$

1.4 La posizione di un punto P in movimento è data da **r** = **A** × **B** dove i vettori **A** = (3.2 t) **i** – (6.6 t^2) **j** – (12t) **k** e **B** = (0.5 + t) **j** + (2 – t) **k** dipendono dal tempo. Calcolare a) l'accelerazione **a** del punto P quando t = 0 e b) il modulo v della velocità **v** del punto P nell'istante in cui **v** è perpendicolare all'asse z.
[**a** = – 2.4 **i** + 6.4 **j** + 6.4 **k**; v = 11.2 m/s]

$$A(t) := \begin{pmatrix} 3.2\cdot t \\ -6.6\cdot t^2 \\ -12\cdot t \end{pmatrix} \qquad B(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 + t \\ 2 - t \end{pmatrix}$$

$$r(t) = A(t) \times B(t) \qquad r(t) := \begin{pmatrix} -1.2\cdot t^2 + 6.6\cdot t^3 + 6.\cdot t \\ -6.4\cdot t + 3.2\cdot t^2 \\ 1.6\cdot t + 3.2\cdot t^2 \end{pmatrix}$$

La velocità v e l'accelerazione a in funzione del tempo si calcolano direttamente:

$$v(t) = \frac{d}{dt} R(t) \qquad a(t) = \frac{d}{dt} v(t)$$

$$v(t) := \begin{pmatrix} -2.4\cdot t + 19.8\cdot t^2 + 6. \\ -6.4 + 6.4\cdot t \\ 1.6 + 6.4\cdot t \end{pmatrix} \qquad a(t) := \begin{pmatrix} -2.4 + 39.6\cdot t \\ 6.4 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

E quindi l'accelerazione per t=0 sarà:

$$a(0) = \begin{pmatrix} -2.4 \\ 6.4 \\ 6.4 \end{pmatrix}$$

Perchè v sia perpendicolare a z ad un certo istante t0 dovrà essere:

$$1.6 + 6.4\cdot t0 = 0$$

Calcolando t0 e v(t0) trovo:

$$t0 := -0.25 \qquad |v(t0)| = 11.199$$

Sapendo che **U** = 3 **i** + 2 **j** determinare a) un vettore **V** in modo che sia **U** · **V** = –2.42 e **U** × **V** = 4 **k**. Determinare poi b) l'angolo θ fra i vettori **U** – **V** e **V**. [**V** = – 1.174 **i** + 0.551 **j**; θ = 135.72°]

$U := 3\cdot i + 2\cdot j$ $\qquad U\cdot V = -2.42$

Il modo piu' diretto per risolvere il problema e' di usare la seguente relazione detta regola del triplo prodotto vettoriale. Dati 3 vettori generici A, B e C, risulta:

$$A \times (B \times C) = (A\cdot C)\cdot B - (A\cdot B)\cdot C$$

dalla quale con le sostituzioni A -> U e B -> U e C -> V si ottiene nel nostro caso

$$U \times (U \times V) = (U\cdot V)\cdot U - (U\cdot U)\cdot V \qquad U\cdot U = (|U|)^2$$

$$(|U|)^2\cdot V = (U\cdot V)\cdot U - U \times (U \times V)$$

$$V = \frac{(U\cdot V)\cdot U - U \times (U \times V)}{(|U|)^2} \qquad V = \begin{bmatrix} -1.174 \\ 0.551 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oppure si puo' procedere in questo modo: dette vx, vy e vz le tre componenti di V, le due relazioni date diventano:

$$3\cdot vx + 2\cdot vy = -2.42 \qquad i\cdot(2\cdot vz) + j\cdot(-3\cdot vz) + k\cdot(3\cdot vy - 2\cdot vx) = 4\cdot k$$

Dalla seconda relazione seguono le:

$$3\cdot vy - 2\cdot vx = 4 \qquad vz := 0$$

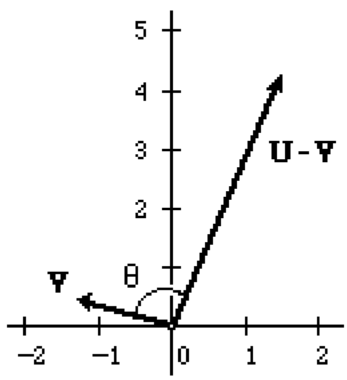
Risolviamo dunque il sistema costituito dalla prima relazione e dalla prima delle precedenti: si ottiene

$$3\cdot vy - 2\cdot vx = 4 \qquad vx = -1.174$$

$$3\cdot vx + 2\cdot vy = -2.42 \qquad vy = 0.551$$

Per calcolare l'angolo richiesto conviene disegnare i due vettori U-V e V e poi procedere in questo modo:

$$U - V = \begin{bmatrix} 4.174 \\ 1.449 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$(U - V)\cdot V = |U - V|\cdot|V|\cdot\cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) = \frac{(U - V)\cdot V}{|U - V|\cdot|V|}$$

$$\theta := \operatorname{acos}\left[\frac{(U - V)\cdot V}{|U - V|\cdot|V|}\right]$$

$$\theta = 135.72\cdot deg$$

risultati intermedi:

$$(U - V)\cdot V = -4.101 \qquad \frac{(U - V)\cdot V}{|U - V|\cdot|V|} = -0.72$$

$$|U - V| = 4.418 \qquad |V| = 1.297$$