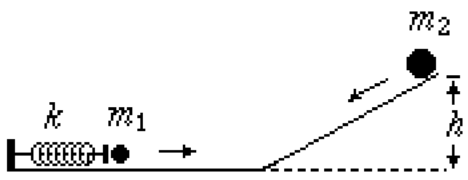


7.1 Una molla ideale di costante elastica k = 482 N/m, inizialmente compressa di una quantità d = 5 cm rispetto alla sua posizione a riposo, spinge una massa m_1 = 75 g inizialmente ferma, su un piano orizzontale senza attrito nella direzione indicata in figura. Un'altra massa m_2 = 110 g, inizialmente ferma su una rampa, ad una quota h = 28 cm dal livello del piano, è lasciata libera di scendere e, una volta raggiunto il piano, subisce un urto completamente anelastico contro la precedente. Calcolare 1) il modulo e il verso della velocità comune delle due masse dopo l'urto e l'energia cinetica dissipata nell'urto. Calcolare inoltre 2) quale dovrebbe essere la compressione iniziale della molla affinchè le due masse dopo l'urto risalgano la rampa fino a raggiungere la quota h.

$k := 482 \cdot newton \cdot m^{-1}$ $\quad d := 5 \cdot cm$

$m1 := 75 \cdot gm$ $\quad m2 := 110 \cdot gm$ $\quad h := 28 \cdot cm$

Calcolo le velocità iniziali prima dell'urto prendendo positiva quella della massa 1:

$\frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2$ $\quad v1 := d \cdot \sqrt{\frac{k}{m1}}$ $\quad \frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 = 0.603 \cdot joule$ $\quad v1 = 4.008 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$m2 \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2$ $\quad v2 := -\sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $\quad m2 \cdot g \cdot h = 0.302 \cdot joule$ $\quad v2 = -2.343 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Dalla conservazione della quantità di moto trovo la velocità v delle masse dopo l'urto e poi l'energia cinetica perduta Ep

$m1 \cdot v1 + m2 \cdot v2 = (m1 + m2) \cdot v$ $\quad v := \frac{m1 \cdot v1 + m2 \cdot v2}{m1 + m2}$ $\quad v = 0.232 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$Ep := \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2 - \frac{1}{2} \cdot (m1 + m2) \cdot v^2$ $\quad Ep = 0.900 \cdot joule$

Per risalire fino alla quota h la velocità delle due masse subito dopo l'urto dovrà essere

$\frac{1}{2} \cdot (m1 + m2) \cdot v^2 = (m1 + m2) \cdot g \cdot h$ $\quad v := \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ $\quad v = 2.343 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Applico ancora la conservazione della quantità di moto

$m1 \cdot v1 + m2 \cdot v2 = (m1 + m2) \cdot v$

$v1 := \frac{(m1 + m2) \cdot v - m2 \cdot v2}{m1}$ $\quad v1 = 9.218 \cdot m \cdot sec^{-1}$

La compressione della molla si trova dalla

$\frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2$ $\quad d := v1 \cdot \sqrt{\frac{m1}{k}}$ $\quad d = 0.115 \cdot m$

7.2 Una massa m_1 = 100 g è in moto su un piano orizzontale senza attrito con velocità iniziale v_1 = 12 m/s diretta verso destra. Un'altra massa m_2= 500 g, inizialmente ferma su una rampa inclinata, ad una quota h = 88 cm dal livello del piano, è lasciata libera di scendere e subisce un urto elastico contro la precedente. Nel caso che l'urto avvenga sul piano orizzontale determinare a) il modulo e il verso della velocità della massa m_1 dopo l'urto. Se invece l'urto avviene sulla rampa ad una quota d=12 cm, determinare b) la massima quota raggiunta dalla massa m_2 dopo l'urto.[v_{1f} = 14.92 m/s, diretta verso sinistra; x = 21.9 cm]

$m1 := 100 \cdot gm$ $\qquad m2 := 500 \cdot gm$ $\qquad d := 12 \cdot cm$

$v1 := 12 \cdot m \cdot sec^{-1}$ $\qquad h := 88 \cdot cm$

La velocità v1 è anche la velocità iniziale della massa 1 al momento dell'urto v1i. La velocità iniziale della massa 2 v2i si calcola dalla conservazione dell'energia: se l'urto avviene nel piano

$$\frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2i^2 = m2 \cdot g \cdot h \qquad v2i := -\sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad v2i = -4.154 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

$$v1i := v1 \qquad v1i = 12 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

dove si è scelta positiva la velocità diretta verso destra. Dalle formule dell'urto elastico trovo le velocità finali v1f e v2f:

$$v1f := \frac{m1 - m2}{m1 + m2} \cdot v1i + \frac{2 \cdot m2}{m1 + m2} \cdot v2i \qquad v1f = -14.924 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

$$v2f := \frac{2 \cdot m1}{m1 + m2} \cdot v1i + \frac{m2 - m1}{m1 + m2} \cdot v2i \qquad v2f = 1.23 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Se invece l'urto avviene sulla rampa, le velocità iniziali delle 2 masse si trovano dalle:

$$\frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2 = \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1i^2 + m1 \cdot g \cdot d \qquad v1i := \sqrt{v1^2 - 2 \cdot g \cdot d} \qquad v1i = 11.902 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2i^2 = m2 \cdot g \cdot (h - d) \qquad v2i := -\sqrt{2 \cdot g \cdot (h - d)} \qquad v2i = -3.861 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

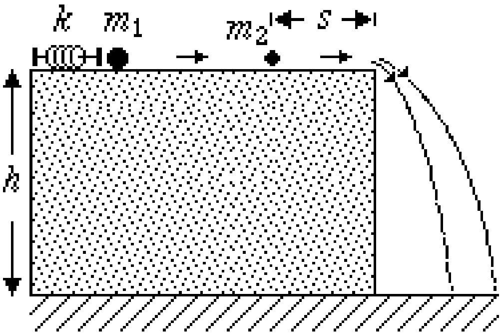
e applicando ancora le leggi dell'urto elastico:

$$v1f := \frac{m1 - m2}{m1 + m2} \cdot v1i + \frac{2 \cdot m2}{m1 + m2} \cdot v2i \qquad v1f = -14.369 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

$$v2f := \frac{2 \cdot m1}{m1 + m2} \cdot v1i + \frac{m2 - m1}{m1 + m2} \cdot v2i \qquad v2f = 1.393 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Nota v2f la massima quota x raggiunta da m2 dopo l'urto si calcola ancora dalla conservazione dell'energia. Assumendo lo zero dell'energia potenziale alla quota del piano:

$$\frac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2f^2 + m2 \cdot g \cdot d = m2 \cdot g \cdot x \qquad x := \frac{v2f^2 + 2 \cdot g \cdot d}{2 \cdot g} \qquad x = 0.219 \cdot m$$



7.3 Una molla ideale di costante elastica k = 55 N/m, inizialmente compressa di una quantità d = 7 cm rispetto alla posizione a riposo, spinge una massa m_1 = 75 g lungo un piano orizzontale senza attrito nella direzione indicata in figura. Ad un certo istante m_1 urta elasticamente un'altra massa m_2 = 35 g, inizialmente ferma in un punto a s = 1.2 m dal bordo del piano orizzontale. Dopo l'urto le due masse proseguono lungo il piano orizzontale e, raggiuntone il bordo, precipitano al suolo per un dislivello h = 7.35 m. Calcolare 1) il tempo trascorso fra gli istanti di impatto al suolo delle due masse; 2) la distanza fra i punti d'impatto.

$k := 55 \cdot newton \cdot m^{-1}$ $\qquad d := 7 \cdot cm$ $\qquad m1 := 75 \cdot gm$

$m2 := 35 \cdot gm$ $\qquad s := 1.2 \cdot m$ $\qquad h := 7.35 \cdot m$

La velocità della massa1 all'urto v1i si ricava dalla conservazione dell'energia applicata all'estensione della molla:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 = \frac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1i^2 \qquad v1i := d \cdot \sqrt{\frac{k}{m1}} \qquad v1i = 1.896 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Le velocità delle masse m1 e m2 dopo l'urto si trovano dalle formula dell'urto elastico con v2i=0.

$$v1f := \frac{m1 - m2}{m1 + m2} \cdot v1i \qquad v2f := \frac{2 \cdot m1}{m1 + m2} \cdot v1i \qquad v1f = 0.689 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

$$v2f = 2.585 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

Queste sono le velocità orizzontali con cui le due particelle arrivano al bordo e iniziano la caduta. Il tempo di caduta e' lo stesso per tutte e due e si trova dalla legge del moto in senso verticale:

$$\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = h \qquad t := \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} \qquad t = 1.224 \cdot sec$$

La distanza fra i punti d'impatto si trova dalla differenza fra le distanze percorse in senso orizzontale nel tempo t dalle due particelle.

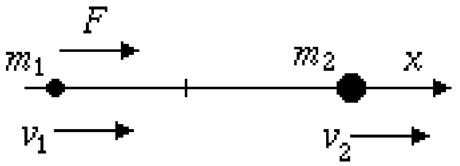
$x1 := v1f \cdot t$ $\qquad x1 = 0.844 \cdot m$

$x2 := v2f \cdot t$ $\qquad x2 = 3.165 \cdot m$ $\qquad x2 - x1 = 2.321 \cdot m$

Dato che i tempi di caduta sono uguali, il ritardo fra l'impatto e' dovuto al diverso tempo di percorrenza della distanza fra il punto dell'urto e il bordo del piano.

$$t1 := \frac{s}{v1f} \qquad t1 = 1.741 \cdot sec$$

$$t2 := \frac{s}{v2f} \qquad t2 = 0.464 \cdot sec \qquad t1 - t2 = 1.277 \cdot sec$$



7.4 Le due masse m_1 = 80 g e m_2 = 230 g sono in moto lungo l'asse x con velocità v_{01} = 0.5 m/s e v_{02} = 0.3 m/s. All’istante t = 0, quando le due masse sono separate da una distanza d = 8 m una forza F = 0.10 N diretta verso la massa 2 è applicata a m_1 per una durata Δt = 2.5 s. Calcolare a) l’istante dell’urto fra le due masse. Sapendo inoltre che l’urto è elastico, calcolare b) la velocità di m_2 dopo l’urto.

$m1 := 80 \cdot gm$ $\qquad m2 := 230 \cdot gm$ $\qquad F := 0.10 \cdot newton$

$v01 := 0.5 \cdot m \cdot sec^{-1}$ $\qquad v02 := 0.3 \cdot m \cdot sec^{-1}$ $\qquad t := 2.5 \cdot sec$

$d := 8 \cdot m$

Poniamo arbitrariamente l'origine dell'asse x nella posizione iniziale della particella 1:

$x01 = 0$ $\qquad x02 := d$

Al tempo t, dopo che sulla massa 1 ha agito la forza F, la velocità e la posizione sono:

$x1 = x01 + v01 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $\qquad a := \frac{F}{m1}$ $\qquad a = 1.25 \cdot m \cdot sec^{-2}$

$x1 := v01 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $\qquad x1 = 5.156 \cdot m$

$v1 := v01 + a \cdot t$ $\qquad v1 = 3.625 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Una volta cessata la forza la massa 1 prosegue verso m2 con velocita' costante v1. La massa 2 invece muove di moto uniforme. Al tempo t la sua posizione sara':

$v2 := v02$ $\qquad x2 := x02 + v2 \cdot t$ $\qquad x2 = 8.75 \cdot m$

Ora, contando i tempi dal momento in cui cessa di agire la forza le posizioni sono

$xx1 = x1 + v1 \cdot t$ $\qquad xx2 = x2 + v2 \cdot t$

E l'urto avverra' quando le posizioni sono uguali:

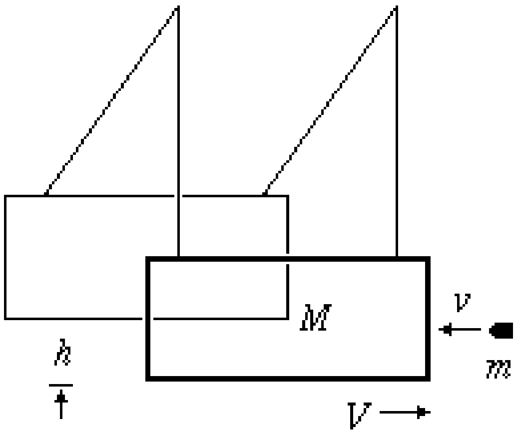
$x1 + v1 \cdot t = x2 + v2 \cdot t$ $\qquad t := \frac{x2 - x1}{v1 - v2}$ $\qquad t = 1.081 \cdot sec$

La velocita' di m2 dopo l'urto si ricava dalle formule dell'urto elastico con:

$v1i := v1$ $\qquad v2i := v2$

$v1f := \frac{m1 - m2}{m1 + m2} \cdot v1i + \frac{2 \cdot m2}{m1 + m2} \cdot v2i$ $\qquad v1f = -1.309 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$v2f := \frac{2 \cdot m1}{m1 + m2} \cdot v1i + \frac{m2 - m1}{m1 + m2} \cdot v2i$ $\qquad v2f = 2.016 \cdot m \cdot sec^{-1}$



7.5 Un pendolo balistico di massa M = 50 kg è fermo, sollevato di una quota h = 10 cm rispetto alla sua posizione più bassa. Esso viene lasciato libero di muoversi e, giunto nel punto più basso della traiettoria, è investito da un proiettile di massa m = 15 g e velocità v = 300 m/s che si muove in direzione contraria al movimento del pendolo (vedi figura) e che vi si conficca completamente. Calcolare 1) la velocità finale comune di pendolo e proiettile subito dopo l'urto e la direzione del moto; 2) la massima quota raggiunta dai due corpi dopo l'urto; 3) l'energia cinetica persa nell'urto.

$m0 := 15 \cdot gm \qquad v := 300 \cdot m \cdot sec^{-1} \qquad M := 50 \cdot kg \qquad h := 10 \cdot cm$

Durante la discesa del pendolo balistico, prima dell'urto, vale la conservazione dell'energia.
Allora, detta V la velocità del pendolo al momento dell'urto si trova:

$\frac{1}{2} \cdot M \cdot V^2 = M \cdot g \cdot h \qquad V := \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad V = 1.400 \cdot m \cdot sec^{-1}$

L'urto è completamente anelastico. Detta vf la velocità finale comune, dalla conservazione
della quantità di moto, trovo:

$M \cdot V - m0 \cdot v = (M + m0) \cdot vf \qquad vf := \frac{M \cdot V - m0 \cdot v}{M + m0} \qquad vf = 1.310 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Dato che vf ha lo stesso segno di V dopo l'urto le masse si muovono verso destra. Durante
la risalita delle due masse unite vale la conservazione dell'energia. Detta h1 la massima
quota raggiunta nella risalita trovo:

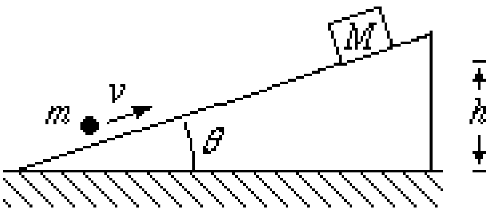
$\frac{1}{2} \cdot (M + m0) \cdot vf^2 = (M + m0) \cdot g \cdot h1 \qquad h1 := \frac{vf^2}{2 \cdot g} \qquad h1 = 8.751 \cdot cm$

L'energia cinetica perduta Wp si trova dalla differenza fra le energie W0 e W1 prima e dopo l'urto:

$W0 := M \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m0 \cdot v^2 \qquad W0 = 724.033 \cdot joule$

$W1 := (M + m0) \cdot g \cdot h1 \qquad Wp := W0 - W1 \qquad W1 = 42.921 \cdot joule$

$Wp = 681.1125 \cdot joule$



7.6 Un blocco di massa M = 4.5 kg può muoversi senza attrito lungo un piano inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo θ = 23°. Il blocco, inizialmente fermo, è lasciato libero all'istante t = 0 ad una quota h = 3.5 m. All'istante t = 1.1 s il blocco viene colpito da una pallottola di massa m = 35 g che, al momento dell'impatto si muove con velocità v = 225 m/s, parallela al piano inclinato, nella direzione della salita. Dopo l'urto la pallottola rimane conficcata nel blocco. Calcolare 1) l'energia cinetica perduta nell'urto; 2) l'istante in cui il blocco (con la pallottola conficcata) arriva alla base del piano inclinato.

$M := 4.5\cdot kg$ $\quad\theta := 23\cdot deg$ $\quad h0 := 3.5\cdot m$

$m0 := 35\cdot gm$ $\quad t0 := 1.1\cdot sec$ $\quad v := 225\cdot m\cdot sec^{-1}$

Quando il blocco e' lasciato libero sul piano inclinato, si muove parallelamente al piano di moto uniformemente acccelerato con accelerazione g sin(θ). Introducendo un asse x parallelo al piano, orientato nella direzione della salita e con l'origine alla base del piano stesso, detto x0 il punto di partenza, la sua posizione e velocità al momento dell'urto sono quindi:

$$a := -g\cdot\sin(\theta) \qquad x0 := \frac{h0}{\sin(\theta)} \qquad a = -3.832\cdot m\cdot sec^{-2}$$

$$l := x0 + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t0^2 \qquad l = 6.639\cdot m$$

$$V := a\cdot t0 \qquad x0 = 8.958\cdot m \qquad V = -4.215\cdot m\cdot sec^{-1}$$

L'urto fra la pallottola e il blocco e' un urto completamente anelastico. Dalla conservazione della quantità di moto si ricava la velocità vf del sistema blocco+pallottola subito dopo l'urto e poi, per differenza, la perdita di energia cinetica:

$$M\cdot V + m0\cdot v = (M + m0)\cdot vf \qquad vf := \frac{M\cdot V + m0\cdot v}{M + m0} \qquad vf = -2.446\cdot m\cdot sec^{-1}$$

$$Eb0 := \frac{1}{2}\cdot M\cdot V^2 \qquad Ep0 := \frac{1}{2}\cdot m0\cdot v^2 \qquad Eb0 = 39.973\cdot joule$$

$$E0 := Eb0 + Ep0 \qquad E1 := \frac{1}{2}\cdot(M + m0)\cdot vf^2 \qquad Ep0 = 885.938\cdot joule$$

$$E0 = 925.91\cdot joule$$

Dopo l'urto il blocco + pallottola continuerà nel moto uniformemente accelerato, con l'accelerazione di prima, ma a partire dalla velocità vf e dalla posizione l. Contando il tempo dall'istante dell'urto, l'equazione del moto e il tempo t1 impiegato per arrivare alla base del piano sono:

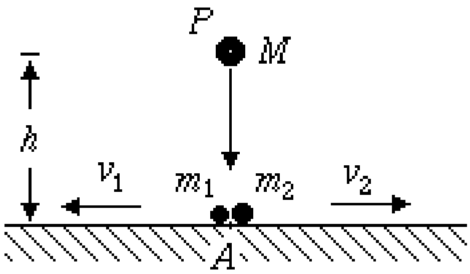
$$E1 = 13.565\cdot joule$$

$$E0 - E1 = 912.345\cdot joule$$

$$x = l + vf\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \qquad l + vf\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 = 0$$

$$t1 := \frac{-vf - \sqrt{vf^2 - 2\cdot a\cdot l}}{a} \qquad v1 := vf + a\cdot t1 \qquad t1 = 1.33\cdot sec$$

La radice negativa e' stata esclusa perche' non accettabile. $\qquad v1 = -7.541\cdot m\cdot sec^{-1}$



7.7 Una particella di massa M = 210 g è inizialmente sospesa in un punto P sulla verticale di un punto A nei pressi del quale si trova una coppia di particelle di masse m_1= 64 g e m_2= 82 g ferme su di un piano orizzontale senza attrito. La massa M viene lasciata libera e, dopo aver percorso un tratto verticale di altezza h, cade sulle due masse m_1 e m_2 e quindi si ferma in A. Dopo l'urto la massa m_1 si muove sul piano orizzontale con velocità v_1=3.35 m/s verso sinistra. Sapendo che nell'urto il 45% dell'energia cinetica iniziale viene dissipato calcolare: a) il valore e la direzione della velocità di m_2 dopo l'urto e b) l'altezza h.

$M := 210 \cdot gm$ $\qquad m1 := 64 \cdot gm$ $\qquad m2 := 82 \cdot gm$

$v1 := -3.35 \cdot m \cdot sec^{-1}$ $\qquad \eta := 0.45$

Quando avviene l'urto fra M e m1m e m2 sulle tre masse agiscono anche forze dovute al piano che sono forze esterne. Dato però che il piano è liscio, le forze da esso applicate sono solo verticali; quindi la componente orizzontale delle forze esetrneè nulla. Pertanto la componente orizzontale della quantità di moto, si conserva ed essendo nulkla prima dell'urto, è nulla anche dopo. Allora:

$m1 \cdot v1 + m2 \cdot v2 = 0$ $\qquad v2 := -\dfrac{m1 \cdot v1}{m2}$ $\qquad v2 = 2.615 \cdot m \cdot sec^{-1}$

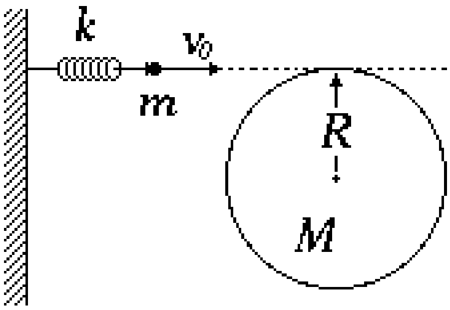
L'energia cinetica dopo l'urto E e l'energia cinetica Ei subito prima sono:

$E := \dfrac{1}{2} \cdot m1 \cdot v1^2 + \dfrac{1}{2} \cdot m2 \cdot v2^2$ $\qquad E = 0.639 \cdot joule$

$Ei := \dfrac{E}{1 - \eta}$ $\qquad Ei = 1.163 \cdot joule$

L'energia cinetica Ei è tutta dovuta all'energia potenziale gravitazionale della massa M alla partenza. Allora:

$M \cdot g \cdot h = Ei$ $\qquad h := \dfrac{Ei}{M \cdot g}$ $\qquad h = 0.565 \cdot m$



7.8 Una molla di costante elastica $k = 10^4$ N/m e massa trascurabile viene compressa per una lunghezza d = 20 cm. Al suo estremo viene appoggiato un corpo di massa m = 1 kg. Riestendendosi la molla lancia il corpo che va ad urtare tangenzialmente il bordo di un disco omogeneo di massa M = 5 kg e raggio R = 40 cm, inizialmente in quiete. Il disco può ruotare senza attrito attorno ad un asse passante per il suo centro, e non può traslare. Dopo l'urto il corpo rimbalza all'indietro nella stessa direzione d'incidenza, con velocità v = 5 m/s. Trascurando ogni effetto della forza di gravità calcolare a) la velocità v_0 con cui il corpo lascia la molla; b) la velocità angolare ω con cui il disco ruota dopo l'urto; c) la variazione di energia cinetica nell'urto.
[v_0 = 20 m/s; ω = 25 rad/s; ΔK = – 62.5 J]

$k := 10^4 \cdot newton \cdot m^{-1}$ $\quad d := 20 \cdot cm$ $\quad v1 := 5 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$M := 5 \cdot kg$ $\quad R := 40 \cdot cm$ $\quad m0 := 1 \cdot kg$

La velocità v0 impressa dalla molla si calcola dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} \cdot m0 \cdot v0^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2 \qquad v0 := d \cdot \sqrt{\frac{k}{m0}} \qquad v0 = 20 \cdot m \cdot sec^{-1}$$

La velocità angolare ω del disco dopo l'urto si trova dalla conservazione del momento angolare

$$m0 \cdot v0 \cdot R = -m0 \cdot v1 \cdot R + I \cdot \omega \qquad I := \frac{M \cdot R^2}{2} \qquad I = 0.4 \cdot kg \cdot m^2$$

$$\omega := \frac{m0 \cdot R \cdot (v0 + v1)}{I} \qquad \omega = 25 \cdot rad \cdot sec^{-1}$$

La variazione di energia cinetica è:

$$K1 := \frac{1}{2} \cdot m0 \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \qquad K0 := \frac{1}{2} \cdot m0 \cdot v0^2 \qquad K0 = 200 \cdot joule$$

$$K1 = 137.5 \cdot joule$$

$$\Delta K := K1 - K0 \qquad \Delta K = -62.5 \cdot joule$$

La variazione negativa indica che nell'urto l'energia cinetica è diminuita e che si è trattato quindi di un urto anelastico