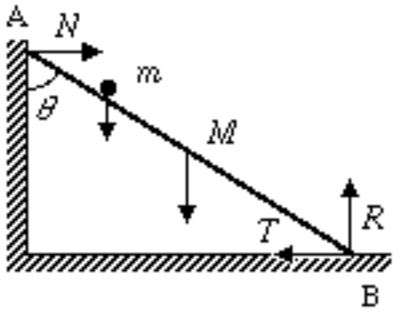


6.1 Un'asta rigida di lunghezza d e massa M = 5 kg ha l'estremo A appoggiato ad una parete verticale liscia (senza attrito) e l'altro estremo B appoggiato su un piano orizzontale ruvido (con attrito). Un corpo molto piccolo, di massa m = 400 g è fissato all'asta ad una distanza pari a $d/4$ dall'estremo A. L'asta è in equilibrio con $\theta = 60^\circ$. Calcolare le forze esercitate sulle estremità dell'asta dalla parete e dal piano orizzontale.[N = 47.56 N, T = 47.56 N, R = 52.96 N].

$M := 5\cdot kg$ $\quad$ $m0 := 400\cdot gm$ $\quad$ $\theta := 60\cdot deg$

Dato che la parete verticale è liscia, la forza applicata all'estremità A dell'asta ha solo la componente orizzontale N. Posso trovare R dalla condizione che la componente verticale della risultante deve essere nulla:

$R - m0\cdot g - M\cdot g = 0$ $\quad$ $R := (M + m0)\cdot g$ $\quad$ $R = 52.956 \cdot newton$

A questo punto ci sono due strade: 1) annullando il momento risultante rispetto a B trovo N

$$M\cdot g\cdot \frac{d}{2}\cdot \sin(\theta) + m0\cdot g\cdot \frac{3}{4}\cdot d\cdot \sin(\theta) = N\cdot d\cdot \cos(\theta)$$

$$N = \frac{\frac{1}{2}\cdot M\cdot g\cdot \sin(\theta) + \frac{3}{4}\cdot m0\cdot g\cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad N := \frac{1}{4}\cdot g\cdot \tan(\theta)\cdot (2\cdot M + 3\cdot m0)$$

e annullando la componente orizzontale della risultante

$N - T = 0$ $\quad$ $T := N$ $\quad$ $N = 47.56 \cdot newton$ $\quad$ $T = 47.56 \cdot newton$

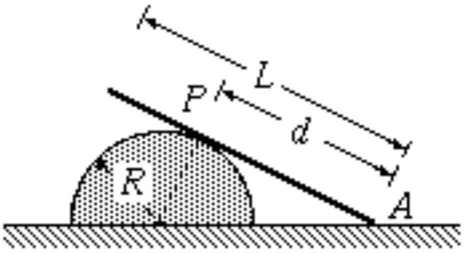
In alternativa: 2) trovo T scegliendo il polo in A

$$m0\cdot g\cdot \frac{d}{4}\cdot \sin(\theta) + M\cdot g\cdot \frac{d}{2}\cdot \sin(\theta) + T\cdot d\cdot \cos(\theta) = R\cdot d\cdot \sin(\theta)$$

$$T = \frac{R\cdot \sin(\theta) - \frac{1}{4}\cdot m0\cdot g\cdot \sin(\theta) + \frac{1}{2}\cdot M\cdot g\cdot \sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

$$T := \frac{1}{4}\cdot \tan(\theta)\cdot (4\cdot R - m0\cdot g - 2\cdot M\cdot g) \qquad T = 47.56 \cdot newton$$

e poi N ancora dalla T=N.



6.2 Un'asta rigida rettilinea di lunghezza L = 80 cm e di massa M = 4.2 kg, è appoggiata con l'estremità A su un piano orizzontale ruvido (con attrito) e poggia con un suo punto P su una calotta semisferica liscia (senza attrito) di raggio R = 30 cm, posta sul piano e fissa con esso. Sapendo che l'asta è in equilibrio con il punto di contatto P ad una distanza d = 65 cm dall'estremità A, calcolare modulo direzione e verso delle forze $\boldsymbol{F}_A$ e $\boldsymbol{F}_P$ esercitate dall'asta sul piano e sulla calotta. [$\boldsymbol{F}_A = -9.64\boldsymbol{i} - 20.29\boldsymbol{j}$ N, $\boldsymbol{F}_P = 9.64\,\boldsymbol{i} - 20.90\,\boldsymbol{j}$ N, con y diretto verso l'alto e x verso destra]

$L := 80\cdot cm$ $R := 30\cdot cm$ $M := 4.2\cdot kg$ $d := 65\cdot cm$

Calcolo innanzitutto l'inclinazione θ della sbarra rispetto al piano

$\theta := \operatorname{atan}\left(\frac{R}{d}\right)$ $\theta = 24.775\cdot deg$

Chiamo N e F le forze esercitate sull'asta dalla calotta e dal piano. Dato che il contatto in P fra asta e calotta è senza attrito, N è perpendicolare all'asta. Essendo invece il contatto in A scabro, F avrà componenti sia orizzontale che verticali Fx e Fy. Introduco un sistema di riferimento con l'asse y diretto verso l'alto e l'asse x diretto a destra. Annullando le due componenti della risultante e il momento rispetto ad A trovo:

$N\cdot \sin(\theta) + Fx = 0$ $N\cdot \cos(\theta) - M\cdot g + Fy = 0$

$M\cdot g\cdot \frac{L}{2}\cdot \cos(\theta) - N\cdot d = 0$

Per risolvere ricavo N dalla terza e lo sostituisco nelle altre due:

$N := \frac{M\cdot g\cdot L\cdot \cos(\theta)}{2\cdot d}$ $Ny := N\cdot \cos(\theta)$ $N = 23.014\cdot kg\cdot m\cdot sec^{-2}$

$Fx := -N\cdot \sin(\theta)$ $Ny = 20.895\cdot newton$ $Fx = -9.644\cdot newton$

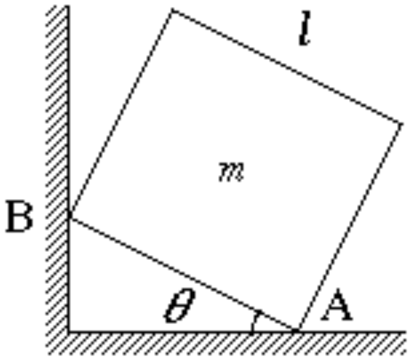
$Fy := M\cdot g - N\cdot \cos(\theta)$ $Fy = 20.293\cdot newton$

Ora calcolo modulo e inclinazione α di F rispetto alla direzione positiva dell'asse x:

$F := \sqrt{Fx^2 + Fy^2}$ $\alpha := \pi - \operatorname{atan}\left(\left|\frac{Fy}{Fx}\right|\right)$ $F = 22.468\cdot newton$

$\alpha = 115.419\cdot deg$

N e' perpendicolare alla superficie della calotta. Le forze esercitate dall'asta sul piano e sulla calotta sono –F e –N.



6.3 Un cubo di massa m = 0.66 kg e lato l = 16 cm è in equilibrio con due spigoli appoggiati ad una parete verticale e ad un piano orizzontale rispettivamente e con la faccia inferiore che forma un angolo θ col piano d'appoggio. Nel punto A il coefficiente di attrito statico è μ_s = 0.23 mentre nel punto B il contatto è privo di attrito. Determinare i valori massimi e minimi che può assumere l'angolo θ in posizione di equilibrio.[θ_{min} = 34.4°; θ_{max} = 45°]

$M := 0.66 \cdot kg$ $\quad l := 16 \cdot cm$ $\quad \mu s := 0.23$

Dato che in B non c'è attrito la forza in B sul blocco ha solo componente orizzontale Fb. In A abbiamo la forza di attrito statico Fs che è diretta verso sx e la forza normale Fa diretta verso l'alto. Innanzitutto trovo Fa e Fb imponendo che siano nulle le componenti della risultante:

$Fa - M \cdot g = 0$ $\quad Fa := M \cdot g$

$Fb - Fs = 0$ $\quad Fs = \mu s \cdot Fa$ $\quad Fa = 6.472 \cdot newton$

$Fb - \mu s \cdot M \cdot g = 0$ $\quad Fb := \mu s \cdot M \cdot g$ $\quad Fb = 1.489 \cdot newton$

Per trovare il valore minimo di θ impongo che sia nullo il momento risultante rispetto ad A

$$Fb \cdot l \cdot \sin(\theta) - M \cdot g \cdot d \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos(\theta) - \sin(\theta)) \qquad d := l \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad d = 11.314 \cdot cm$$

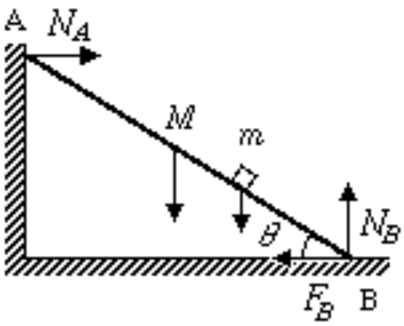
$$Fb \cdot l \cdot \sin(\theta) - \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l \cdot (\cos(\theta) - \sin(\theta)) = 0$$

Per risolvere divido per cos(θ) e trovo

$$Fb \cdot l \cdot \tan(\theta) - \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l + \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l \cdot \tan(\theta) = 0$$

$$\tan(\theta) = \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l}{Fb \cdot l + \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l} \qquad \theta := \operatorname{atan}\left[\frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l}{Fb \cdot l + \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l}\right] \qquad \theta = 34.408 \cdot deg$$

Il valore massimo di θ è 45°. Infatti solo per θ<45° la forza peso e la forza in B possono avere momenti opposti rispetto ad A.



6.4 Un'asta di acciaio rigida, omogenea, di densità ρ = 7860 kg/m^3, sezione S = 10 cm^2 e lunghezza l = 75 cm ha un estremo A appoggiato ad una parete verticale liscia (senza attrito) e l'altro estremo B appoggiato ad un piano orizzontale ruvido (con attrito) e forma in B un angolo θ con il piano orizzontale. Un blocco di massa m = 285 g è appoggiato sull'asta, ad una distanza d = 50 cm dall'estremo A. Si verifica sperimentalmente che, se l'angolo θ è troppo grande, la massa m scivola lungo l'asta, mentre se θ è troppo piccolo l'estremità B dell'asta scivola sul piano. Sapendo che i coefficienti di attrito statico fra il blocco e l'asta e fra l'asta e il piano sono μ_s = 0.88 e μ_{1s} = 0.67 rispettivamente, calcolare 1) il minimo e il massimo valore di θ per cui il sistema costituito dai due corpi rimane in equilibrio e 2) il valore F_B della forza d'attrito in B nei due casi.

$l := 75 \cdot cm$ $\qquad \rho := 7860 \cdot kg \cdot m^{-3}$ $\qquad S := 10 \cdot cm^2$

$m0 := 285 \cdot gm$ $\qquad d := 50 \cdot cm$ $\qquad \mu s := 0.88$

$\mu 1s := 0.67$

Dato che i due corpi possono muoversi uno rispetto all'altro, devo considerare separatamente l'equilibrio di ciascuno di essi, tenendo conto anche delle forze esercitate su ciascun corpo dall'altro.In corrispondenza del massimo valore di θ il blocco m0 e' in equilibrio grazie alla massima forza di attrito statico Fs. In queste condizioni l'equilibrio di m0 richiede che:

$N - m0 \cdot g \cdot \cos(\theta) = 0$ $\qquad Fs - m0 \cdot g \cdot \sin(\theta) = 0$ $\qquad Fs = \mu s \cdot N$

$\theta := \mathrm{atan}(\mu s)$ $\qquad \theta = 0.722 \cdot rad$ $\qquad \theta = 41.348 \cdot deg$

$N := m0 \cdot g \cdot \cos(\theta)$ $\qquad N = 2.098 \cdot newton$

$Fs := m0 \cdot g \cdot \sin(\theta)$ $\qquad Fs = 1.846 \cdot newton$

Verifichiamo ora se per il valore di q trovato l'asta scivola sul piano. Considero il sistema asta + blocco come un unico corpo e impongo le condizioni di equilibrio tenendo conto solamente delle forze esterne. Allora, detta M la massa dell'asta e Fa la forza di attrito statico fra asta e piano nel punto A necessaria per l'equilibrio, annullando le due componenti della risultante e del momento delle forze rispetto a B si ottiene:

$M := \rho \cdot S \cdot l$ $\qquad M = 5.895 \cdot kg$

$Na - Fb = 0$ $\qquad m0 \cdot g + M \cdot g = Nb$

$$Na \cdot l \cdot \sin(\theta) - M \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos(\theta) - m0 \cdot g \cdot (l - d) \cdot \cos(\theta) = 0$$

Abbiamo allora tre equazioni nelle tre incognite Na, Nb e Fb. Risolvendo:

$Nb := m0 \cdot g + M \cdot g$ $\qquad Nb = 60.605 \cdot newton$

$$Na := \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) + m0 \cdot g \cdot \cos(\theta) \cdot (l - d)}{l \cdot \sin(\theta)}$$ $\qquad Na = 33.905 \cdot newton$

$Fb := Na$ $\qquad Fb = 33.905 \cdot newton$

Dato che risulta per la massima forza di attrito statico in B

$Fbmax := Nb \cdot \mu 1s$ $\qquad Fbmax = 40.605 \cdot newton$

si deduce che la forza di attrito Fb necessaria per mantenere l'equilibrio è minore
di Fbmax e quindi per il valore di θ trovato l'asta non scivola sul piano. Abbiamo quindi:

$\theta max := \theta$ $\qquad \theta max = 0.722 \cdot rad$ $\qquad \theta max = 41.348 \cdot deg$

Viceversa il valore minimo di θ affinchè non scivoli sarà quello per cui

$Fb := \mu 1s \cdot Nb$ $\qquad Fb = 40.605 \cdot newton$

Inserisco questa condizione nelle equazioni di prima e risolvo rispetto a θ. Allora:

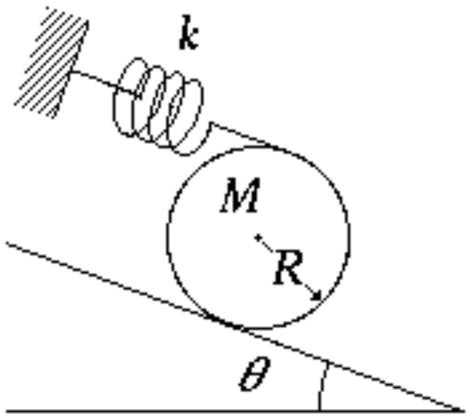
$Na := Fb$ $\qquad Na = 40.605 \cdot newton$

Dividendo l'equazione dei momenti per cos(θ) ottengo

$$Na \cdot l \cdot \tan(\theta) - M \cdot g \cdot \frac{l}{2} - m0 \cdot g \cdot (l - d) = 0 \qquad \tan(\theta) = \frac{M \cdot g \cdot \frac{l}{2} + m0 \cdot g \cdot (l - d)}{Na \cdot l}$$

$$\theta := \operatorname{atan}\left[\frac{M \cdot g \cdot \frac{l}{2} + m0 \cdot g \cdot (l - d)}{Na \cdot l}\right]$$ $\qquad \theta = 0.634 \cdot rad$ $\qquad \theta = 36.308 \cdot deg$

Essendo questo angolo minore del precedente, con questa inclinazione il blocco rimane appoggiato
sull'asta senza scivolare. Allora il valore trovato coincide con il valore minimo di θ richiesto.



6.6 Una sfera di massa $M = 3.5$ kg e raggio $R = 12$ cm è posta su un piano inclinato con inclinazione $\theta = 22^\circ$ rispetto all'orizzontale. La sfera è mantenuta in equilibrio dalla forza di attrito sul piano e da una molla di costante elastica $k = 80$ N/m che agisce tangenzialmente sulla sua superficie, in direzione parallela al piano inclinato. Determinare a) l'allungamento x della molla rispetto alla posizione di riposo; b) il modulo della forza d'attrito statico F_s che si esercita fra la sfera e il piano. Successivamente la molla viene rimossa e la sfera inizia da ferma a rotolare senza strisciare sul piano inclinato. Determinare c) la velocità del suo centro di massa dopo che ha percorso esattamente tre giri. [$x = 0.08$ m; $\mu_s = 0.20$; $v = 3.44$ m/s]

$M := 3.5 \cdot kg$ $\qquad \theta := 22 \cdot deg$ $\qquad R := 0.12 \cdot m$ $\qquad k := 80 \cdot newton \cdot m^{-1}$

Scompongo la forza esercitata sulla sfera dal piano nelle due componenti N, perpendicolare al piano e Fs, tangenziale. All'equilibrio sono nulle le componenti parallela e perpendicolare della risultante e i momenti rispetto al centro di massa:

$M \cdot g \cdot \sin(\theta) - k \cdot x - Fs = 0$ $\qquad M \cdot g \cdot \cos(\theta) - N = 0$ $\qquad k \cdot x \cdot R - Fs \cdot R = 0$

Dalla prima di queste relazioni si ricava:

$N := M \cdot g \cdot \cos(\theta)$ $\qquad N = 31.824 \cdot newton$

Dalla seconda e dalla terza invece ottengo

$Fs = k \cdot x$ $\qquad M \cdot g \cdot \sin(\theta) - 2 \cdot k \cdot x = 0$

da cui ricavo x e Fs

$x := \frac{1}{2} \cdot M \cdot g \cdot \frac{\sin(\theta)}{k}$ $\qquad Fs := k \cdot x$ $\qquad x = 8.036 \cdot 10^{-2} \cdot m$

$Fs = 6.429 \cdot newton$

Quando la molla viene staccata la sfera rotola lungo il piano partendo da ferma. Detta d la distanza percorsa lungo il piano dal centro di massa dopo tre giri e h la quota corrispondente, e v la velocità del centro di massa, dalla conservazione del'energia ricavo:

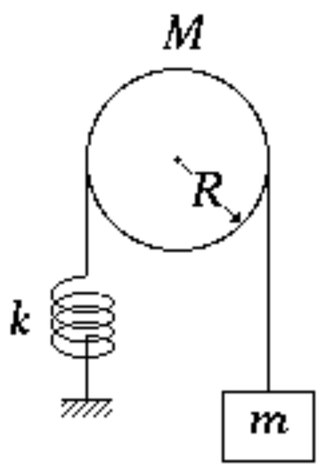
$d := 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$ $\qquad h := d \cdot \sin(\theta)$ $\qquad d = 2.262 \cdot m$

$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 = M \cdot g \cdot h$ $\qquad I := \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$ $\qquad \omega = \frac{v}{R}$ $\qquad h = 0.847 \cdot m$

$\frac{1}{2} \cdot I \cdot \frac{v^2}{R^2} + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 = M \cdot g \cdot h$ $\qquad \frac{7}{10} \cdot M \cdot v^2 = M \cdot g \cdot h$ $\qquad I = 2.016 \cdot 10^{-2} \cdot kg \cdot m^2$

$v := \sqrt{\frac{10}{7} \cdot g \cdot h}$ $\qquad \omega := \frac{v}{R}$ $\qquad v = 3.445 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$\omega = 28.712 \cdot rad \cdot sec^{-1}$



6.7 Una puleggia è costituita da un disco omogeneo di massa $M = 1.4$ kg e raggio $R = 10$ cm. Sulla puleggia scorre senza strisciare una corda a cui è appesa una massa $m = 5$ kg; l'altro estremo della corda è fissato ad una molla di costante elastica $k = 230$ N/m. Inizialmente la molla è nella sua posizione di riposo e la massa m è mantenuta ferma e sospesa. All'istante $t = 0$ la massa m è lasciata libera e inizia a cadere. Determinare la massima estensione h raggiunta dalla molla e la massima velocità angolare ω raggiunta dal disco durante la caduta. [h = 0.43 m, ω = 13.54 rad/s]

$M := 1.4 \cdot kg$ $\qquad g = 9.807 \cdot m \cdot sec^{-2}$ $\qquad R := 0.1 \cdot m$

$ma := 5 \cdot kg$ $\qquad k := 230 \cdot newton \cdot m^{-1}$

Per risolvere il problema Ë conveniente l'approccio energetico. Dato che tutte le forze sono conservative, vale la conservazione dell'energia. Detta x l'estensione della molla in un istante qualsiasi del moto posso scrivere:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot ma \cdot v^2 + ma \cdot g \cdot (h - x) = E$$

dove x è l'estensione della molla rispetto alla posizione a riposo e lo zero dell'energia potenziale è scelto in corrispondenza della massima estensione h della molla. Abbiamo inoltre:

$v = \omega \cdot R$ $\qquad E = ma \cdot g \cdot h$ $\qquad I := \frac{M \cdot R^2}{2}$ $\qquad I = 7.00 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2$

sostituendo trovo la seguente relazione da cui ricavo h:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} \cdot ma \cdot (\omega \cdot R)^2 + ma \cdot g \cdot (h - x) = ma \cdot g \cdot h$$

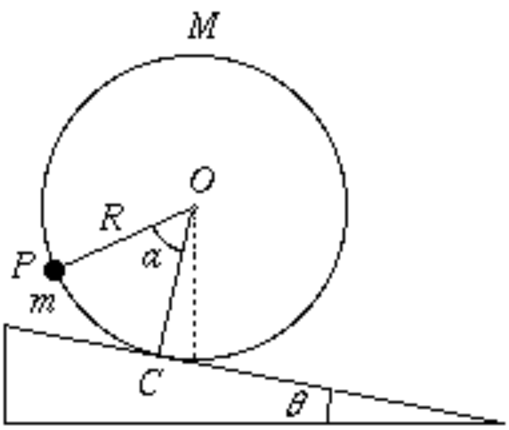
$\frac{1}{2} \cdot k \cdot h^2 = ma \cdot g \cdot h$ $\qquad h := \frac{2 \cdot ma \cdot g}{k}$ $\qquad h = 0.426 \cdot m$

Dalla relazione precedente si può anche ricavare la velocità angolare in funzione della posizione x. Ponendo a zero la derivata rispetto a x trovo la posizione xmax in cui la velocità angolare è massima:

$$\omega(x) := \sqrt{\frac{2 \cdot ma \cdot g \cdot x - k \cdot x^2}{I + ma \cdot R^2}} \qquad \frac{d}{dx}\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{I + ma \cdot R^2}} \cdot \frac{2 \cdot ma \cdot g - 2 \cdot k \cdot x}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot ma \cdot g \cdot x - k \cdot x^2}}$$

$2 \cdot ma \cdot g - 2 \cdot k \cdot xmax = 0$ $\qquad xmax := \frac{ma \cdot g}{k}$ $\qquad xmax = 0.213 \cdot m$

e il valore di ω corrispondente è: $\qquad \omega(xmax) = 13.542 \cdot rad \cdot sec^{-1}$



6.7 Su un piano inclinato ruvido (con attrito) inclinato di un angolo $\theta = 6^\circ$ rispetto all'orizzontale è posto un cilindro di raggio R = 15 cm e massa M = 100 g. In un punto P del bordo del cilindro è fissata una massa puntiforme m = 25 g che, col suo peso, mantiene il cilindro immobile in equilibrio sul piano inclinato. Detto α l'angolo fra il raggio che passa per il punto P e il raggio che passa per il punto di contatto C, calcolare 1) tutti i valori che può assumere l'angolo α quando il cilindro è in equilibrio e 2) modulo, direzione e verso della forza esercitata dal piano sul cilindro nel punto di contatto C in corrispondenza di tutte le situazioni di equilibrio.

$\theta := 6 \cdot deg$ $\quad$ $R := 15 \cdot cm$ $\quad$ $m0 := 25 \cdot gm$ $\quad$ $M := 100 \cdot gm$

Per trovare l'angolo α uguaglio i momenti rispetto al punto di contatto C

$$M \cdot g \cdot R \cdot \sin(\theta) = m0 \cdot g \cdot R \cdot (\sin(\alpha + \theta) - \sin(\theta)) \qquad \sin(\alpha + \theta) = \frac{M + m0}{m0} \cdot \sin(\theta)$$

Questa equazione ha due soluzioni α1 e α2:

$$\alpha1 + \theta = \operatorname{asin}\left(\frac{M + m0}{m0} \cdot \sin(\theta)\right) \qquad \alpha2 + \theta = \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{M + m0}{m0} \cdot \sin(\theta)\right)$$

$$\alpha1 := \operatorname{asin}\left(\frac{M + m0}{m0} \cdot \sin(\theta)\right) - \theta \qquad \alpha2 := \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{M + m0}{m0} \cdot \sin(\theta)\right) - \theta \qquad \alpha1 = 25.51 \cdot deg$$

$$\alpha2 = 142.49 \cdot deg$$

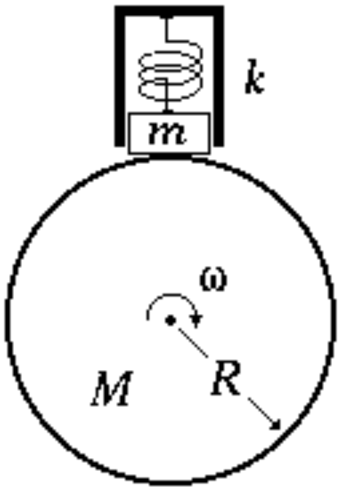
Questi due angoli corrispondono a due posizioni di m, tutte e due lungo la stessa verticale.
Annullando la risultante trovo la forza applicata al disco nel punto di contatto F

$$F = m0 \cdot g + M \cdot g \qquad F := (M + m0) \cdot g \qquad F = 1.226 \cdot newton$$

$$F \cdot \sin(\theta) = 0.128 \cdot newton$$

che è diretta ovviamente verso l'alto.

$$F \cdot \cos(\theta) = 1.219 \cdot newton$$



6.8 Un volano, costituito da un disco di rame con raggio R = 32 cm e massa M = 348 kg è in rotazione con velocità angolare ω = 376 rad/s attorno ad un asse fisso perpendicolare al disco e passante per il suo centro. Per fermare il volano viene azionato un freno che consiste in un blocco pure di rame di massa m = 5 kg che viene spinto verticalmente dall'alto sul disco da una molla di costante elastica $k = 8.61 \times 10^4$ N/m compressa di una quantità x = 6 cm. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e disco è $\mu_k = 0.12$, calcolare 1) quanti giri compie il volano prima di fermarsi. Supponendo inoltre che tutta l'energia dissipata vada a scaldare uniformemente sia il blocco che il volano, calcolare 2) l'aumento di temperatura.

$\mu k := 0.12$ $\quad c := 387 \cdot joule \cdot kg^{-1} \cdot C^{-1}$ $\quad m0 := 5 \cdot kg$

$M := 348 \cdot kg$ $\quad R := 32 \cdot cm$ $\quad x := 6 \cdot cm$

$\omega 0 := 376 \cdot rad \cdot sec^{-1}$ $\quad k := 8.61 \cdot 10^4 \cdot newton \cdot m^{-1}$

Il momento angolare e l'energia cinetica del volano in rotazione sono:

$$I := \frac{M \cdot R^2}{2} \qquad L := I \cdot \omega 0$$

$$E := \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega 0^2$$

$I = 17.818 \cdot kg \cdot m^2$

$L = 6699.418 \cdot kg \cdot m^2 \cdot sec^{-1}$

$E = 1.259 \cdot 10^6 \cdot joule$

La forza d'attrito del freno e il suo momento sono

$$F := \mu k \cdot (m0 \cdot g + k \cdot x) \qquad \tau := F \cdot R$$

$F = 625.804 \cdot newton$

$\tau = 200.257 \cdot newton \cdot m$

$m0 \cdot g = 49.033 \cdot newton$

Metodo 1: il volano si ferma quando il lavoro della forza d'attrito ha azzerato l'energia cinetica. Detto θ l'angolo di frenata

$$\tau \cdot \theta = E \qquad \theta := \frac{E}{\tau} \qquad N := \frac{\theta}{2 \cdot \pi}$$

$\theta = 6289.362 \cdot rad$

$N = 1000.983$

Metodo 2: determino l'istante in cui la velocità angolare è nulla:

$$\alpha := \frac{\tau}{I} \qquad \omega 0 - \alpha \cdot t = 0$$

$$t := \frac{\omega 0}{\alpha} \qquad \theta := \omega 0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \qquad N := \frac{\theta}{2 \cdot \pi}$$

$\alpha = 11.239 \cdot sec^{-2}$

$t = 33.454 \cdot sec$

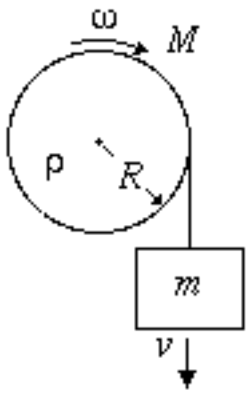
$\theta = 6289.362$

$N = 1000.983$

Quando il volano si ferma tutta l'energia cinetica e' trasformata in energia termica. Detto c il calore specifico del rame (pag.274)

$$c = \frac{E}{(M + m0) \cdot \Delta T} \qquad \Delta T := \frac{E}{c \cdot (M + m0)}$$

$\Delta T = 9.22 \cdot C$



6.9 Un blocco di massa m = 0.35 kg è appeso ad un filo di massa trascurabile avvolto intorno al bordo di un disco di raggio R = 15 cm e di spessore d = 5 cm, costituito da un materiale con densità $\rho = 2.7 \times 10^3$ kg/m^3. Il disco può ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale che passa per il suo centro di massa. Il filo è fissato ad un piccolo dente ricavato sul bordo del disco in modo da sganciarsi dal disco dopo che si è srotolato completamente. Inizialmente la massa è tenuta ferma con il filo teso e arrotolato sul bordo del disco per una lunghezza l = 12 m. All'istante t = 0 la massa viene lasciata libera. Calcolare 1) la velocità angolare del disco nell'istante in cui il filo si sgancia e 2) la velocità del blocco all'istante t_1 = 9 s.

$m0 := 350 \cdot gm$ $\quad R := 15 \cdot cm$ $\quad d := 5 \cdot cm$

$\rho := 2.7 \cdot 10^3 \cdot kg \cdot m^{-3}$ $\quad l := 12 \cdot m$ $\quad t1 := 9 \cdot sec$

Calcoliamo prima di tutto la massa e il momento d'inerzia del disco:

$V := \pi \cdot R^2 \cdot d$ $\quad M := \rho \cdot V$ $\quad V = 3.534 \cdot 10^{-3} \cdot m^3$

$I := \frac{1}{2} \cdot M \cdot R^2$ $\quad M = 9.543 \cdot kg$

$I = 0.107 \cdot kg \cdot m^2$

Nella prima fase della caduta, mentre il filo si srotola la masse cade con moto uniformemente accelerato con accelerazione:

$a := g \cdot \frac{2 \cdot m0}{M + 2 \cdot m0}$ $\quad a = 0.670 \cdot m \cdot sec^{-2}$

Questo moto continua fino a che il filo non si e' srotolato completamente e cioè fino a quando la massa ha percorso la distanza l. Dalle formule del moto uniformemente accelerato ricavo la distanza percorsa e la velocità della massa in funzione del tempo:

$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ $\quad v = a \cdot t$

ponendo x=l trovo l'istante t0 nel quale il filo si sgancia e poi le velocità periferica e angolare della massa corrispondente

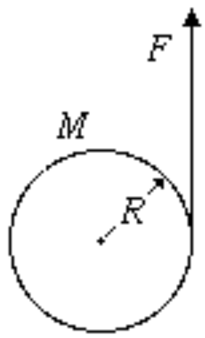
$t0 := \sqrt{\frac{2 \cdot l}{a}}$ $\quad v0 := a \cdot t0$ $\quad \omega0 := \frac{v0}{R}$ $\quad t0 = 5.984 \cdot sec$

$v0 = 4.011 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Dopo che il filo si è sganciato il blocco continua a cadere con accelerazione g. La sua velocità all'istante t1 sarà quindi:

$\omega0 = 26.737 \cdot rad \cdot sec^{-1}$

$v1 := v0 + g \cdot (t1 - t0)$ $\quad v1 = 33.586 \cdot m \cdot sec^{-1}$



6.10 Uno yo-yo è costituito da un disco omogeneo di massa M = 700 g e raggio R = 8 cm con una cordicella di massa trascurabile avvolta sul bordo. A partire dall'istante t = 0 il disco viene lasciato libero di cadere e simultaneamente l'estremità superiore della cordicella viene tirata verso l'alto esercitando una forza costante F = 7.2 N. Calcolare a) i valori della velocità del centro di massa e della velocità angolare del disco all'istante t = 1.5 s, indicando se esso si muove verso l'alto o verso il basso. Calcolare inoltre b) il valore della forza F_1 necessaria per mantenere sospeso il disco in rotazione col centro di massa immobile

---

$M := 700 \cdot gm$ $\qquad R := 8 \cdot cm$

$t0 := 1.5 \cdot sec$ $\qquad F := 7.2 \cdot newton$

Il disco è un corpo rigido sottoposto alla forza di gravità e alla forza F che la cordicella trasmette sul bordo.Le equazioni del moto sono

$M \cdot a = F - M \cdot g$ $\qquad F \cdot R = I \cdot \alpha$ $\qquad I := \frac{M \cdot R^2}{2}$ $\qquad I = 2.24 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2$

$a := \frac{F - M \cdot g}{M}$ $\qquad \alpha := \frac{F \cdot R}{I}$ $\qquad a = 0.479 \cdot m \cdot sec^{-2}$

$\alpha = 257.143 \cdot sec^{-2}$

La velocità del cm e la velocità angolare a t0 sono:

$v := a \cdot t0$ $\qquad \omega := \alpha \cdot t0$ $\qquad v = 0.719 \cdot m \cdot sec^{-1}$

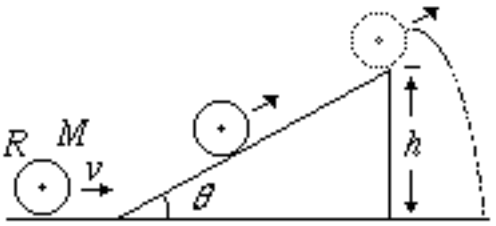
$\omega = 385.714 \cdot sec^{-1}$

Per mantenere il disco sospeso col CM immobile dovra' essere nulla la risultante delle forze. Si trova:

$F1 := M \cdot g$ $\qquad \alpha 1 := \frac{F1 \cdot R}{I}$ $\qquad F1 = 6.865 \cdot newton$

$\omega 1 := \alpha 1 \cdot t0$ $\qquad \alpha 1 = 245.166 \cdot sec^{-2}$

$\omega 1 = 367.749 \cdot sec^{-1}$



6.11 Una sfera di massa M = 3 kg e raggio R = 10 cm è lanciata lungo un tratto piano che si raccorda ad una rampa rettilinea inclinata rispetto all'orizzontale di un angolo θ = 15° e che termina bruscamente dopo un dislivello h = 50 cm. Durante il percorso piano iniziale la sfera rotola senza strisciare col centro di massa che si muove a velocità costante v = 2.7 m/s. Dopo aver percorso tutta la rampa la sfera cade nel vuoto fino a toccare nuovamente il suolo alla quota iniziale. Calcolare a) la velocità angolare della sfera al momento in cui raggiunge la fine della rampa; b) la posizione del punto d'impatto al suolo.

$M := 3 \cdot kg$ $\quad R := 10 \cdot cm$ $\quad v1 := 2.7 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$h := 50 \cdot cm$ $\quad \theta := 15 \cdot deg$

Per calcolare la velocità v2 alla fine della rampa applico la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} \cdot M \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega1^2 = M \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v2^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega2^2 \qquad I := \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$$

Dalla condizione di puro rotolamento risulta:

$$\omega1 = \frac{v1}{R} \qquad v2 = \omega2 \cdot R$$

Sostituendo nella precedente relazione e ricavando ω2 si trova:

$$\frac{7}{10} \cdot M \cdot v1^2 = M \cdot g \cdot h + \frac{7}{10} \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega2^2 \qquad I = 1.200 \cdot 10^{-2} \cdot kg \cdot m^2$$

$$\omega2 := \sqrt{\frac{\frac{7}{10} \cdot M \cdot v1^2 - M \cdot g \cdot h}{\frac{7}{10} \cdot M \cdot R^2}} \qquad \omega2 = 5.341 \cdot rad \cdot sec^{-1}$$

Giunta alla fine della rampa la sfera cade nel vuoto continuando a ruotare con velocità ω2. Il suo centro di massa segue le leggi del moto dei proiettili. Scegliendo un sistema di riferimento con l' asse x al suolo e l'asse y che passa per la fine della rampa, le posizioni iniziali e le componenti della velocità iniziali sono:

$x0 := 0 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$v0 := \omega2 \cdot R$ $\quad y0 := h$ $\quad v0 = 0.534 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$v0x := v0 \cdot \cos(\theta)$ $\quad v0y := v0 \cdot \sin(\theta)$ $\quad v0y = 0.138 \cdot m \cdot sec^{-1}$

le leggi del moto sono:

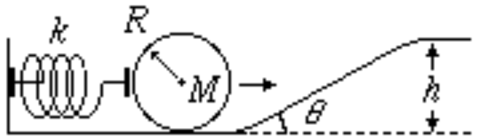
$$y = y0 + v0y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad x = x0 + v0x \cdot t$$

Ponendo y=0 dalla prima ricavo il tempo di volo t (la soluzione positiva)

$$y0 + v0y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \qquad t := \frac{v0y + \sqrt{v0y^2 + 2 \cdot g \cdot y0}}{g} \qquad t = 0.334 \cdot sec$$

e sostituendo nella seconda trovo lo spazio percorso in direzione x dal CM.

$x := v0x \cdot t$ $\quad x = 0.172 \cdot m$



6.11 Una sfera di massa M = 2 kg e raggio R = 10 cm rotola su un piano orizzontale spinta da una molla ideale di costante elastica k = 800 N/m. Inizialmente la sfera è ferma e la lunghezza di compressione della molla è d = 12.5 cm. Dopo che si è staccata dalla molla, la sfera comincia a salire una rampa di dislivello h = 20 cm, inclinata di un angolo θ = 25° rispetto all'orizzontale. Sapendo che prima che la sfera si stacchi dalla molla, a causa dell'attrito nel punto di contatto, viene dissipata un'energia E_d = 0.75 J, e che durante tutto il percorso la sfera rotola senza strisciare, calcolare 1) la velocità angolare della sfera dopo che questa ha superato la rampa e 2) il tempo necessario per percorrere il tratto inclinato.

$M := 2 \cdot kg$ $\quad R := 10 \cdot cm$ $\quad h := 20 \cdot cm$

$k := 800 \cdot newton \cdot m^{-1}$ $\quad d := 12.5 \cdot cm$

$Ed := 0.75 \cdot joule$ $\quad \theta := 25 \cdot deg$

La prima domanda si risolve con la conservazione dell'energia. L'energia meccanica E dopo che la sfera si e' staccata e':

$Ek := \frac{1}{2} \cdot k \cdot d^2$ $\quad E := Ek - Ed$ $\quad Ek = 6.25 \cdot joule$

$E = 5.5 \cdot joule$

Dalla conservazione dell'energia trovo la velocità del centro di massa v0 appena lasciata la molla

$E = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v0^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega 0^2$ $\quad \omega 0 = \frac{v0}{R}$ $\quad I := \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$ $\quad I = 8 \cdot 10^{-3} \cdot kg \cdot m^2$

$E = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2 \cdot \left(\frac{v0}{R}\right)^2$

$E = \frac{7}{10} \cdot M \cdot v0^2$ $\quad v0 := \sqrt{\frac{10}{7} \cdot \frac{E}{M}}$ $\quad v0 = 1.982 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Quando la sfera e' salita sulla rampa, la conservazione dell'energia si scrive

$E = M \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v1^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega 1^2$ $\quad v1 = \omega 1 \cdot R$

$E = M \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega 1^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2 \cdot \omega 1^2$ $\quad E = M \cdot g \cdot h + \frac{7}{10} \cdot M \cdot \omega 1^2 \cdot R^2$

$\omega 1 := \sqrt{\frac{10}{7} \cdot \frac{(E - M \cdot g \cdot h)}{M \cdot R^2}}$ $\quad \omega 1 = 10.614 \cdot sec^{-1}$

Per calcolare il tempo di percorrenza della rampa occorre ricavare la legge del moto per il centro di massa. Dalla teoria risulta che l'accelerazione del centro di massa di una sfera che rotola su un piano inclinato e'indipendente dal fatto che la sfera scende o sale e, prendendo positiva la direzione della salita, vale:

$$a := -g\cdot\sin(\theta)\cdot\frac{1}{1+\frac{I}{M\cdot R^2}} \qquad a = -2.96\cdot m\cdot sec^{-2}$$

il moto del centro di massa e' uniformemente accelerato con velocità iniziale v0.Allora lo spazio percorso e'

$$x = v0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

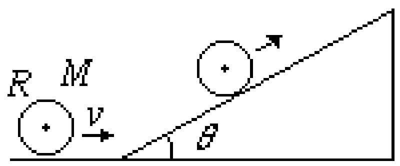
detta l la lunghezza del tratto inclinato, si trova il tempo t dalle:

$$l := \frac{h}{\sin(\theta)} \qquad l = v0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2 \qquad l = 0.473\cdot m$$

$$t1 := -\frac{v0 - \sqrt{v0^2 + 2\cdot a\cdot l}}{a} \qquad t1 = 0.311\cdot sec$$

$$t2 := -\frac{v0 + \sqrt{v0^2 + 2\cdot a\cdot l}}{a} \qquad t2 = 1.028\cdot sec$$

Dei due valori trovati, solo il primo e' accettabile, l'altro rappresenta il tempo nel quale una sfera che salisse un piano inclinato molto lungo tornerebbe indietro a passare una seconda volta per la quota h.



6.12 Un disco di spessore $d = 5$ cm e una sfera, entrambi di rame, hanno uguale massa $M = 12$ kg e sono fatti inizialmente rotolare lungo un piano orizzontale con velocità angolari $\omega_d = 14$ rad/s e $\omega_s = 24$ rad/s rispettivamente. Ad un certo punto il piano orizzontale si raccorda dolcemente con una rampa rettilinea inclinata di un' angolo $\theta = 13°$ rispetto all'orizzontale e i due corpi vi salgono continuando a rotolare. Se si individua la posizione dei corpi mediante la distanza fra il punto di contatto e l'inizio della rampa, calcolare 1) per ciascuno dei due corpi la massima distanza percorsa sulla rampa prima di invertire il moto; 2) la velocità del centro di massa del corpo che raggiunge la quota maggiore all'istante in cui passa nella posizione corrispondente alla massima quota raggiunta dall'altro.

$M := 12 \cdot kg$ $\qquad \rho := 8.96 \cdot 10^3 \cdot kg \cdot m^{-3}$ $\qquad \theta := 13 \cdot deg$

$\omega d := 14 \cdot rad \cdot sec^{-1}$ $\qquad \omega s := 24 \cdot rad \cdot sec^{-1}$ $\qquad d := 5 \cdot cm$

Calcolo innanzitutto i raggi dei due corpi usando la densità del rame (vedi appendice A-12).

$M = \rho \cdot V$ $\qquad V := \frac{M}{\rho}$ $\qquad V = 1.34 \cdot 10^{-3} \cdot m^3$

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot Rs^3$ $\qquad Rs := \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V}{4 \cdot \pi}}$ $\qquad Rs = 0.068 \cdot m$

$V = \pi \cdot Rd^2 \cdot d$ $\qquad Rd := \sqrt{\frac{V}{\pi \cdot d}}$ $\qquad Rd = 0.092 \cdot m$

Si possono ricavare ora i momenti d'inerzia:

$Is := \frac{2}{5} \cdot M \cdot Rs^2$ $\qquad Id := \frac{1}{2} \cdot M \cdot Rd^2$ $\qquad Is = 2.24 \cdot 10^{-2} \cdot kg \cdot m^2$

$Id = 5.12 \cdot 10^{-2} \cdot kg \cdot m^2$

La massima altezza raggiunta da ciascun corpo si ricava dalla conservazione dell'energia:

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Inserendo la condizione di puro rotolamento e i valori dei momenti d'inerzia posso ricavare le due quote raggiunte:

$v = \omega \cdot R$ $\qquad M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \omega^2 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$

$hd := \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(M \cdot \omega d^2 \cdot Rd^2 + Id \cdot \omega d^2\right)}{(M \cdot g)}$ $\qquad hs := \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(M \cdot \omega s^2 \cdot Rs^2 + Is \cdot \omega s^2\right)}{(M \cdot g)}$ $\qquad hd = 0.128 \cdot m$

$hs = 0.192 \cdot m$

Quindi e' la sfera a raggiungere la quota maggiore. Le distanze percorse sulla rampa sono:

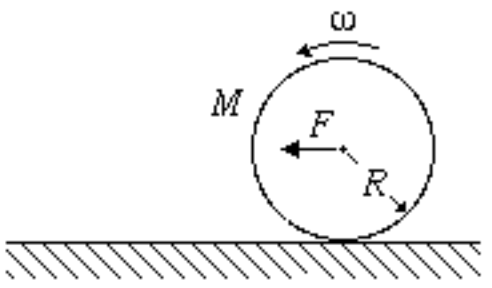
$$ls := \frac{hs}{\sin(\theta)} \qquad ld := \frac{hd}{\sin(\theta)} \qquad ls = 0.855 \cdot m \qquad ld = 0.568 \cdot m$$

Per rispondere alla seconda domanda applico il principio di conservazione dell'energia al moto della sfera fra gli istanti in cui essa è alla sua massima quota e quello in cui è nel punto corrispondente alla massima quota del disco:

$$M \cdot g \cdot hs = M \cdot g \cdot hd + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot Is \cdot \omega^2 \qquad \omega = \frac{v}{Rs}$$

$$M \cdot g \cdot hs = M \cdot g \cdot hd + \frac{1}{2} \cdot M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot Is \cdot \left(\frac{v}{Rs}\right)^2$$

$$v := \sqrt{\frac{2 \cdot M \cdot g \cdot (hs - hd)}{M + \frac{Is}{Rs^2}}} \qquad v = 0.950 \cdot m \cdot sec^{-1}$$



6.13 Una sfera di rame ha massa M = 12 kg ed è immobile su un piano orizzontale ruvido. Il coefficiente d'attrito statico fra la sfera e il piano è $\mu_s = 0.22$. Calcolare 1) la massima forza **F** che si puo applicare al centro di massa della sfera modo che essa rotoli sul piano senza strisciare; 2) la velocità angolare della sfera dopo che la forza **F** ha agito per 3.75 s.

$M := 12 \cdot kg$ $\quad\quad$ $\rho := 8.96 \cdot 10^3 \cdot kg \cdot m^{-3}$

$\mu s := 0.22$ $\quad\quad$ $t := 3.75 \cdot sec$

Il raggio della sfera si trova usando la densita' del rame. Detta Fs la massima forza di attrito statico:

$M = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ $\quad\quad$ $R := \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot \rho}}$ $\quad\quad$ $R = 6.838 \cdot cm$

$N := M \cdot g$ $\quad\quad$ $Fs := \mu s \cdot N$ $\quad\quad$ $Fs = 25.89 \cdot newton$

Il problema è analogo all'esempio del disco che rotola giù dal piano inclinato (pag. 252). Applicando le leggi della dinamica per un corpo rigido, scegliendo il polo nel punto di contatto P:

$F - Fs = M \cdot a$ $\quad\quad$ $F \cdot R = Ip \cdot \alpha$ $\quad\quad$ $\alpha = \frac{a}{R}$

Il momento d'inrzia rispetto a P si trova dal teorema degli assi paralleli:

$Icm := \frac{2}{5} \cdot M \cdot R^2$ $\quad\quad$ $Ip := Icm + M \cdot R^2$ $\quad\quad$ $Icm = 2.244 \cdot 10^{-2} \cdot kg \cdot m^2$

Risolvendo il sistema si trovano F e a: $\quad\quad$ $Ip = 7.855 \cdot 10^{-2} \cdot kg \cdot m^2$

$F \cdot R = Ip \cdot \frac{a}{R}$ $\quad\quad$ $a = F \cdot \frac{R^2}{Ip}$

$F - Fs = M \cdot F \cdot \frac{R^2}{Ip}$ $\quad\quad$ $F := \frac{Fs}{\left(1 - M \cdot \frac{R^2}{Ip}\right)}$ $\quad\quad$ $F = 90.613 \cdot newton$

$a := F \cdot \frac{R^2}{Ip}$ $\quad\quad$ $\alpha := \frac{a}{R}$ $\quad\quad$ $a = 5.394 \cdot m \cdot sec^{-2}$

$\alpha = 78.878 \cdot rad \cdot sec^{-2}$

Se invece scelgo il polo nel CM l'equazione del momento è:

$Fs \cdot R = Icm \cdot \alpha$ $\quad\quad$ $\alpha := Fs \cdot \frac{R}{Icm}$

$a := \alpha \cdot R$

$F := M \cdot a + Fs$ $\quad\quad$ $F = 90.613 \cdot newton$ $\quad\quad$ $a = 5.394 \cdot m \cdot sec^{-2}$

$\alpha = 78.878 \cdot sec^{-2}$

La velocità angolare del moto attorno a P e' la stessa del moto attorno al CM. Il moto e' uniformemente accelerato con partenza da fermo. Allora:

$\omega := \alpha \cdot t$ $\quad\quad$ $\omega = 295.792 \cdot rad \cdot sec^{-1}$