CORSO DI LAUREA IN FISICA – A.A. 2005/06

Esercizi di Meccanica svolti con i tutori

Esercizio 1.1. Una lepre e una tartaruga iniziano una gara di corsa di $L = 10\,\text{km}$ all'istante $t = 0$. La lepre viaggia alla velocità di $v_l = 4\,\text{m/s}$ e distanzia rapidamente la tartaruga, che corre alla velocità di $v_t = 1\,\text{m/s}$ (circa 10 volte maggiore di quella a cui riesce a correre una tartaruga reale). Dopo aver corso per $t_1 = 5'$, la lepre si ferma e si addormenta. Il suo sonnellino dura $\Delta t = 135'$. Svegliatasi, riprende la corsa a 4 m/s, ma perde la gara.

a. A quale istante la tartaruga supera la lepre? [$t = 20\text{min}$]

b. Quanto vale il distacco della lepre dalla tartaruga quando quest'ultima attraversa il traguardo? [$d = 2,4\,\text{km}$]

c. Per quanto tempo avrebbe potuto dormire la lepre per riuscire a vincere la gara? [$(\Delta t)_s < 125' = 7500\,\text{s}$]

Soluzione Conversioni:

$$t_1 = 5' = 300\,\text{s}\,, \qquad \Delta t = 135' = 8100\,\text{s}\,, \qquad L = 10\,\text{km} = 10^4\,\text{m}\,.$$

a. Evidentemente la tartaruga sorpassa la lepre mentre quest'ultima dorme. Dobbiamo dunque calcolare quanto tempo impiega la tartaruga a coprire la distanza

$$x_l(t_1) = (300 \times 4)\,\text{m} = x_t(\bar{t}) = v_t\, t \;\Rightarrow \bar{t} = 1200\,\text{s} = 20'$$

b. Per giungere al traguardo la tartaruga impiega:

$$T = \frac{L}{v_t} = 10^4\,\text{s}\,.$$

Dopo tale tempo la lepre ha percorso solo

$$x_l(T) = v_l(T - \Delta t) = 7600\,\text{m}\,,$$

e dunque ha un distacco di $d = L - x_l(T) = 2400\,\text{m} = 2,4\,\text{km}$.

c. Per vincere la gara la lepre avrebbe potuto dormire un tempo:

$$(\Delta t)_s \leq T - \frac{L}{v_l} = 7500\,\mathrm{s} = 125' \,.$$

Esercizio 1.2. Un aspirante passeggero corre alla velocità di $v_p = 3\,\mathrm{m/s}$ allo scopo di raggiungere un treno. Quando si trova ad una distanza d dall'ultima porta aperta del treno, questo parte da fermo con un'accelerazione costante $a = 0,3\,\mathrm{m/s^2}$, allontanandosi dall'inseguitore. Determinare:

a. se quest'ultimo riuscirà a salire sul treno, nel caso in cui $d = 12\,\mathrm{m}$. [*sì*]
b. il valore critico d_c oltre il quale egli non è in grado di raggiungere la porta. [$d_c = 15\,\mathrm{m}$]
c. la velocità del treno quando il passeggero lo raggiunge, nel caso in cui $d = d_c$. [$v_t = 3\,\mathrm{m/s}$]
d. la velocità media del treno tra l'istante in cui esso parte e l'istante in cui il passeggero vi sale, nel caso in cui $d = d_c$. [$\bar{v}_t = 1,5\,\mathrm{m/s}$]

Soluzione Le leggi orarie del passeggero e del treno sono rispettivamente:

$$x_p(t) = v_p t - d \,, \qquad x_t(t) = \tfrac{1}{2} a t^2 \,.$$

a. Il passeggero riesce a salire sul treno se le due curve si intersecano, ossia se esiste un tempo τ per il quale $x_p(\tau) = x_t(\tau)$:

$$a\tau^2 - 2v_p\tau + 2d = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{v_p \pm \sqrt{v_p^2 - 2ad}}{a} \,.$$

Le curve si intersecano se il discriminante è positivo:

$$\Delta = v_p^2 - 2ad \geq 0 \,,$$

e per $d = 12\,\mathrm{m}$ abbiamo $\Delta = 9 - 2 \times 0,3 \times 12 = 9 - 7,2 > 0$.

b. La distanza critica è dunque

$$d_c \,:\, \Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad d_c = \frac{v_p^2}{2a} = 15\,\mathrm{m} \,.$$

c. La velocità del treno al tempo $t = t_c = v_p/a$ è

$$v_t(t_c) = at_c = a \times \frac{v_p}{a} = v_p = 3\,\text{m/s}\,.$$

d. La velocità media del treno tra l'istante $t = 0$ e $t = t_c$ è

$$\bar{v}_t = \tfrac{1}{2}[v_t(t_c) - v_t(0)] = 1,5\,\text{m/s}\,.$$

Esercizio 1.3. Attraverso una finestra alta 1,5 m si vede passare un pallone diretto verso l'alto e poi ricadere giù sempre in verticale. Se il tempo totale in cui il pallone visibile è 1 s, trovare l'altezza sopra la finestra che raggiunge il pallone. [1,53 cm]

Soluzione Al tempo $t = 0$ la palla attraversa la base della finestra con una velocità v_0 data da:

$$h = -\tfrac{1}{2}g\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + v_0\frac{\Delta t}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{2}{\Delta t}\left[h + \tfrac{1}{2}g\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2\right] = 5,45\,\text{m/s}\,.$$

All'apice della traiettoria della palla la velocità è nulla:

$$v(t_{\text{max}}) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}\,,$$

e la quota massima è

$$x_{\text{max}} = -\tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{g} = \tfrac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = 1,5154\,\text{m}\,.$$

La palla supera la finestra di $\Delta x = x_{\text{max}} - h = 1,54\,\text{cm}$.

Esercizio 1.4. Una particella oscilla di moto armonico semplice secondo la legge $x = A\sin(\omega t)$ con ampiezza $A = 20\,\text{cm}$ e periodo $T = \frac{\pi}{2}$ s. Si calcoli:

a. il modulo della velocità massima; $[v_{\text{max}} = 0,8\,\text{m/s}]$
b. il tempo da essa impiegato per spostarsi di un tratto $A/2$ dal centro dell'oscillazione; $[t = 0,13\,\text{s}]$
c. il modulo dell'accelerazione al compimento di detto spostamento. $[a = 1,6\,\text{m/s}^2]$

Soluzione Se il periodo è $T = \frac{\pi}{2}$ s, la pulsazione vale $\omega = 2\pi/T = 4\,\text{s}^{-1}$.

a. La velocità $v(t) = A\omega \cos \omega t$ raggiunge il valore massimo quando $\cos \omega t = 1$, e $|v_{\max}| = A\omega = 0,8\,\mathrm{m/s}$.

b. La particella si sposta di un tratto $A/2$ dopo un tempo $\bar{t}$ dato da

$$\frac{A}{2} = A \sin \omega \bar{t} \;\Rightarrow\; \sin \omega t = \tfrac{1}{2} \;\Rightarrow\; \omega \bar{t} = \frac{\pi}{6} \;\Rightarrow\; \bar{t} = \frac{\pi}{24}\,\mathrm{s} \sim 0,13\,\mathrm{s}\,.$$

c. Il modulo dell'accelerazione al tempo $\bar{t}$ vale

$$|a(\bar{t})| = A\omega^2 \sin \omega t = \omega^2 \frac{A}{2} = 1,6\,\mathrm{m/s}\,.$$

Esercizio 1.5. Due treni viaggiano con velocità costanti v_1 e v_2 sul medesimo binario rettilineo e diretti l'uno contro l'altro. A $t = 0$ distano 80 km.

a. Calcolare dopo quanto tempo si scontrano nel caso
   i. $v_1 = v_2 = 40\,\mathrm{km/h}$ [1 h]
   ii. $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$ e $v_2 = 20\,\mathrm{km/h}$ [$1\,\mathrm{h}\,20'$]

b. Si consideri il caso i. del punto a. si supponga che all'istante $t = 0$ un uccellino voli alla velocità di 80 km/h da un treno verso l'altro. Quando raggiunge questo ritorna immediatamente indietro e cosí via ...
   i. quanti voli può fare l'uccellino prima che i due treni si scontrino?
   ii. qual è la distanza totale percorsa dall'uccellino?
   iii. Si discutano i punti i. e ii. al variare della velocità dell'uccellino ($> 40\,\mathrm{km/h}, < 40\,\mathrm{km/h}$)

Soluzione

a.i. Se i due treni viaggiano alla stessa velocità si scontreranno dopo un tempo $T = \Delta/2v_i = 1\,\mathrm{h}$.

a.ii. Per scontrarsi i due treni devono percorrere una distanza complessiva Δ. Dunque

$$v_1 T + v_2 T = \Delta \quad \Rightarrow \quad T = \frac{\Delta}{v_1 + v_2} = 1\,\mathrm{h}\,20'\,.$$

b.i. Poiché i treni viaggiano complessivamente per un'ora è chiaro che l'uccellino viaggerà per un tempo totale di un'ora. Infatti, l'uccellino parte insieme al treno uno e raggiunge il treno due dopo un tempo $t_1 = \Delta/(v_2 + v_u) = \frac{2}{3}\,\mathrm{h}$. Trascorso il tempo t_1 i treni sono separati dalla distanza $\Delta - (v_1 + v_2)t_1 = \frac{80}{3}$. A questo punto l'uccellino (che parte insieme al treno due) raggiunge il treno uno dopo un tempo $t_2 = 80/[3(v_1 + v_u)] = \frac{2}{3\times 3}\,\mathrm{h}$. Genericamente all'$n$-esimo volo l'uccellino impiega un tempo $t_n = 2/3^n\,\mathrm{s}$ per andare da un treno all'altro. L'uccellino va avanti e indietro infinite volte e vola per un tempo totale

$$T_u = t_1 + t_2 + \ldots = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n} = 2\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n} - 1\right] = 1\,\mathrm{h}\,.$$

b.ii. La distanza totale percorsa dall'uccellino è dunque $x_{\text{totale}} = v_u T_u = 80\,\mathrm{km}$.

b.iii. Se $v_u < 40\,\mathrm{km/h}$ non riuscirà mai a raggiungere il treno prima che i due treni si scontrino. Se invece $v_u > 40\,\mathrm{km/h}$ l'uccellino fa un numero infinito di voli.

Esercizio 1.6 un disco da hockey, colpito da un giocatore al livello del ghiaccio, sfiora la sommità di una parete alta $h = 2,8\,\mathrm{m}$. Il tempo impiegato dal disco per arrivare in quel punto è $t_1 = 0,65\,\mathrm{s}$ e lo spostamento orizzontale è $L = 12\,\mathrm{m}$. Si trovino:

a. il modulo della velocità iniziale del disco; [$v_0 = 19,92\,\mathrm{m/s}$]

b. la quota massima raggiunta dal disco; [$h_{\max} = 2,86\,\mathrm{m}$]

c. l'angolo θ tra il vettore velocità e l'orizzontale, quando il disco sta superando la parete. [$\theta = 3,48°$]

Soluzione La legge oraria del disco da hockey è:

$$x(t) = v_{0x}t\,, \qquad y(t) = v_{0y}t - \tfrac{1}{2}gt^2\,.$$

a. Sappiamo che al tempo $t = t_1 = 0.65\,\mathrm{s}$ $x(t_1) = L = 12\,\mathrm{m}$ e $y(t_1) = h = 2,8\,\mathrm{m}$, dunque

$$v_{0x} = \frac{L}{t_1} \sim 18,46\,\mathrm{m/s}\,,$$
$$v_{0y} = \frac{1}{t_1}\left(h + \tfrac{1}{2}gt_1^2\right) \sim 7,49\,\mathrm{m/s}\,.$$

Il modulo della velocità iniziale vale $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} \sim 19,92\,\mathrm{m/s}$.

b. La quota massima viene raggiunta al tempo $t_{\max}$ per il quale $v_y(t_{\max}) = 0$, ossia $t_{\max} = v_{0y}/g$. La quota massima vale dunque

$$y_{\max} = \tfrac{1}{2}\frac{v_{0y}^2}{g} \sim 2,86\,\mathrm{m}\,.$$

c. Al tempo $t = t_1$ la velocità ha componenti $v_x(t_1) = v_{0x} \sim 18,46\,\mathrm{m/s}$ e $v_y(t_1) = v_{0y} - gt_1 \sim 1,12\,\mathrm{m/s}$. L'angolo con l'orizzontale è tale per cui

$$\tan\theta = \frac{v_y(t_1)}{v_x(t_1)} = 0,061 \quad \Rightarrow \quad \theta_{\mathrm{rad}} = \tan^{-1}(0,061) \sim 0,061\,\mathrm{rad}\,,$$

ossia $\theta = 180 \times \theta_{\mathrm{rad}}/\pi \sim 3,49°$.

Esercizio 2.1. Un proiettile viene sparato da un'altezza $h = 11,3\,\mathrm{m}$ rispetto al suolo, con velocità iniziale $v_{01} = 17,3\,\mathrm{m/s}$ e con un'inclinazione rispetto al suolo $\alpha = 45°$ verso l'alto. Contemporaneamente, dal suolo e in un punto distante $L = 15\,\mathrm{m}$ dalla verticale passante per la posizione del primo proiettile, viene sparato verticalmente un secondo proiettile. Calcolare:

a. la velocità iniziale che deve possedere il secondo proiettile per colpire il primo; [$v_{02} = 21,45\,\mathrm{m/s}$]

b. l'istante in cui avviene l'urto; [$t_{\mathrm{urto}} = 1,23\,\mathrm{s}$]

c. l'altezza dal suolo del punto d'impatto dei due proiettili. [$h_{\mathrm{urto}} = 18,93\,\mathrm{m}$]

Soluzione Le leggi orarie dei due proiettili sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = v_{01} t \cos\alpha \\ y_1(t) = v_{01} t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2 + h \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2(t) = L \\ y_2(t) = v_{02} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

I due proiettili di scontrano quando $x_1(t) = x_2(t)$ e $y_1(t) = y_2(t)$, ossia

$$\begin{aligned} v_{01} t \cos\alpha &= L \\ -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_{01} t \sin\alpha + h &= -\tfrac{1}{2} g t^2 + v_{02} t \end{aligned}$$

a. La velocità iniziale del secondo proiettile è:

$$h = (v_{02} - v_{01} \sin\alpha) t_{\mathrm{urto}} = (v_{02} - v_{01} \sin\alpha) \frac{L}{v_{01} \cos\alpha}$$

ossia

$$v_{02} = \frac{h}{L} v_{01} \cos\alpha + v_{01} \sin\alpha \sim 21,42 \mathrm{m/s}\,.$$

b. I due proiettili si scontrano dopo

$$t_{\mathrm{urto}} = \frac{L}{v_{01} \cos\alpha} \sim 1,23 \mathrm{s}\,.$$

c. L'urto avviene alla quota $y_{\mathrm{urto}} = -\frac{1}{2} g t_{\mathrm{urto}}^2 + v_{02} t_{\mathrm{urto}} \sim 18,93 \mathrm{m}$.

Esercizio 2.2. Una particella si muove con velocità costante $v_0 = 5\,\mathrm{cm/s}$ su una circonferenza di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$, percorrendola in senso antiorario. All'istante $t = 0$ si trova sull'asse x con ascissa positiva. Calcolare:

a. la posizione della particella al tempo $t_1 = \frac{4}{3}\pi\,\text{s}$; $[x = 10\,\text{cm}\,,\ y = 17,32\,\text{cm}]$

b. le componenti v_x, v_y della velocità e a_x, a_y dell'accelerazione in tale istante. $[v_x = -4,33\,\text{cm/s}\,,\ v_y = 2,5\,\text{cm/s}\,,\ a_x = -0,625\,\text{cm/s}^2\,,\ a_y = -1,08\,\text{cm/s}^2]$

Soluzione La legge oraria della particella è

$$x(t) = R\cos\omega t\,, \qquad y(t) = R\sin\omega t\,,$$

e la sua velocità è

$$\dot{x}(t) = -R\omega\sin\omega t\,, \qquad \dot{y}(t) = R\omega\cos\omega t\,,$$

Inoltre

$$|v_0| = \sqrt{R^2\omega^2\cos^2\omega t + R^2\omega^2\sin^2\omega t} = R\omega = 5\text{cm/s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v_0}{R} = \tfrac{1}{4}\text{s}^{-1}\,.$$

a. Al tempo t_1 la posizione della particella è

$$x(t_1) = R\cos\omega t_1 = R\cos\frac{\pi}{3} = \frac{R}{2} = 10\text{cm}\,,$$
$$y(t_1) = R\sin\omega t_1 = R\sin\frac{\pi}{3} = \frac{R\sqrt{3}}{2} \sim 17,32\text{cm}\,.$$

b. Analogamente

$$v_x(t_1) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm/s} \sim -4,33\text{cm/s}\,, \qquad a_x(t_1) = -\frac{5}{4\times 2}\text{cm/s}^2 = -0,625\text{cm/s}^2\,,$$
$$v_y(t_1) = \frac{5}{2}\text{cm/s} = 2,5\text{cm/s}\,, \qquad a_y(t_1) = -\frac{5\sqrt{3}}{4\times 2}\text{cm/s}^2 = -1,08\text{cm/s}^2\,.$$

Esercizio 2.3. Un punto P è posto su una retta che ruota con velocità angolare ω costante intorno ad un punto fisso O. Il modulo della distanza $\vec{r} = \vec{OP}$ decresce secondo la legge $r(t) = r_0\exp(-\omega t/2)$, con $r_0 = 20\,\text{cm}$. Indicata con P_0 la posizione del punto P al tempo $t = 0$, e sapendo che in tale istante il modulo della velocità radiale vale 8 cm/s, determinare:

a. il modulo delle componenti radiale v_r e trasversa v_θ della velocità al tempo $t_1 = \pi/2\omega$; $[v_r(t_1) = -3,65\,\text{cm/s}\,,\ v_\theta(t_1) = 7,30\,\text{cm/s}]$

b. dopo quale tempo t_2 il punto P si troverà di nuovo sulla semiretta fissa $\vec{OP_0}$, e a che distanza dal punto O. $[t_2 = 7,85\,\text{s}\,,\ r(t_2) = 0,86\,\text{cm}]$

Soluzione La componente radiale della velocità è

$$v_r(t) = -\frac{\omega}{2} r_0 e^{-\omega t/2} \,.$$

Sapendo che al tempo $t = 0$ la velocità radiale vale 8 cm/s deriviamo la velocità angolare

$$v_r(0) = 8\,\mathrm{cm/s} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{16}{r_0}\,\mathrm{cm/s} = \tfrac{4}{5}\,\mathrm{s}^{-1} \,.$$

a. Al tempo $t_1 = \pi/2\omega$ le componenti angolare e radiale della velocità varranno dunque:

$$v_r\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = \frac{\omega}{2} r_0 e^{-\frac{\omega}{2}\frac{\pi}{2\omega}} = 8\, e^{-\pi/4}\,\mathrm{cm/s} \sim 3,65\,\mathrm{cm/s}$$
$$v_\theta\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = r\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)\dot{\phi} = \omega r_0 e^{-\pi/4} \sim 7,3\,\mathrm{cm/s}$$

b. Supposto α l'angolo individuato dall'asse positivo delle ascisse e dalla semiretta $\vec{OP}_0$, dopo un generico tempo t la semiretta $\vec{OP}$ formerà un angolo $\alpha + \omega t$. Dunque, il punto P si troverà di nuovo sulla semiretta fissa $\vec{OP}_0$ dopo un tempo $t_2 = 2\pi/\omega \sim 7,85\,\mathrm{s}$. A tale istante, la distanza del punto P dall'origine è:

$$r(t_2) = r_0\, e^{-\omega t_2/2} = r_0\, e^{-\pi} \sim 0,86\,\mathrm{cm} \,.$$

Esercizio 2.4. La posizione di una particella in moto su un piano è definita mediante le equazioni parametriche

$$x(t) = (3 \sin[(2\mathrm{s}^{-1})t])\,\mathrm{m}\,;\; y(t) = (4\cos[(2\mathrm{s}^{-1})t])\,\mathrm{m} \,.$$

a. Esprimere in componenti cartesiane i vettori posizione $\vec{r}(t)$, velocità $\vec{v}(t)$ e accelerazione $\vec{a}(t)$.
b. Determinare l'equazione cartesiana della traiettoria.
c. Determinare le componenti normale $a_n(t_1)$ e tangenziale $a_t(t_1)$ dell'accelerazione allo istante $t_1 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}$ $[a_n(t_1) = 16\,\mathrm{m/s}^2\,,\ a_t(t_1) = 0]$ e il raggio di curvatura.

Soluzione. Definendo $\mathbf{u}_x$ e $\mathbf{u}_y$ i versori individuanti il sistema cartesiano abbiamo:

a.
$$\vec{r}(t) = 3\sin 2t\,\mathbf{u}_x + 4\cos 2t\,\mathbf{u}_y\,,$$
$$\vec{v}(t) = 6\cos 2t\,\mathbf{u}_x - 8\sin 2t\,\mathbf{u}_y\,,$$
$$\vec{a}(t) = -12\sin 2t\,\mathbf{u}_x - 16\cos 2t\,\mathbf{u}_y\,,$$

b. L'equazione cartesiana della traiettoria è:

$$\tfrac{1}{9}\, x^2 + \tfrac{1}{16}\, y^2 = 1\,.$$

c. L'accelerazione $\vec{a}(t) = -4\vec{r}(t)$ ha solo componente radiale. il versore tangente alla curva è $\mathbf{u}_{\|}(t) = \frac{\vec{v}}{|v|}$ e al tempo $t_1 = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{s}$ ha componenti $\mathbf{u}_{\|}(t_1) = -6\mathbf{u}_x$. A tale tempo l'accelerazione ha componente $\vec{a}(t_1) = 16\,\mathbf{u}_y$ e dunque $\vec{a}_n = 16\,\mathrm{m/s^2}$ e $\vec{a}_t = 0$. Il raggio di curvatura è: $\mathcal{R} = v^2/a_n = \frac{9}{4}\,\mathrm{m}$.

Esercizio 2.5. Un passeggero lascia cadere una bottiglietta dal finestrino aperto di un treno, che transita in una stazione alla velocità $v_T = 60\,\mathrm{km/h}$. La bottiglietta cade da un'altezza $h = 2\,\mathrm{m}$ rispetto al marciapiede.

a. Qual è il moto della bottiglietta osservato dal passeggero e con quale velocità, rispetto al passeggero, essa arriva a terra? $[v_y = 22,54\,\mathrm{km/h}]$

b. Che moto osserva invece un altro viaggiatore fermo sul marciapiede? $[v = 64,09\,\mathrm{km/h}$, $\alpha = 20,6°]$

Soluzione.

a. Il moto della bottiglietta osservato dal passeggero è verticale con legge oraria:

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + h\,.$$

La bottiglietta impiega un tempo $t_{\text{caduta}} = \sqrt{2h/g} \sim 0,64\,\text{s}$ per raggiungere il suolo, e dunque la sua velocità al tempo t_{caduta} è

$$|v(t_{\text{caduta}})| = |-gt_{\text{caduta}}| \sim 6,3\,\text{m/s}\,.$$

b. Il moto osservato dall'osservatore fermo sul marciapiede è parabolico con legge oraria:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_T\,t \\ y(t) &= -\tfrac{1}{2}gt^2 + h \end{aligned}$$

Per arrivare al suolo la bottiglietta impiega lo stesso tempo $t_{\text{caduta}} \sim 0,64\,\text{s}$ e le componenti della velocità sono:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = v_T = 60\,\text{km/h} \\ v_y &= \dot{y} = -gt_{\text{caduta}} \sim 22,68\,\text{km/h} \end{aligned}$$

e $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \sim 64,14\,\text{km/s}$. L'angolo con il quale raggiunge il suolo è $\tan\alpha = \dot{y}/\dot{x} \sim -0,38$, ossia $\alpha \sim -0,36\,\text{rad} \sim -20,6°$.

Esercizio 2.6. Si consideri il moto di un punto materiale vincolato a muoversi su una parabola di equazione $y = -x^2$. Si supponga inoltre che la velocità lungo l'asse x sia costante e valga v_0 e $x(t=0) = 0$. Calcolare:

a. la legge oraria della traiettoria $\vec{r}(t)$;
b. il raggio di curvatura della traiettoria istante per istante;
c. lo spazio totale percorso dal punto materiale.

Soluzione.

a. Il moto è uniforme lungo l'asse delle x, $x(t) = v_0 t$, mentre lungo l'asse delle y abbiamo $y(t) = -v_0^2\,t^2$. Dunque la legge oraria è:

$$\vec{r}(t) = v_0\,t\,\mathbf{u}_x - v_0^2\,t^2\,\mathbf{u}_y\,.$$

b. Per calcolare i versori tangente e normale calcoliamo la velocità;

$$\dot{\vec{r}}(t) = v_0 \mathbf{u}_x - 2v_0^2 t \mathbf{u}_y \quad \Rightarrow \quad v = |\dot{\vec{r}}| = v_0 \sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}\,.$$

Il versore tangente $\mathbf{u}_|$ è dunque:

$$\mathbf{u}_\| = \frac{\dot{\vec{r}}}{v} = \frac{\mathbf{u}_x - 2v_0 t\, \mathbf{u}_y}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}}\,.$$

Il versore normale $\mathbf{u}_\perp$ è definito da

$$\mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}_\| = 0\,, \qquad \mathbf{u}_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp = 1\,.$$

Le sue componenti cartesiane $\mathbf{u}_\perp = u_{\perp\,x}\, \mathbf{u}_x + u_{\perp\,y}\, \mathbf{u}_y$ sono duqnue:

$$u_{\perp\,x} = \frac{2v_0 t}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}}\,, \qquad u_{\perp\,y} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}}\,.$$

L'accelerazione $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$ ha componente solo lungo l'asse delle y, e dunque la sua componente normale normale alla traiettoria $a_\perp$ è

$$a_\perp = \vec{a} \cdot \mathbf{u}_\perp = -2v_0^2 \mathbf{u}_y \cdot \left[\frac{2v_0 t\, \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}}\right] = -\frac{2v_0}{\sqrt{1 + 4v_0^2 t^2}}\,.$$

Il raggio di curvatura è

$$\mathcal{R} = \frac{v^2}{a_\perp} = \tfrac{1}{2}(1 + 4v_0^2 t^2)^{3/2}\,.$$

c. Lo spazio totale percors dal punto materiale è per definizione

$$\Delta = \int_0^T v_\|(t)\, dt\,.$$

La componente tangenziale della velocità è uguale al modulo stesso della velocità e dunque

$$\begin{aligned}\Delta =& v_0 \int_0^T dt\, \sqrt{1 + (2v_0 t)^2} = \tfrac{1}{2} \int_0^{2v_0 T} d\tau\, \sqrt{1 + \tau^2} \\ =& \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arcsh}(x)\right)\right]_0^{2v_0 T}\,.\end{aligned}$$

Esercizio 3.1. Non c'è vento e la pioggia sta cadendo verticalmente alla velocità di regime. Siete su un'automobile che procede alla velocità $v_A = 30\,\mathrm{km/h}$ e osservate che sul finestrino laterale la pioggia forma delle striscie con angolo $\alpha = 33°$ rispetto alla vertcale. Qual è la velocità di caduta della pioggia? [$v_P = 46,20\,\mathrm{km/h}$]

Soluzione. Dal punto di vista dell'osservatore sull'automobile la velocità di discesa della pioggia ha componenti $\vec{v} = v_A \mathbf{u}_x + v_P \mathbf{u}_y$. Sapendo che l'angolo formato dalla pioggia con l'asse delle ordinate è $\alpha = 33° \sim 0,58\,\mathrm{rad}$ abbiamo

$$v_P = \frac{v_A}{\tan\alpha} \sim 45,79\,\mathrm{km/h}\,.$$

Esercizio 3.2. Se $g' = 9,79\,\mathrm{m/s^2}$ è il modulo dell'accelerazione di gravità alla latitudine $\lambda = 30°$, rispetto a un sistema solidale con la terra, e $R_T = 6,37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ è il raggio della Terra, determinare la deviazione del filo a piombo rispetto alla direzione radiale e il valore g dell'accelerazione di gravità in un sistema di riferimento inerziale. [$\alpha = 0,085°\,,\ g = 9,815\,\mathrm{m/s^2}$]

Soluzione. La velocità angolare della Terra è $\omega \sim 7,28 \times 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$. La distanza del grave dall'asse della Terra è $d = R_T \cos\lambda \sim 5,51 \times 10^6\,\mathrm{m}$. L'accelerazione di gravità vista da un osservatore inerziale è

$$\vec{g} = \vec{g}' + \vec{a}_t = \vec{g}' + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge \vec{d}\,.$$

Il modulo di $\vec{a}_t$ è $a_t = 2,9 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$. Rispetto ad un sistema $(\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y)$ l'accelerazione di gravità e l'accelerazione centrifuga hanno componenti

$$\vec{g}' = -g'(\cos\lambda\,\mathbf{u}_x + \sin\lambda\,\mathbf{u}_y)\,, \qquad \vec{a}_t = -a_t\,\mathbf{u}_x\,.$$

Pertanto l'accelerazione di gravità rispetto ad un osservatore inerziale ha componenti

$$\vec{g} = -(g'\cos\lambda + a_t)\,\mathbf{u}_x - g'\sin\lambda\,\mathbf{u}_y \sim -(8,507\,\mathbf{u}_x + 4,895\,\mathbf{u}_y)\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Il suo modulo vale $g = \sqrt{(8,507)^2 + (4,895)^2} \sim 9.815\,\mathrm{m/s^2}$, mentre la direzione è individuata dall'angolo $\tan\lambda' = 4,895/8,507 \sim 0,575$, ossia $\lambda' = 0,522\,\mathrm{rad}$. La deviazione del filo a piombo è pertanto di $\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = 0,0015\,\mathrm{rad} \sim 0,086°$.

Esercizio 3.3. Un razzo vola alla velocità $v = 1000\,\mathrm{m/s}$ lungo il parallelo ad $\alpha = 50°$ di latitudine Nord, da Est verso Ovest, a bassa quota sul livello del mare. Determinare la sua accelerazione di Coriolis e specificarne la componente tangente al meridiano. [$a_{\mathrm{cc}} = 0,145\,\mathrm{m/s^2}$ centripeta, $(a_{\mathrm{cc}})_t = 0,111\,\mathrm{m/s^2}$ verso Nord]

Soluzione. L'Accelerazione di Coriolis vale

$$|\vec{a}_c| = |2\vec{\omega} \wedge \vec{v}| = 14,56 \times 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto che la velocità angolare della terra è $\omega \sim 7,28 \times 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$. La componente dell'accelerazione di Coriolis tangente il meridiano è $(a_c)_t = a_c \sin(50°) \sim a_c \sin(0,872) \sim 0,111\,\mathrm{m/s^2}$.

Esercizio 3.4. Un oggetto viene lasciato cadere, in assenza di vento, da una torre alta 100 m, posta in una località a 30° di latitudine Nord, dove l'accelerazione di gravità vale $g' = 9,79\,\mathrm{m/s^2}$. Calcolare, trascurando la resistenza dell'aria, lo spostamento verso Est subito dall'oggetto nella caduta. [$\Delta s = 18,98\,\mathrm{mm}$]

Soluzione. Consideriamo un sistema di assi cartesiani solidali con la terra. La velocità angolare della terra sar dunque diretta lungo l'asse z ($\vec{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$) mentre posizione e velocità iniziale lungo l'asse delle y saranno entrambe nulle. Per un osservatore solidale con la rotazione della terra il grave in caduta verticale impiegherà al solito un tempo $t_c = \sqrt{2h/g'} \sim 4,52\,\mathrm{s}$ per raggiungere il suolo. Lungo l'asse delle y non agiscono forze reali, ma solo apparenti, e dunque la componente y dell'accelerazione (nel sistema solidale con la terra) è:

$$\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega \dot{x} = 0\,,$$

ossia, tenendo presente che il grave si trova sul parallelo $\lambda = \frac{\pi}{6}$,

$$\ddot{y} - \omega^2 y - 2\omega g'\, t\, \cos\lambda\,.$$

Poiché $y(t = 0) = 0$ possiamo trascurare il termine lineare in y e risolvere l'equazione differenziale

$$\ddot{y} - 2\omega g'\, t\, \cos\lambda = 0 \qquad \Rightarrow \qquad y(t) = \tfrac{1}{3}\omega g'\, t^3\, \cos\lambda\,.$$

Dunque, dopo un tempo $t = t_c$ il grave avrà subito uno spostamento verso est pari a

$$y(t_c) = \tfrac{1}{3}\omega g'\, t_c^3 \cos\lambda \sim 18,997\,\mathrm{mm}\,.$$

Volendo studiare l'equazione differenziale completa, la soluzione esatta è

$$y(t) = -\frac{2g'\,t\,\cos\lambda}{\omega} + \frac{2g'\cos\lambda}{\omega^2}\sinh(\omega t) \quad\Rightarrow\quad y(t_c) \sim 18,997\,\mathrm{mm}\,.$$

Esercizio 3.5. Se una galassia si allontana, in una particolare direzione, con velocità $V = 0,3\,c$, e un'altra galassia si allontana nella direzione opposta con la stessa velocità,

a. con quale velocità di recessione ad un osservatore posto su una galassia appare allontanarsi l'altra? [$v = 0,55\,c$]
b. di quanti giorni appare in anticipo un orologio posto su una galassia, dopo che è trascorso un anno terrestre (365 giorni) secondo l'orologio di un osservatore posto sull'altra galassia? [$\Delta t = 72$ giorni]

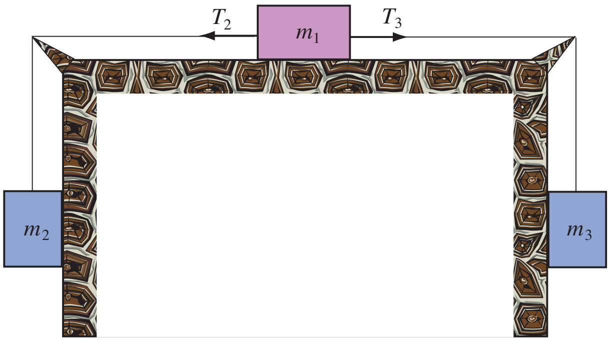
Soluzione. Supponiamo che le due galassie si muovano lungo l'asse delle x' con velocità opposte $v'_x = \pm V$. Sia S il sistema di riferimento solidale con la galassia che si muove con velocità negativa in S'. È evidente che la velocità relativa di S' rispetto ad S è V. Dunque, in S la seconda galassia si muove con velocità

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V v'_x}{c^2}} = \frac{0,6\,c}{1 + 0,09} \sim 0,55\,c\,.$$

Inoltre se sulla galassia solidale con S è trascorso un tempo $\tau = 365$ giorni sulla seconda galassia che si muove con velocità $v_x = 0,55\,c$ il tempo trascorso è

$$t = \tau\,\gamma = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{365\,\text{giorni}}{\sqrt{1-(0,55)^2}} \sim 437\,\text{giorni} = (365+72)\,\text{giorni}\,.$$

Esercizio 4.1. Dato il sistema di masse ($m_1 = m_2 = 1\,\text{kg}\,,\ m_3 = 2\,\text{kg}$), funi e carrucole mostrato in figura, determinare l'accelerazione con cui si muove la massa m_3 e la tensione delle funi, trascurando l'attrito tra la massa m_1 e il piano. [$|a| = g/4 = 2.45\,\text{m/s}^2\,,\ T_2 = 12.25\,N\,,\ T_3 = 14.70\,N$]



Soluzione. Fissato un verso di percorrenza e tenendo presente che i corpi si muovono tutti con la stessa accelerazione abbiamo:

$$\begin{cases} m_1 a = T_3 - T_2 \\ m_3 a = m_3 g - T_3 \\ -m_2 a = m_2 g - T_2 \end{cases}$$

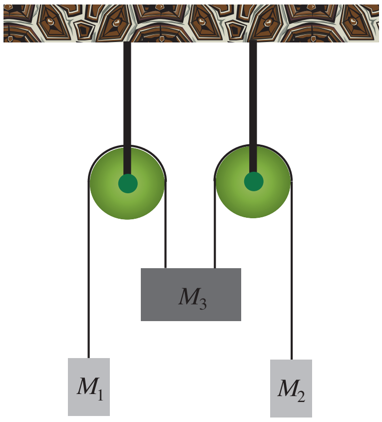
da cui si ricava:

$$a = \frac{(m_3 - m_2)g}{m_1 + m_2 + m_3} \sim 2,45\,\text{m/s}^2\,,$$

e

$$T_3 = \tfrac{3}{4} m_3 g \sim 14,7\,\text{N}\,, \qquad T_2 = \tfrac{5}{4} m_3 g \sim 12,25\,\text{N}\,.$$

Esercizio 4.2. Determinare l'accelerazione della massa M_3 e la tensione delle due funi nel sistema di masse, funi e carrucole mostrato in figura, dove $M_1 = M_2 = M_3 = 1\,\text{kg}$. [$|a| = g/3 = 3.27\,\text{m/s}^2\,,\ T_1 = T_2 = 6.53\,N$]



Soluzione. Fissato un verso di percorrenza e tenendo presente che i corpi si muovono tutti con la stessa accelerazione abbiamo:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T_1 \\ m_2 a = m_2 g - T_2 \\ -m_3 a = m_3 g - T_1 - T_2 \end{cases}$$

da cui si ricava:

$$a = \frac{(m_3 - m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + m_3} \sim 3,27\,\mathrm{m/s^2}\,, \qquad T_1 = T - 2 = m_1(g - a) \sim 6,54\,\mathrm{N}\,.$$

Esercizio 4.3. Un pendolo conico è costituito da una massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ appesa a un filo di lunghezza $\ell = 1\,\mathrm{m}$, in moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio $R = 50\,\mathrm{cm}$. Trovare la tensione T del filo e il periodo P del moto. $[T = 11.32\,N\,,\ P = 1.87\,\mathrm{s}]$

Soluzione. Poiché il moto avviene sul piano le componenti delle forze ortogonali al piano devono annullarsi a vicenda, ossia:

$$-mg + T\cos(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2mg}{\sqrt{3}} \sim 11,53\,\mathrm{N}\,.$$

La forza centripeta che agisce sul piano è invece $T\sin(\alpha)$, da cui, per un moto circolare uniforme,

$$m\omega^2 R = T\sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{T\sin(\alpha)}{mR}}$$

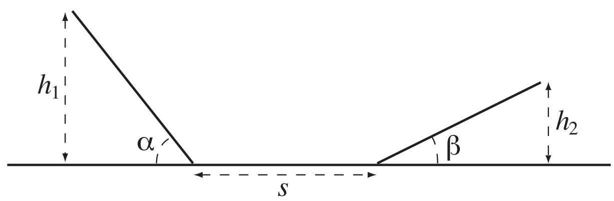
ed il periodo vale $P = \frac{2\pi}{\omega} \sim 1,87\,\mathrm{s}$.

Esercizio 4.4. Si prenda un blocco di massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$ posto su un piano inclinato con coefficiente d'attrito $\mu = 0.2$ e inclinazione $\alpha = \pi/6$. Trovare l'accelerazione del blocco lungo il piano inclinato. $[a = 3.20\,\mathrm{m/s^2}]$

Soluzione. Le forze che agiscono sul sistema sono la forza di attrito e la componente dell'accelerazione di gravità lungo il piano. Dunque

$$ma = F_{\mathrm{grav}} - F_{\mathrm{attr}} \quad \Rightarrow \quad a = g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha) \sim 3,2\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Esercizio 4.5. Un corpo di massa m si trova inizialmente in cima ad un piano inclinato di altezza h_1 e inclinato di un angolo α rispetto al suolo (vedi figura). Il corpo incomincia a scendere per effetto dell'accelerazione di gravità , percorre il tratto s epoi risale lungo il secondo piano inclinato alto h_2 e con inclinazione β. Sapendo che il corpo lungo tutto il moto è anche soggetto alla forza d'attrito dinamico con coefficiente μ, determinare le condizioni che i valori di μ, α, β h_1 e h_2 devono soddisfare affinché il corpo riesca a raggiungere la sommità del secondo piano inclinato.



Soluzione. Per il teorema delle forze vive abbiamo

$$mgh_2 - mgh_1 = \text{lavoro forze dissipative}\,.$$

Il lavoro totale è la somma dei lavori delle forze d'attrito lungo i tre percorsi. Sapendo che

$$F^{(1)}_{\mathrm{attr}} = -mg\cos(\alpha)\,,\; F^{(2)}_{\mathrm{attr}} = -mg\,,\; F^{(3)}_{\mathrm{attr}} = -mg\cos(\beta)\,,$$

abbiamo

$$L^{(1)} = -mgh_1\mathrm{cotg}(\alpha)\,,\; L^{(2)} = -mgs\,,\; L^{(3)} = -mgh_2\mathrm{cotg}(\beta)\,,$$

e dunque la relazione cercata è

$$h_2 - h_1 = -\mu\left[h_1\mathrm{cotg}(\alpha) + h_2\mathrm{cotg}(\beta) + s\right]\,.$$

Esercizio 5.1. Due blocchi di massa $m_1 = 3\,\text{kg}$ e $m_2 = 5\,\text{kg}$ sono collegati tra loro da una molla leggera di costante elastica $k = 10^3\,N/\text{m}$ e sono appoggiati su un piano orizzontale con attrito. Sul primo blocco agisce una forza F costante che trascina l'intero sistema in moto uniformemente accelerato, mentre la molla rimane allungata di una quantità fissa. Determinare il valore della forza F per cui l'allungamento della molla è pari a $\Delta\ell = 1\,\text{cm}$, sapendo che agisce una forza d'attrito con coefficiente $\mu = 0.2$. [$F = 16\,N$]

Soluzione. Il sistema si muove con accelerazione costante e identica per i due corpi. Sul primo agisce la forza esterna F, la forza di attrito e la forza di richiamo della molla, mentre sul secondo blocco non agisce la forza esterna. In equazioni:

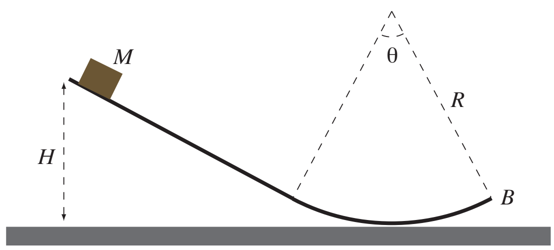
$$\begin{cases} m_1 a = F - \mu m_1 g - k\Delta\ell \\ m_2 a = -\mu m_2 g + k\Delta\ell \end{cases}$$

Dunque, $a = -\mu g + k\Delta\ell/m_2$ e

$$F = \frac{k\Delta\ell}{m_2}(m_1 + m_2) = 16\,\text{N}\,.$$

Esercizio 5.2. Una guida rettilinea si raccorda a una guida a forma di arco di cerchio (raggio $R = 0.5\,\text{m}$ e angolo sotteso $\theta = 60°$) come mostrato in figura. Un corpo di massa M, fermo alla quota $H = 3\,\text{m}$, viene lasciato scivolare lungo la guida e ne è proiettato fuori all'estremità B. Calcolare:

a. la velocità raggiunta dal corpo all'uscita dalla guida; [$v = 7,59\,\text{m/s}$]
b. la quota massima da esso raggiunta nel moto successivo. [$y = 80\,\text{cm}$]



Soluzione. Per la conservazione dell'energia totale abbiamo:

$$mgH = mgH_B + \tfrac{1}{2}mv^2\,,$$

dove H_B è la quota all'uscita della guida e v è il modulo della velocit all'uscita dalla guida. Pertanto,

$$v = \sqrt{2g\left(H - R(1-\sqrt{3}/2)\right)} \sim 7,58\,\mathrm{m/s}\,.$$

Le sue componenti cartesiane sono $v_y = v\sin(\pi/6) \sim 3,79\,\mathrm{m/s}$ e $v_x = v\cos(\pi/6) \sim 6,56\,\mathrm{m/s}$. Il moto successivo è di tipo parabolico con legge oraria

$$x(t) = v_x t\,, \qquad y(t) = v_y t - \tfrac{1}{2}gt^2 + H_B\,.$$

La quota massima viena raggiunta quanto $\dot{y}(t) = v_y - gt = 0$ e vale $y_{\max} = \frac{1}{2}v_y^2/g + H_B \sim 0,8\,\mathrm{cm}$.

Esercizio 5.3. Un blocco di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ viene lanciato su per un piano inclinato scabro ($\mu = 0.2$) con velocità $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$. Sapendo che l'angolo d'inclinazione è $\alpha = 30°$, calcolare

a. la distanza s percorsa dal blocco lungo il piano; [$s = 68\,\mathrm{cm}$]
b. il tempo impiegato a percorrerla, nonché il tempo complessivo di andata e ritorno; [$t_A = 0,45,\mathrm{s}\,,\ t_{AR} = 1,11\,\mathrm{s}$]
c. l'energia dissipata per attrito lungo l'intero percorso. [$E_{\mathrm{diss}} = 2,32\,\mathrm{J}$]

Soluzione. Il moto lungo il piano inclinato è descritto ha accelerazione costante $a = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = -6,6\,\mathrm{m/s^2}$. Il moto è uniformemente accelerato con $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ e la distanza massima percorsa vale $s_{\max} = -v_0^2/2a \sim 0,68\,\mathrm{m}$. Il tempo impiegato all'andata per percorrere tale tragitto è $t_A = -v_0/a \sim 0,45\,\mathrm{s}$.

Nella fase di discesa l'accelerazione è $a_R = -g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \sim 3,2\,\mathrm{m/s^2}$ e il tempo totale impiegato per percorrere la distanza $s_{\max}$ è $t_R = \sqrt{2s_{\max}/a_R} \sim 0,65\,\mathrm{s}$. Dunque, $t_{AR} = t_A + t_R = 1,1\,\mathrm{s}$.

L'energia dissipata per attrito lungo l'intero percorso è: $E_{\mathrm{diss}} = 2s_{\max}\mu mg\cos\alpha \sim 2,31\,\mathrm{J}$.

Esercizio 5.4. Un pendolo è costituito da una pallina di massa m sospesa a un filo di lunghezza $L = 1\,\mathrm{m}$. Il pendolo viene allontanato di un angolo $\theta_1 = 30°$ dalla verticale, verso sinistra, e abbandonato a se stesso. Il filo urta contro un piolo situato sulla verticale passante per il punto di sospensione a una distanza $d = 0.5\,\mathrm{m}$ da quest'ultimo, accorciando in tal modo la lunghezza del pendolo. Si trovi l'angolo θ_2 tra il filo e la verticale, quando la pallina è a destra del piolo. [$\theta_2 = 42,94°$]

Soluzione. Per la conservazione dell'energia abbiamo

$$mgL(1 - \cos\theta_1) = mg\frac{L}{2}(1 - \cos\theta_2)\,,$$

e dunque

$$\theta_2 = \cos^{-1}(\sqrt{3} - 1) \sim 42,94°\,.$$

Esercizio 5.5. Un blocco di massa $M = 4\,\mathrm{kg}$ viene posto lungo un piano inclinato privo di attrito che forma un angolo di 30° con l'orizzontale, a una distanza $L = 4\,\mathrm{m}$ da una molla di massa trascurabile e di costante elastica $k = 100\,N/\mathrm{m}$, fissata più in basso lungo il medesimo piano inclinato. Determinare il massimo accorciamento a cui è soggetta la molla se il blocco viene abbandonato a sè stesso [$\Delta\ell = -1.46\,\mathrm{m}$]

Soluzione. Per la conservazione dell'energia

$$mgL\sin\alpha = \tfrac{1}{2}k(\Delta\ell)^2 - mg\Delta\ell\sin\alpha\,.$$

Risolvendo per $\Delta\ell$

$$\Delta\ell = \frac{mg\sin\alpha - \sqrt{(mg\sin\alpha)^2 + 2kmgL\sin\alpha}}{k/2} \sim -1,46\,\mathrm{m}\,.$$

Esercizio 6.1. Una mazza da baseball di lunghezza ℓ è assimilabile a un'asta rigida con densità lineare (massa per unità di lunghezza) data da $\lambda = \lambda_0(1 + x^2/\ell^2)$. Si trovi la coordinata x del centro di massa in funzione di ℓ. [$x_{\rm cm} = \frac{9}{16}\ell$]

Soluzione. Per definizione, la posizione del centro di massa è data da

$$x_{\rm cm} = \frac{\int_0^\ell \lambda(x) x dx}{\int_0^\ell \lambda(x) dx} = \frac{\frac{1}{2}\ell^2 + \frac{1}{4}\ell^2}{\ell + \frac{1}{3}\ell} = \frac{9}{16}\ell\,.$$

Esercizio 6.2. Una bomba, inizialmente ferma, esplode in tre frammenti (A, B, C) aventi la stessa massa m. L'energia cinetica totale K dei tre frammenti è nota. Perché le loro direzioni di volo giacciono su di un piano? Sapendo che le direzioni di volo del primo e del secondo frammento formano un angolo di $3\pi/4$, e che quelle del secondo e del terzo frammento formano un angolo retto, esprimere in funzione di K e m il modulo delle velocità dei tre frammenti. [$v_A = \sqrt{K/m}\,,\ v_B = v_C = \sqrt{K/2m}$]

Soluzione. L'energia cinetica totale è data da:

$$K = \tfrac{1}{2} m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B v_B^2 + \tfrac{1}{2} m_C v_C^2\,.$$

Durante la deflagrazione si conserva la quantità di moto, ossia $m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C = 0$. Tenendo presente che, a meno di rotazioni rigide del sistema, le velocità hanno componenti

$$\vec{v}_A = (v_A, 0)\,, \quad \vec{v}_B = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}v_B, \tfrac{1}{\sqrt{2}}v_B)\,, \qquad \vec{v}_C = (-\tfrac{1}{\sqrt{2}}v_C, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}v_C)\,,$$

ricaviamo $v_B = v_C \equiv v$, $v_A = v\sqrt{2}$, e dunque $v = \sqrt{K/2m}$.

Esercizio 6.3. Un pendolo è costituito da una pallina di massa $M = 2\,\text{kg}$ appesa a un filo di lunghezza $L = 50\,\text{cm}$. Il pendolo viene allontanato di un angolo $\theta = 30°$ dalla verticale verso sinistra e poi lasciato libero di oscillare. Nel punto più basso dell'oscillazione la massa M urta elasticamente una massa $m = 1\,\text{kg}$ appesa a un filo di lunghezza $\ell = 20\,\text{cm}$. Determinare l'angolo massimo raggiunto dal secondo pendolo dopo l'urto. [$\theta' = 66,14°$]

Soluzione. La velocità v_M della particelle di massa M poco prima dell'urto vale

$$\tfrac{1}{2} m v_M^2 = MgL(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad v_M = \sqrt{2gL(1 - \tfrac{\sqrt{3}}{2})}\,.$$

L'urto è elastico e pertanto conserva l'energia e la quantità di moto:

$$\begin{aligned} Mv_M =& Mv'_M + mv_m \\ \tfrac{1}{2}Mv_M^2 =& \tfrac{1}{2}M(v'_M)^2 + \tfrac{1}{2}mv_m^2 \end{aligned}$$

dove v'_M e v_m sono rispettivamente le velocità delle particelle di massa M ed m subito dopo l'urto. Risolvendo il sistema si ha $v_m = 2Mv_M/(M+m)$. Pertanto l'angolo massimo raggiunto dal secondo pendolo dopo l'urto è

$$\cos\theta' = 1 - 4\,\frac{L}{\ell}\frac{M^2}{(M+m)^2}(1-\cos\theta) \sim 0,4 \quad \Rightarrow \quad \theta' = \cos^{-1}(0,4)\,.$$

Esercizio 6.4. Un cilindro di raggio $R_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e massa $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$ può ruotare attorno al proprio asse, disposto verticalmente. Sul cilindro è avvolta una corda, che viene poi fatta passare nella gola di una carrucola di raggio $R_2 = 5\,\mathrm{cm}$ e massa $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$. All'estremità libera della corda è attaccata una massa $m_3 = 2\,\mathrm{kg}$. Con quale accelerazione scende la massa m_3? Qual è la tensione del tratto di corda tra il cilindro e la carrucola? [$a = \frac{4}{15}g$, $T_1 = 13,08\,N$]

Soluzione. Per la conservazione dell'energia

$$mg\Delta h = \tfrac{1}{2}m_3v^2 + \tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \tfrac{1}{2}I_2\omega_2^2\,, \tag{1}$$

dove $I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2$ ed $I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2$ sono il momento d'inerzia del cilindro e della carrucola. Inoltre sappiamo che la variazione della quota è $\Delta h = \theta_1R_1 = \theta_2R_2$ e le velocità angolari sono legate alla velocità della massa attraverso le relazioni $\omega_1 = v/R_1$, $\omega_2 = v/R_2$. Sostituendo nella (1) e derivando rispetto al tempo otteniamo:

$$mgv = \left[m_3 + \frac{I_1}{R_1^2} + \frac{I_2}{R_2^2}\right]va\,, \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2m_3g}{m_1+m_2+2m_3} = \tfrac{4}{15}\,g\,.$$

Per ricavare le tensioni possiamo utilizzare

$$m_3a = m_3g - T_2\,, \quad I_1\omega_1 = R_1T_1\,, \quad I_2\omega_2 = -R_2T_1 + R_2T_2\,,$$

e duqnue

$$T_1 = \frac{m_1T_2}{m_1+m_2} = \frac{\frac{11}{15}m_1m_3g}{m_1+m_2} = \tfrac{11}{9}g\,.$$

Esercizio 6.5. Un cannone di massa $M = 1000\,\mathrm{kg}$, sulla sommità di una torre di altezza $h = 100\,\mathrm{m}$, spara orizzontalmente un proiettile di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ che raggiunge il suolo a distanza $D = 500\,\mathrm{m}$ dalla base della torre. Calcolare la forza F, orizzontale e costante, che un sistema di ammortizzatori deve esercitare sul cannone affinché, per il rinculo, esso arretri al più di un tratto $d = 20\,\mathrm{cm}$. [$F \geq m^2\,D^2\,g/(4\,d\,h\,M) = 30,66\,N$]

Soluzione. Subito dopo lo sparo il proiettile si muove di moto parabolico con velocità iniziale v_p ed è sottoposto alla forza peso. La sua legge oraria è dunque:

$$x(t) = v_p t\,, \qquad y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + h\,.$$

Sapendo che $h = 100\,\mathrm{m}$ e che il proiettile raggiunge il suolo ad una distanza $D = 500\,\mathrm{m}$ dalla torre, possiamo ricavare $v_p = D/\sqrt{2h/g} \sim 111\,\mathrm{m/s}$. Durante lo sparo la quantità di moto viene conservata, e dunque $Mv_c = mv_p$, ossia le velocità del cannone $v_c = 0,11\,\mathrm{m/s}$. La forza F che che un sistema di ammortizzatori deve esercitare sul cannone affinché esso arretri al più di $d = 20$ cm è data da

$$F\,d \geq \tfrac{1}{2}Mv_c^2 \qquad \Rightarrow \qquad F \geq \frac{m^2 v_p^2}{2dM} = \frac{m^2 D^2 g}{4dMh} \sim 30,66\,\mathrm{N}\,.$$

Esercizio 6.6. Un blocco di massa $M = 13\,\mathrm{kg}$ è in quiete su un piano orizzontale scabro. Una palla di stucco di massa $m = 400\,\mathrm{g}$ viene lanciata orizzontalmente verso il blocco. L'urto è completamente anelastico e la palla di stucco rimane attaccata al blocco. Il sistema così composto inizia a strisciare lungo il piano e si ferma dopo aver percorso una distanza $L = 15\,\mathrm{cm}$. Se il coefficiente di attrito dinamico è $\mu = 0.4$, quanto valeva la velocità della palla di stucco al momento dell'urto? [$v_i = 36,35\,\mathrm{m/s}$]

Soluzione. Se indichiamo con v_i la velocità della palla di stucco prima dell'urto e con v_f la velocità del sistema "palla di stucco pi blocco di massa M" dopo l'urto, per la conservazione della quantità di moto abbiamo $mv_i = (m + M)v_f$. Inoltre, l'energia che il sistema possiede subito dopo l'urto viene dissipata per attrito in una distanza L:

$$\tfrac{1}{2}(m+M)v_f^2 = \tfrac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v_i^2 = \mu(m+M)gL \quad \Rightarrow \quad v_i = \frac{m+M}{m}\sqrt{2\mu gL} \sim 36,33\,\mathrm{m/s}\,.$$

Esercizio 6.7. Una scala a pioli ha lunghezza $L = 12\,\mathrm{m}$, massa $M = 100\,\mathrm{kg}$ e il baricentro a metà della sua lunghezza. Sapendo che la parete verticale è liscia e che il coefficiente d'attrito tra la base della scala e il piano è $\mu_s = 0,35$, stabilire se il sistema si trova in equilibrio quando l'angolo con la parete verticale è $\alpha = 30°$. Se lo è, calcolare l'altezza massima a cui potrebbe salire una persona di massa $m = 70\,\mathrm{kg}$. [Si, $h = 7,88\,\mathrm{m}$]

Soluzione. Sulla scala agisce la forza peso applicata al centro di massa, la reazione vincolare ortogonale alla parete verticale $\vec{r}$ e una forza agente alla base della scala con componenti $\vec{N}$ ortogonale al pavimento e $\vec{f}$ ($|\vec{f}| < \mu_s|\vec{N}|$) longitudinale al pavimento. La condizione di equilibrio equivale quendue ad annullare la risltante delle forze e la risultante del momento delle forze:

$$\vec{F} = \vec{r} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = 0\,, \qquad \vec{M} = \vec{M}_r + \vec{M}_g + \vec{M}_N + \vec{M}_f = 0\,.$$

Se scegliamo come punto di riferimento la base della scala, abbiamo le tre equazioni

$$r - f = 0\,, \quad N - mg = 0\,, \quad -\tfrac{1}{2}mgL\sin\alpha + rL\cos\alpha = 0\,,$$

da cui $f/N = \frac{1}{2}\tan\alpha$ e pertanto la scala è in equilibrio poiché $\mu_s > \frac{1}{2}\tan\alpha = 1/2\sqrt{3}$. Se una persona di massa m sale sulla scala e si trova ad una distanza generica x lungo la scala (e pertanto ad una altezza $h = x\cos\alpha$) la condizione precendente viene modificata in

$$\mu_s \geq \frac{d}{L}\tan\alpha\,,$$

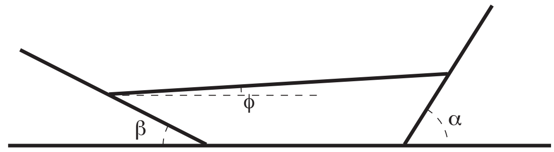
dove

$$d = \frac{\frac{1}{2}ML + mx}{M + m}$$

è la posizione del centro di massa lungo la scala. L'altezza massima è quindi data da

$$h = \frac{(M+m)L\mu_s}{m\sin\alpha} - \frac{ML}{2m\cos\alpha} \sim 7,88\,\mathrm{m}\,.$$

Esercizio 7.1. Gli estremi A e B di un'asta sottile ed omogenea di peso P e lunghezza ℓ sono vincolati a percorrere due guide rettilinee, prive di attrito e disposte in un piano verticale come mostrato in figura. Sapendo che $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/6$, si determini la posizione di equilibrio dell'asta. [$\tan\phi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha}\right)$]



Soluzione. Per la condizione di equilibrio richiediamo che le risultati delle forse esterne e del momento delle forze esterne siano nulle. Scegliendo come polo il baricentro dell'asta sospesa, ed indicando rispettivamente con $\vec{A}_\alpha$ ed $\vec{A}_\beta$ le reazioni vincolari delle guide con angoli α e β rispetto all'orizzontale, abbiamo

$$\tfrac{1}{2}LA_\alpha\cos(\alpha-\phi) = \tfrac{1}{2}LA_\beta\cos(\beta+\phi)\,, \qquad A_\alpha\sin\alpha = A_\beta\sin\beta\,,$$

e dunque

$$\tan\phi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\beta} - \frac{1}{\tan\alpha}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sim 0,37\,.$$

Esercizio 7.2. Le masse m_1 e $m_2 = 2\,m_1$ sono unite da un'asta di lunghezza h e di massa $m_0 = 3\,m_1$, libera di ruotare senza attrito in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo punto medio O. Si supponga che l'asta sia appoggiata a un vincolo ausiliario, che la tiene ferma in modo da formare un angolo $\theta = \pi/6$ con la verticale, con m_2 più basso di m_1. In queste condizioni, la massa m_2 viene colpita da un proiettile di massa $m_3 = m_1$, con velocità $\vec{v}$ orizzontale e ortogonale all'asse di rotazione dell'asta. Sapendo che il proiettile rimane conficcato nella massa m_2, determinare il minimo valore di v che consente al sistema di compiere un giro completo. [$v_{\min} = \sqrt{\frac{20}{3}(2+\sqrt{3})\,g\,h}$]

Soluzione. Nell'urto si conserva il momento angolare:

$$\tfrac{1}{2}m_3vh\cos\theta = I\omega\,,$$

dove

$$I = I_{\text{asta}} + m_1\left(\frac{h}{2}\right)^2 + m_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 + m_3\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12}m_0h^2 + \tfrac{1}{4}(m_1+m_2+m_3)h^2 = \tfrac{5}{4}m_1h^2\,,$$

è il momento d'inerzia del sistema finale, e dunque $\omega = \frac{\sqrt{3}v}{5h}$. Dopo l'urto possiamo applicare la conservazione dell'energia e scrivere:

$$\tfrac{1}{2}m_1 gh\cos\theta - \tfrac{1}{2}(m_2+m_3)gh\cos\theta + \tfrac{1}{2}I\omega^2 \geq \tfrac{1}{2}(m_2+m_3)gh - \tfrac{1}{2}m_1 gh\,,$$

ossia

$$v \geq \sqrt{\tfrac{20}{3}(2+\sqrt{3})gh}\,.$$

Esercizio 7.3. Un disco omogeneo di raggio R rotola su un piano orizzontale scabro. Si determini quale legame deve intercorrere tra la velocità iniziale del suo centro di massa $v_{0\mathrm{cm}}$ e la velocità angolare iniziale $\omega_{0\mathrm{cm}}$ rispetto all'asse ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro di massa, perché si possa verificare che:

a. a un certo punto il disco si arresti; $[\omega_{0\mathrm{cm}} = 2v_{0\mathrm{cm}}/R]$
b. a un certo istante il disco incominci a rotolare senza strisciare, con velocità del centro di massa pari a $v_{\mathrm{cm}} = -\frac{4}{9}v_{0\mathrm{cm}}$. $[\omega_{0\mathrm{cm}} = \frac{10}{3}v_{0\mathrm{cm}}/R]$

Soluzione. Il moto del cilindro è sottoposto alle seguenti leggi:

$$ma = -F_{\mathrm{att}}\,, \qquad I\frac{d\omega}{dt} = -F_{\mathrm{att}}R\,.$$

Integrando entrambe le equazioni una volta rispetto al tempo, e tenendo presente che per un disco omogeneo il momento d'inerzia vale $I = \frac{1}{2}mR^2$, abbiamo

$$v_{\mathrm{cm}}(t) = v_{0\,\mathrm{cm}} - \frac{F_{\mathrm{att}}t}{m}\,, \qquad \omega(t) = \omega_0 - \frac{2F_{\mathrm{att}}t}{mR}\,.$$

a. Il disco si arresta quando $v(t) = 0 = \omega(t)$, ossia al tempo

$$t = \frac{v_{0\,\mathrm{cm}}m}{F_{\mathrm{att}}} = \frac{mR\omega_0}{2F_{\mathrm{att}}} \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = \frac{2v_{0\,\mathrm{cm}}}{R}\,.$$

b. Al tempo $t = \tau$ sappiamo che $v_{\mathrm{cm}} = -\frac{4}{9}v_{0\mathrm{cm}}$ e $\omega(\tau) = v_{\mathrm{cm}}(\tau)/R = -\frac{4}{9}v_{0\mathrm{cm}}/R$, dunque

$$-\tfrac{4}{9}v_{0\,\mathrm{cm}} = v_{0\,\mathrm{cm}} - \frac{F_{\mathrm{att}}\tau}{m}\,, \qquad -\frac{4}{9}\frac{v_{0\,\mathrm{cm}}}{R} = \omega_0 - \frac{2F_{\mathrm{att}}\tau}{mR} \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = \frac{10}{3}\frac{v_{0\,\mathrm{cm}}}{R}\,.$$

Esercizio 7.4. Le masse m_1 e $m_2 = 2\,m_1$ sono unite da un'asta di lunghezza h e di massa $m_0 = 3\,m_1$, libera di ruotare senza attrito in un piano verticale attorno a un asse orizzontale passante per il suo punto medio O. Il sistema viene lasciato libero da una posizione iniziale nella quale m_2 si trova a una quota inferiore rispetto a m_1 e l'asta forma un angolo θ con la verticale. Trovare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema. $[T = 2\pi\sqrt{2\,h/g}]$

Soluzione. Il momento d'inerzia del sistema rispetto al punto O è:

$$I = I_{\text{asta}} + m_1 \left(\frac{h}{2}\right)^2 + m_2 \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{12} m_0 h^2 + \tfrac{1}{4} m_1 h^2 + \tfrac{1}{4} m_2 h^2 = m_1 h^2\,.$$

Se con O identifichiamo l'origine di un sistema cartesiano (unidimensionale) solidale con l'asta, orientato positivamente vero la massa m_2, la posizione del centro di massa sarà data da

$$x_{\text{cm}} = \frac{\tfrac{1}{2} m_2 h - \tfrac{1}{2} m_1 h}{m_0 + m_1 + m_2} = \tfrac{1}{12} h\,.$$

Dunque, da

$$I\frac{d\omega}{dt} = \tfrac{1}{12} h (m_0 + m_1 + m_2) g \sin\theta\,,$$

per piccole oscillazioni ($\sin\theta \sim \theta$) otteniamo

$$\ddot{\theta} - \omega^2 \theta = 0\,, \qquad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{2h}}\,,$$

da cui ricaviamo il periodo $T = 2\pi\sqrt{2h/g}$.

Esercizio 7.5. Un rullo cilindrico omogeneo, in moto traslatorio su un piano orizzontale con velocità di modulo $v_0 = 11\sqrt{2}\,\text{m/s}$, incomincia a salire a un certo istante $t = 0$ sopra un piano inclinato di un angolo $\alpha = \pi/4$ rispetto all'orizzontale. Il coefficiente di attrido dinamico è $\mu_d = 0.4$ (si trascuri l'attrito volvente). Si determini l'istante τ dopo il quale il rullo rotola senza strisciare, nonché lo spazio ℓ percorso dal rullo sopra il piano inclinato prima di fermarsi. $[\tau = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + 3\mu_d\,\cos\alpha)} = 1{,}02\,\text{s},\ \ell = 14{,}3\,\text{m}]$

Soluzione. Nel momento in cui il cilindro inzia a salire sul piano, il suo moto è descritto dalle equazioni:

$$v_{\text{cm}} = v_0 - (g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)t\,, \qquad I\omega = R\mu m g t\cos\alpha\,.$$

Dobbiamo trovare il tempo $t = \tau$ per il quale $v_{\text{cm}} = \omega R$, ossia

$$v_0 - (g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)\tau = 2\mu g\tau\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{v_0}{g\sin\alpha + 3\mu g\cos\alpha} \sim 1{,}02\,\text{s}\,.$$

Per calcolare la distanza totale percorsa dal cilindro prima che si fermi dobbiamo considerare le due fasi. Fino al tempo τ il cilindro percorre una distanza

$$\ell_1 = v_0\tau - \tfrac{1}{2}(g\sin\alpha + \mu g\cos\alpha)\tau^2 \sim 10,82\,\mathrm{m}\,.$$

Da quel momento in poi il cilindro inizia a rotolare senza strisciare, la forza di attrito non compie più lavoro e quindi, per la conservazione dell'energia,

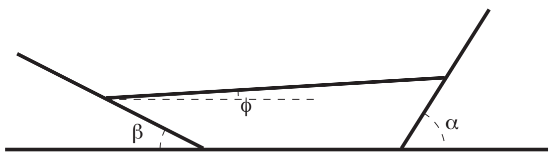
$$\tfrac{1}{2}I\omega^2(\tau) + \tfrac{1}{2}v_{\rm cm}^2(\tau) = mg\Delta\ell_2\sin\alpha\,,$$

da cui, conoscendo il momento d'inerzia del cilindro,

$$\Delta\ell_2 = \frac{3R^2\omega^2(\tau)}{4g\sin\alpha} \sim 3,45\,\mathrm{m}\,.$$

La distanza totale è $\ell = \ell_1 + \Delta\ell_2 = 14,27\,\mathrm{m}$.

Esercizio 7.6. Un disco omogeneo di raggio $R = 5\,\mathrm{cm}$ e massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ può rotolare senza strisciare lungo un piano inclinato, formante un angolo $\alpha = \pi/6$ con l'orizzontale. Il baricentro del disco è collegato tramite una molla a un punto fisso O. Determinare la legge del moto del sistema in termini della coordinata x che dà la posizione lungo il piano inclinato del punto P di contatto, supponendo che il disco venga lasciato scendere a partire dalla posizione in cui la molla non è sollecitata. (Lunghezza a riposo della molla $\ell_0 = 12\,\mathrm{cm}$; costante elastica della molla $k = 100\,N/\mathrm{m}$.) $[x(t) = \ell_0 + \frac{m\,g\,\sin\alpha}{k}(1-\cos\sqrt{\frac{2k}{3m}}t)]$



Soluzione. Rispetto al punto di contatto P del cilindro con il piano inclinato possiamo scrivere:

$$I_P\frac{d\omega}{dt} = R\left[k(x-\ell) - mg\sin\alpha\right]\,.$$

Ma $I_P = \frac{3}{2}mR^2$ e, poiché il disco non striscia, $\omega = v/R$. Pertanto

$$\ddot{x}(t) - \frac{2k}{3m}x(t) = -\frac{2k\ell}{3m} - \tfrac{2}{3}g\sin\alpha\,,$$

con la condizione che al tempo $t = 0$ la molla non sia sollecitata, ossia $x(0) = \ell$. La soluzione è

$$x(t) = \ell + \frac{mg}{k} \sin\alpha \left[1 - \cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{3m}} \right) \right] .$$

Esercizio 7.7. Un satellite artificiale di massa m, in moto intorno alla Terra su un'orbita circolare di raggio $R = 30000\,\mathrm{km}$, viene diviso da un'esplosione in due frammenti A e B, di massa $m_A = \frac{3}{4}\,m$ e $m_B = \frac{1}{4}\,m$. Subito dopo l'esplosione le velocità $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ dei due frammenti si trovano nel piano dell'orbita originale del satellite, e formano gli angoli $\alpha_A = \alpha_B = \pi/3$ con la velocità $\vec{v}$ del satellite al momento dell'esplosione. Si determino v_A e v_B e si descriva qualitativamente il moto dei due frammenti. [$v_A = \frac{4}{3}\,v = 4,86 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$, A su orbita ellittica. $v_B = 4\,v = 14,6 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s}$, B su orbita iperbolica]

Soluzione. Per la conservazione della quantità di moto $m\vec{v} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B$, ossia, sapendo che $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$ formano angoli di $\pi/3$ con la direzione di $\vec{v}$, abbiamo le due equazioni

$$mv = \tfrac{3}{8}mv_A + \tfrac{1}{8}mv_B\,, \qquad 0 = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\tfrac{3}{4}mv_A - \tfrac{1}{4}mv_B\right)\,,$$

da cui ricaviamo $v_B = 4v$ e $v_A = \frac{4}{3}v$.

Per descrivere qualitativamente le traiettorie dei due frammenti dobbiamo calcolarci le rispettive energie totali E_{tot}. Per $E_{\mathrm{tot}} < 0$ il moto avviene su un'orbita chiusa ellittica, per $E_{\mathrm{tot}} > 0$ l'orbita è un'iperbole.

Per il frammento A

$$E_{\mathrm{tot},\,A} = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 - \frac{G_N m_A M_{\mathrm{Terra}}}{R} \equiv \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 - m_A v^2 = -\tfrac{1}{9}m_A v^2 < 0\,,$$

e dunque la sua orbita è ellittica. (Nel secondo passaggio abbiamo usato il fatto che il satellite si muoveva su un'orbita circolare per la quale $G_N M_{\mathrm{Terra}}/R = v^2$.)

Analogamente, per il frammento B

$$E_{\mathrm{tot},\,B} = \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 - \frac{G_N m_B M_{\mathrm{Terra}}}{R} \equiv \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 - m_B v^2 = 7m_B v^2 < 0\,,$$

e dunque la sua orbita è iperbolica.

Esercizio 7.8. Un asteroide si muove su una traiettoria parabolica. Quando transita in un punto a distanza $D = 10^5\,\mathrm{km}$ dal centro della Terra, la sua velocità v_D è inclinata di una angolo $\alpha = \pi/6$ rispetto alla congiungente asteroide-Terra. Determinare la distanza minima dell'asteroide dalla Terra. [$r_{\min} = D/4 = 25000\,\mathrm{km}$]

Soluzione. L'equazione di una parabola in un sistema di coordinate in cui la terra occupa il fuoco è data da:

$$x = \frac{1}{2s}(y^2 - s^2)\,,$$

oppure in coordinate polari

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s}(1 - \cos\varphi)\,.$$

In tal caso la distanza minima dal fuoco è chiaramente data da

$$r_{\min} = \tfrac{1}{2}\,s\,.$$

Per determinare s imponiamo che $s = D(1 - \cos\varphi_0)$, e

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan\psi_0 = \tan\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - \cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\,.$$

Dopo un po' di manipolazioni trigonometriche giungiamo all'equazione

$$\cos\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi_0 = \frac{\pi}{3}\,.$$

Dunque, la distanza minima dell'asteroide dalla Terra è $r_{\min} = \frac{1}{2}\,s = \frac{1}{4}D$.

Un metodo alternativo per risolvere il problema sfrutta i principi di conservazione dell'energia e del momento angolare. Un'orbita parabolica descritta da asteroidi con energia totale nulla, ossia

$$\tfrac{1}{2}m_{\mathrm{ast}}v^2 = \frac{G_N M_{\mathrm{Terra}} m_{\mathrm{ast}}}{R}$$

Dunque per $R = D$ abbiamo $v_D = \sqrt{2G_N M_{\mathrm{Terra}}/D}$. Inoltre, per la conservazione del momento angolare, sapendo che per $R = D$ il vettore velocità forma un angolo di $\pi/6$ con la congiungente asteroide–Terra, mentre per $R = R_{\min}$ tale angolo è di $\pi/2$, abbiamo

$$m_{\mathrm{ast}}v_D\,D\sin\frac{\pi}{6} = m_{\mathrm{ast}}\sqrt{\frac{2G_N M_{\mathrm{Terra}}}{D}}\,D\sin\frac{\pi}{6} = m_{\mathrm{ast}}v_{\min}R_{\min} = m_{\mathrm{ast}}\sqrt{\frac{2G_N M_{\mathrm{Terra}}}{R_{\min}}}\,R_{\min}\,,$$

ossia $R_{\min} = \frac{1}{4}D$.