Esercizi

1. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx.$$

R. Procediamo effettuando il cambio di variabile $t=\sqrt{x}$ ossia

$$x=t^2 \quad \text{e} \quad dx=2t\,dt.$$

Quindi

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx=\int \frac{1}{t+t^2}\,2t\,dt=2\int \frac{1}{1+t}\,dt=2\log|1+t|+c$$

Se torniamo alla variabile x otteniamo

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+x}\,dx=2\log(1+\sqrt{x})+c$$

⋆⋆⋆

2. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \log^2 x\,dx.$$

R. Integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int \log^2 x\,dx &= = x\log^2 x-\int x\,d(\log^2 x)\\ &= x\log^2 x-\int x\,2\log x\,\frac{1}{x}\,dx\\ &= x\log^2 x-2\int \log x\,dx.\end{aligned}$$

Ricordando che una primitiva di $\log x$ è $x\log x-x$ si ha che

$$\int \log^2 x\,dx=x\log^2 x-2(x\log x-x)+c=x(\log^2 x-2\log x+2)+c.$$

⋆⋆⋆

3. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx.$$

R. Spostiamo il fattore $\sin(3x)$ nel differenziale e integriamo per parti

$$\begin{aligned}\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx &= \int e^{2x}\, d\left(-\frac{\cos(3x)}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x)\, e^{2x} + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\, d(e^{2x})\\ &= -\frac{1}{3}\cos(3x)\, e^{2x} + \frac{2}{3}\int \cos(3x)\, e^{2x}\, dx.\end{aligned}$$

Adesso applichiamo la stessa tecnica all'integrale che è rimasto

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)\, e^{2x}\, dx &= \int e^{2x}\, d\left(\frac{\sin(3x)}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}\sin(3x)\, e^{2x} - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\, d(e^{2x})\\ &= \frac{1}{3}\sin(3x)\, e^{2x} - \frac{2}{3}\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx.\end{aligned}$$

Riassumendo i risultati fin qui ottenuti abbiamo che

$$\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)\, e^{2x} + \frac{2}{9}\sin(3x)\, e^{2x} - \frac{4}{9}\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx.$$

Ora per concludere è sufficiente esplicitare l'integrale richiesto

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx = -\frac{1}{3}\cos(3x)\, e^{2x} + \frac{2}{9}\sin(3x)\, e^{2x} + c$$

e quindi

$$\int \sin(3x)\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{13}\, e^{2x}\ \left(2\sin(3x) - 3\,\cos(3x)\right) + c.$$

⋆⋆⋆

4. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int x^8 \log x \, dx.$$

R. Procediamo per parti integrando prima il fattore x

$$\begin{aligned}\int x^8 \log x \, dx &= \int \log x \, d(\frac{x^9}{9}) = \frac{x^9}{9} \log x - \int \frac{x^9}{9} \, d(\log x) \\ &= \frac{x^9}{9} \log x - \frac{1}{9} \int x^9 \, \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^9}{9} \log x - \frac{1}{9} \int x^8 \, dx \\ &= \frac{x^9}{9} \log x - \frac{x^9}{81} + c.\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

5. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} \, dx.$$

R. Integrando prima il fattore $1/x$ otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} \, dx &= \int \sqrt{1+\log x} \, d(\log x) \\ &= \int (1+\log x)^{\frac{1}{2}} \, d(1+\log x) = \frac{2}{3}(1+\log x)^{3/2} + c.\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

6. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \arctan x \, dx.$$

R. Procediamo per parti

$$\int \arctan x \, dx = x \ \arctan x - \int x \, d(\arctan x) = x \ \arctan x - \int x \, \frac{1}{1+x^2} \, dx.$$

Ora risolviamo a parte l'integrale rimasto

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \int \frac{1}{1+x^2} \, d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} \, d(1+x^2) = \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

Quindi

$$\int \arctan x \, dx = x \ \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + c.$$

⋆⋆⋆

7. Calcolare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1} \, dx.$$

R. Possiamo intanto fare la divisione (i polinomi hanno lo stesso grado)

$$\frac{x^2+4x+5}{x^2-1} = 1 + \frac{4x+6}{x^2-1}$$

così

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1} \, dx = x + \int \frac{4x+6}{x^2-1} \, dx.$$

Ora calcoliamo l'integrale rimasto. La fattorizzazione completa del polinomio al denominatore è

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

e dunque la decomposizione è

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{4x+6}{x^2-1} = \frac{(A+B)x + (B-A)}{x^2-1}$$

e si ricava facilmente che $A = -1$ e $B = 5$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+4x+5}{x^2-1}\,dx &= x + \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{5}{x-1}\right) dx \\ &= x - \log|x+1| + 5\log|x-1| + c \\ &= x + \log\frac{|x-1|^5}{|x+1|} + c.\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

8. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{1}{x^2(x+1)^2} = \frac{(A+C)x^3 + (2A+B+C+D)x^2 + (A+2B)x + B}{x^2(x+1)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 2A+B+C+D=0 \\ A+2B=0 \\ B=1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A=-2$, $B=1$, $C=2$ e $D=1$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) dx \\ &= -2\log|x| - \frac{1}{x} + 2\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + c \\ &= 2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + c.\end{aligned}$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2(x+1)^2}\,dx = \left[2\log\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right]_1^2 = 2\log\frac{3}{4} + \frac{2}{3}.$$

⋆⋆⋆

9. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

R. Il polinomio al denominatore è già fattorizzato e la decomposizione è

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax+B}{1+x^2} + \frac{Cx+D}{(1+x^2)^2}$$

dove A, B, C e D sono costanti da determinare. Svolgiamo i calcoli

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(1+x^2)^2}$$

e dunque

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ A + C = -2 \\ B + D = 5 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$ e $D = 4$. Quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2}\right) dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{1+x^2} + 4\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.\end{aligned}$$

Calcoliamo l'integrale che rimane per parti

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{1+x^2} - x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{2}\int x\,d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)} + c.\end{aligned}$$

Così

$$\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = 3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2} + c$$

e l'integrale definito richiesto è

$$\int_0^1 \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}\,dx = \left[3\arctan x + \frac{1+2x}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{3\pi+2}{4}.$$

⋆⋆⋆

10. Calcolare l'integrale definito

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx.$$

R. Per $x>0$, integriamo prima $1/x$ e poi aggiungiamo 3 nel differenziale

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(\log x) \\ &= \int \frac{1}{(3+\log x)^2}\,d(3+\log x) = -\frac{1}{3+\log x} + c.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_1^e \frac{1}{x(3+\log x)^2}\,dx = \left[-\frac{1}{3+\log x}\right]_1^e = \frac{1}{12}.$$

⋆⋆⋆

11. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

R. Effettuiamo il cambio di variabile

$$x = \sin t \quad \text{e} \quad dx = \cos t\, dt.$$

Invece di calcolare prima la primitiva e poi l'integrale definito proviamo a trasformare direttamente l'intervallo di integrazione:

$$x \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}] \quad \overset{t=\arcsin x}{\longrightarrow} \quad t \in [0, \frac{\pi}{3}].$$

Quindi

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 t}{\cos t} \cos t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t\, dt.$$

Ora proseguiamo il calcolo osservando che $\sin^3 t = \sin t\,(1-\cos^2 t)$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 t\, dt &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\,(1-\cos^2 t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos^2 t)\, d(-\cos t)\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2 t - 1)\, d(\cos t) = \left[\frac{\cos^3 t}{3} - \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{5}{24}.\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

12. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx.$$

R. Calcoliamo prima l'integrale indefinito con il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x\, dx &= \int \sin x\, d(-\cos x) = -\sin x\, \cos x - \int (-\cos x)\, d(\sin x)\\ &= -\sin x\, \cos x + \int \cos^2 x\, dx.\end{aligned}$$

Per continuare osserviamo che $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Quindi

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x\, \cos x + \int \left(1 - \sin^2 x\right)\, dx = -\sin x\, \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx.$$

Ora possiamo esplicitare l'integrale che stiamo cercando

$$2 \int \sin^2 x\, dx = -\sin x\, \cos x + x + c.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}\left[-\sin x\, \cos x + x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

⋆⋆⋆

13. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx.$$

R. Raccogliendo $\cos^2 x$ al denominatore, l'integrale diventa

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\tan^2 x + 1} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\, dx.$$

Quindi integriamo il fattore $1/\cos^2 x$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3\sin^2 x + \cos^2 x}\, dx &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 x + \frac{1}{3}}\, d(\tan x) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(\sqrt{3}\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

14. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\, 2^x}{|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx.$$

R. La funzione da integrare è continua in $[-1,2]\setminus\{0\}$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

e quindi conviene dividere l'intervallo di integrazione rispetto al punto di discontinuità

$$\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} 2^x\,dx + \int_{0}^{2} 2^x\,dx.$$

Si verifica facilmente che

$$\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\log 2} + c$$

e così l'integrale da calcolare diventa

$$\int_{-1}^{2} f(x) = -\frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{\log 2}\left[2^x\right]_{0}^{2} = \frac{5}{2\log 2}.$$

⋆⋆⋆

15. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{0}^{1} \arcsin x\,dx.$$

R. Cominciamo integrando per parti:

$$\int_{0}^{1} \arcsin x\,dx = \left[x\ \arcsin x\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} x\,d(\arcsin x) == \frac{\pi}{2} - \int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Ora calcoliamo a parte l'integrale che manca

$$\int_{0}^{1} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,d\left(x^2\right).$$

Quindi "aggiustiamo" il differenziale in modo che diventi uguale a $1 - x^2$:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1-x^2) = -\frac{1}{2}\left[2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 1.$$

Dunque

$$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \frac{\pi}{2} - 1.$$

⋆⋆⋆

16. Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^{16} \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\,dx.$$

R. Qui conviene fare la sostituzione $t = \sqrt{x}$ così $t^2 = x$, $2t\,dt = dx$. Trasformando anche l'intervallo di integrazione otteniamo

$$\int_0^2 \frac{1}{x+3\sqrt{x}+2}\,dx = \int_0^4 \frac{2t}{t^2+3t+2}\,dt.$$

Ora integriamo la funzione razionale: la decomposizione in questo caso è

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{2t}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$$

dove A e B sono costanti da determinare. Svolgendo i calcoli

$$\frac{2t}{t^2+3t+2} = \frac{(A+B)t + (2A+B)}{t^2+3t+2}$$

e si ricava facilmente che $A = -2$ e $B = 4$. Quindi

$$\begin{aligned}\int_0^4 \frac{2t}{t^2+3t+2}\,dt &= \int_0^4 \left(-\frac{2}{t+1} + \frac{4}{t+2}\right)dx \\ &= 2\left[\log\frac{(t+2)^2}{|t+1|}\right]_0^4 = 2\log\frac{36}{5} - 2\log 4 = 2\log\frac{9}{5}.\end{aligned}$$

⋆⋆⋆

17. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx.$$

R. Operiamo utilizzando il metodo dell'integrazione per parti

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\ d\left(\frac{\sin(4x)}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[\cos(3x)\, \sin(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(4x)\, d\left(\cos(3x)\right) \\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\, \sin(4x)\, dx.\end{aligned}$$

In modo simile

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\, \sin(4x)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin(3x)\ d\left(-\frac{\cos(4x)}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\left[\sin(3x)\, \cos(4x)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(4x)\, d\left(\sin(3x)\right) \\ &= \frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx.\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx = \frac{9}{16}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(3x)\, \cos(4x)\, dx$$

ossia l'integrale da determinare vale 0.

⋆⋆⋆

18. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^4}\int_0^{t^2} \arcsin(3x)\, dx.$$

R. Si tratta del limite di un rapporto di infinitesimi. Procediamo applicando il teorema di de l'Hôpital. Per calcolare la derivata del numeratore utilizziamo il teorema fondamentale del calcolo integrale: se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\arcsin(3x)$ allora $F'(x) = \arcsin(3x)$.

Dunque la derivata del numeratore è

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{t^2} \arcsin(3x)\,dx\right) = \frac{d}{dt}\big(F(t^2)-F(0)\big) = F'(t^2)(t^2)' = 2t\,\arcsin(3t^2)$$

mentre la derivata del denominatore è $(t^4)' = 4t^3$.
Dato che $\arcsin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\int_0^{t^2} \arcsin x\,dx \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t\,\arcsin(3t^2)}{4t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{6t^3}{4t^3} = \frac{3}{2}.$$

⋆⋆⋆

19. Calcolare il limite

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx.$$

R. Applichiamo il teorema di de l'Hôpital. Se $F(x)$ è una primitiva della funzione $\sin^2(2x)$ allora la derivata del numeratore è

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx\right) &= \frac{d}{dt}\big(F(t^2)-F(t)\big) = \sin^2(2t^2)\,(t^2)' - \sin^2(2t)\,(t)' \\ &= 2t\,\sin^2(2t^2) - \sin^2(2t).\end{aligned}$$

mentre quella del denominatore è $(t^3)' = 3t^2$.
Dato che $\sin t \sim t$ per t che tende a 0, abbiamo che

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^3}\int_t^{t^2} \sin^2(2x)\,dx \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2t\,\sin^2(2t^2)-\sin^2(2t)}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{8t^5-4t^2}{3t^2} = -\frac{4}{3}.$$

⋆⋆⋆

20. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^1 \log x\,dx.$$

R. Come abbiamo già visto

$$\int \log x\, dx = x\, \log x - x + c.$$

Quindi

$$\int_0^1 \log x\, dx = [x\, \log x - x]_0^1 = -1 - \lim_{x\to 0^+} (x\, \log x - x) = -1$$

$\star\star\star$

21. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^2 \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}\, dx.$$

R. La funzione data è continua e negativa sull'intervallo $(1,2]$. Prima di provare a calcolare una primitiva verifichiamo se la funzione è integrabile sull'intervallo. Possiamo utilizzare il criterio del confronto asintotico perché la funzione ha segno costante nell'intervallo di integrazione. Per $x \to 1^-$

$$\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}(x-1)+\frac{\pi}{2})} = -\frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2}(x-1))} \sim -\frac{1}{x-1}.$$

Quindi l'integrale diverge a $-\infty$.

$\star\star\star$

22. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\, dx$$

R. Integriamo prima il fattore $1/x$

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\, dx = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^3}\, d(\log x) = \left[-\frac{1}{2(\log x)^2}\right]_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

⋆⋆⋆

23. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,2)$.
R. La funzione data è continua sull'intervallo $(0,2]$ e quindi dobbiamo fare un'analisi asintotica solo per $x \to 0^+$

$$\frac{(\sin x)^a}{x^3\,(x+5)^4} \sim \frac{x^a}{x^3\,5^4} \sim \frac{1}{x^{3-a}}$$

Dunque la funzione è integrabile sull'intervallo $(0,2)$ se e solo se $\alpha = 3-a < 1$ ossia se $a > 2$.

⋆⋆⋆

24. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}}$$

è integrabile sull'intervallo $(0,+\infty) \setminus \{1\}$.
R. I punti da indagare sono tre: 0, 1 e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{x}{x^a} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = a-1 < 1$ ossia $a < 2$.
Per $x \to 1$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{|x-1|^{4a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 4a < 1$ ossia $a < \frac{1}{4}$.
Per $x \to +\infty$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a\,|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a\,x^{4a}} \sim \frac{1}{x^{5a}}$$

quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 5a > 1$ ossia $a > \frac{1}{5}$.
Unendo le tre condizioni abbiamo che $\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$.

⋆⋆⋆

25. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione
$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}}$$
è integrabile sull'intervallo $(1,3)$.
R. I punti da indagare sono due: 1 e 3.
Per $x \to 1^+$ abbiamo
$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}} = \frac{((x-1)(x+1))^a}{\log(1+(x-1))\,\sqrt{3-x}} \sim \frac{(x-1)^a}{x-1} = \frac{1}{(x-1)^{1-a}}$$
quindi, per l'integrabilità, $\alpha = 1-a < 1$ ossia $a > 0$.
Per $x \to 3^-$ abbiamo
$$\frac{(x^2-1)^a}{\log x\,\sqrt{3-x}} \sim \frac{1}{(3-x)^{\frac{1}{2}}}$$
quindi è integrabile "vicino" a 3 perché $\frac{1}{2} < 1$.
Quindi l'unica condizione per l'integrabilità sull'intervallo $(1,3)$ è: $a > 0$.

⋆⋆⋆

26. Calcolare l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3+(\log x)^2)}\,dx$$
R. La funzione data è continua in $[1,+\infty)$ e se facciamo un'analisi asintotica per $x \to +\infty$ vediamo subito che la funzione data è integrabile:
$$\frac{1}{x\,(3+(\log x)^2)} \sim \frac{1}{x\,(\log x)^2}.$$
Per calcolare l'integrale dobbiamo prima determinare una primitiva. Per $x > 0$
$$\int \frac{1}{x\,(3+(\log x)^2)}\,dx = \int \frac{1}{3+(\log x)^2}\,d(\log x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right) + c$$
Quindi
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\,(3+(\log x)^2)}\,dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{\log x}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

⋆⋆⋆

27. Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx.$$

R. La funzione data è continua e positiva in $(0,+\infty)$. Inoltre su questo intervallo è integrabile per il criterio del confronto asintotico:
per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}},$$

per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3} \sim \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Per il calcolo del valore dell'integrale improprio determiniamo una primitiva: poniamo $t = \sqrt{x}$, così $t^2 = x$, $2t\,dt = dx$ e

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx &= \int \frac{2t}{t+t^3}\,dt = 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt\\ &= 2\arctan(t)+c = 2\arctan(\sqrt{x})+c.\end{aligned}$$

Ora valutiamo la primitiva agli estremi di integrazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+(\sqrt{x})^3}\,dx = 2\left[\arctan(\sqrt{x})\right]_0^{+\infty} = \pi.$$

⋆⋆⋆