Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$
2. $\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x - \frac{1}{2} \int \left(1-x^2\right)^{-1/2} d\left(1-x^2\right) \\ &= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

2.
$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{e^x-1}{e^x+1} d\left(e^x\right)$$

Poniamo $e^x = t$, quindi procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t+1} dt &= \int \frac{t+1-2}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t+1}\right) dt \\ &= t - 2\ln|t+1| + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I\left(x\right) = e^x - 2\ln\left(e^x+1\right) + C$$

Esercizio 2

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{xdx}{1-\sqrt{x+1}}$

2. $\int \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}=\frac{x}{1-\sqrt{x+1}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}}=-\left(1+\sqrt{x+1}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{1-\sqrt{x+1}} &= -\int \left(1+\sqrt{x+1}\right)dx \\ &= -\left(\int dx+\int \sqrt{x+1}dx\right) \\ &= -x-\frac{2}{3}(x+1)^3\sqrt{x+1}+C\end{aligned}$$

2. Abbiamo:

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{(\sqrt[3]{x}-2)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\sqrt[3]{x}-2}=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4$$

Quindi procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}dx &= \int \left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)dx \\ &= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4}+4x+C\end{aligned}$$

Esercizio 3

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

2. $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-1$$

   Quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx&=\int\left(\sqrt{x}-1\right)dx\\&=\int\sqrt{x}dx-\int dx\\&=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int\frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x}dx&=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x}{\cos x}\right)dx\\&=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-2\int\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}\\&=\tan x-2\ln\left|\cos x\right|+C\end{aligned}$$

Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int\cos x\left(\tan x+e^{\sin x}\right)dx$
2. $\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\sin x}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int\cos x\left(\tan x+e^{\sin x}\right)dx&=\int\cos x\frac{\sin x}{\cos x}dx+\int\cos xe^{\sin x}dx\\&=-\cos x+\int e^{\sin x}d\left(\sin x\right)\\&=-\cos x+e^{\sin x}+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché:

$$\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\sin x}=\frac{\sin x\left(1-\sin^2 x\right)}{1+\sin x}=\sin x-\sin^2 x$$

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\sin x}dx&=\int\sin x dx-\int\sin^2 x dx\\&=-\cos x-\int\sin^2 x dx\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\int\sin^2 x dx$$

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned}\int\sin^2 x dx&=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\cos 2x dx\right)\\&=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C_1\\&=\frac{1}{4}\left(2x-\sin 2x\right)+C_1\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int\frac{\sin x-\sin^3 x}{1+\sin x}dx=-\cos x-\frac{1}{4}\left(2x-\sin 2x\right)$$

Esercizio 5

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int\frac{x^3+a^3}{x+a}dx$
2. $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}},\quad a\neq b$

***

Soluzione

1. Abbiamo:

$$\frac{x^3+a^3}{x+a}=\frac{\left(x+a\right)\left(x^2-ax+a^2\right)}{x+a}=x^2-ax+a^2$$

Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int\left(x^2-ax+a^2\right)dx&=\int x^2dx-a\int xdx+a^2\int xdx\\&=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+a^2x+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché razionalizzando:

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}dx&=\frac{1}{a-b}\left(\int\sqrt{x+a}dx-\int\sqrt{x+b}dx\right)\\&=\frac{2}{3\left(a-b\right)}\left[\sqrt{\left(x+a\right)^3}-\sqrt{\left(x+b\right)^3}\right]+C\end{aligned}$$

Esercizio 6

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int\frac{x+\left(\arcsin x\right)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$
2. $\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}&\int\frac{x+\left(\arcsin x\right)^3}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\left(\arcsin x\right)^3\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\\&=-\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{-1/2}d\left(1-x^2\right)+\int\left(\arcsin x\right)^3d\left(\arcsin x\right)\\&=-\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{4}\left(\arcsin x\right)^4+C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}-\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{\sqrt{1+x}}dx&=\int\sqrt{1+x}dx-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}\\&=\frac{2}{3}\left(1+x\right)^{3/2}-2\sqrt{1+x}+C\\&=2\sqrt{1+x}\left(x-2\right)+C\end{aligned}$$

Esercizio 7

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx$

2. $\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, poiché:

$$\frac{\sin^2 x}{1-\cos x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x} = 1+\cos x$$

Quindi:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x} dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{x},$$

cosicché:

$$x = t^2,\ dx = 2tdt$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} &= 2\int \frac{1+e^t}{t} tdt \\ &= 2\left(\int dt + \int e^t dt\right) \\ &= 2\left(t+e^t\right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{1+e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\left(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}\right) + C$$

Esercizio 8

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
2. $\int \sqrt{e^x - 1}dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \ln x,$$

cosicché:

$$dt = \frac{dx}{x}$$

L'integrale diventa:

$$I\left(t\right) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C,$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\left(\ln x\right) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{e^x - 1},$$

cosicché:

$$x = \ln\left(t^2+1\right),\ dx = \frac{2tdt}{t^2+1}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I\left(t\right) &= \int t \cdot \frac{2tdt}{t^2+1} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2+1} \\ &= 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) \\ &= 2\left(t - \arctan t\right) + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \sqrt{e^x - 1}dx = 2\left(\sqrt{e^x-1} - \arctan\sqrt{e^x-1}\right) + C$$

Esercizio 9

Calcolare i seguenti integrali

1. $\displaystyle\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

***

Soluzione

1. Scriviamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \int \sqrt{\sin x} \cos^2 x d(\sin x) \\ &= \int \sqrt{\sin x} \left(1 - \sin^2 x\right) d(\sin x) \end{aligned}$$

Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sin x$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \sqrt{t} dt - \int t^{5/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{7} t^{7/2} + C \\ &= \frac{2}{3} t\sqrt{t} - \frac{2}{7} t^3 \sqrt{t} + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \frac{2}{21} \sin x \sqrt{\sin x} \left(7 - 3\sin^2 x\right) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \tan t,$$

cosicché:

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}, \ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \cos t dt = \sin t + C$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Esercizio 10

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

***

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{2x-1},$$

cosicché:

$$x = \frac{1}{2}\left(t^2+1\right), \; dx = tdt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2+1)\,t} = 2\int \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= 2\arctan t + C$$

ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}} = 2\arctan\sqrt{2x-1} + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$x = \sin^2 t,$$

cosicché:

$$dx = 2\sin t\cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = 2\int \sin^2 t dt,$$

chè è un integrale noto:

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t) + C_1$$

ripristinando la variabile x:

$$t = \arcsin\sqrt{x}, \; \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x} \Longrightarrow \sin t\cos t = \sqrt{x(1-x)}$$

Quindi:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = \arcsin\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} + C$$