INTEGRALI IMPROPRI

Esercizi svolti

1. Usando la definizione, calcolare i seguenti integrali impropri:

   (a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\,\mathrm{d}x$;

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

   (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x^3\left(8+x^4\right)^{-5/3} + 2xe^{-x}\right)\mathrm{d}x$;

   (d) $\displaystyle\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\,\mathrm{d}x$;

   (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$.

2. Verificare la convergenza del seguente integrale improprio e calcolarne il valore:

   $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\,\mathrm{d}x \ .$$

3. Calcolare $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n}\,\mathrm{d}x$ per il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui l'integrale converge.

4. (a) Determinare tutti i valori di $a,\ b \in \mathbb{R}$ per i quali $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}}\,dx$ converge.

   (b) Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}\,\mathrm{d}x$.

5. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri.

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-2x-3|-x^2-2x-3}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_4^{5} \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,\mathrm{d}x$

6. Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge il seguente integrale improprio e calcolarlo per $\alpha = 0$:

   $$\int_2^{3} \frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

7. (a) Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ converge $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\,\mathrm{d}x$.

   (b) Calcolare l'integrale precedente per $a = 6$.

8. Studiare la convergenza assoluta del seguente integrale improprio :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1} \;\mathrm{d}x$$

9. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} \;\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} \;\mathrm{d}x$

10. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2 \log(1+\sqrt[3]{x})}$, studiarne il comportamento nell'origine e determinarne la parte principale.

    Studiare quindi la convergenza dell' integrale improprio :

    $$\int_0^{+\infty} f(x) \;\mathrm{d}x \quad .$$

CORREZIONE

1. (a) Per definizione di integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x$$

Svolgiamo l'integrale indefinito:

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x\ = \frac{1}{2}\cdot\int 2x\cdot(x^2+5)^{-\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+5)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{\sqrt{x^2+5}} + c$$

Dunque:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+5)^3}}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+5}}\right]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{t^2+5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

(b)

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\ = \int (\arctan x)(\arctan x)'\ \mathrm{d}x\ = \frac{1}{2}\arctan^2 x + c$$

Pertanto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{\arctan x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x\ = \frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\left(\arctan^2 t - 0\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

(c) Calcoliamo l'integrale indefinito sfruttandone la linearità e la formula di integrazione per parti:

$$\int\left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right)\ \mathrm{d}x\ = \int x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x\ + 2\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= \frac{1}{4}\int 4x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}}\ \mathrm{d}x\ + 2\int xe^{-x}\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{(8+x^4)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} + 2\left(-x\cdot e^{-x} - \int(-e^{-x})\ \mathrm{d}x\ \right) = -\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^4)^2}} - 2x\cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty}\left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right)\ \mathrm{d}x\ = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t\left(x^3(8+x^4)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\right)\ \mathrm{d}x\ =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left[-\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+t^4)^2}} - 2\cdot e^{-t}(t+1) + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} + 2\right] = \frac{3}{32} + 2 = \frac{67}{32}.$$

(Si ricordi che $\lim_{t\to+\infty} e^{-t}(t+1) = \lim_{t\to+\infty}\frac{t+1}{e^t} = 0$, in quanto il denominatore ha ordine di infinito superiore al numeratore).

(d) Per risolvere l'integrale indefinito, effettuiamo la sostituzione $\sqrt{2x} = t$, da cui $2x = t^2$, e infine $\mathrm{d}x = t\ \mathrm{d}t$.

Dunque:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t(t^2+1)} \cdot t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = \arctan t + c = \arctan \sqrt{2x} + c$$

Passiamo ora al calcolo dell' integrale improprio:

$$\int_{1/2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{1/2}^{b} \frac{1}{\sqrt{2x}(2x+1)}\, dx =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left[\arctan \sqrt{2x}\right]_{\frac{1}{2}}^{b} = \lim_{b \to +\infty} [\arctan \sqrt{2b} - \arctan 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

(e) Per calcolare l'integrale indefinito, dobbiamo risolvere un integrale di funzione razionale, il cui denominatore è già scomposto nel prodotto di fattori irriducibili.

Ricorriamo alla decomposizione in fratti semplici.

$$\frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (2B+C)x + A + 2C}{(x+2)(x^2+1)}$$

Uguagliando i polinomi a numeratore della prima e dell'ultima frazione, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 9 \\ A+2C &= 8 \end{cases} \iff \begin{cases} A &= -2 \\ B &= 2 \\ C &= 5 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\int \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{-2}{x+2} + \frac{2x+5}{x^2+1}\right)\ \mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{2x+5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \int \frac{-2}{x+2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{5}{x^2+1}\ \mathrm{d}x =$$

$$= -2\log|x+2| + \log(x^2+1) + 5\arctan x + c = \log(x^2+1) - \log(x+2)^2 + 5\arctan x + c$$

Per il calcolo dell' integrale improprio :

$$\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\ \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\log \frac{x^2+1}{(x+2)^2} + 5\arctan x\right]_0^t =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left[\log \frac{t^2+1}{(t+2)^2} + 5\arctan t - \log \frac{1}{4}\right] =$$

$$= \log 1 + 5\frac{\pi}{2} + \log 4 = \log 4 + \frac{5\pi}{2}.$$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\ dx \ = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\ dx \ + \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\ dx$.

I due integrali impropri convergono entrambi, perché, per $x \to 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)} \sim \frac{-1}{4\sqrt{|x|}}$$

e i due integrali impropri $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x}}\ dx$ e $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$ sono convergenti.

Calcoliamo il primo integrale indefinito, con la sostituzione $\sqrt{-x} = t$, da cui $x = -t^2$, $dx \ = -2t\ dt$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\ dx \ = \int \frac{1}{t(-t^2-4)}(-2t)\ dt \ = 2\int \frac{1}{t^2+4}\ dt \ = \arctan\frac{t}{2} + c = \arctan\frac{\sqrt{-x}}{2} + c$$

Calcoliamo il secondo integrale indefinito, con la sostituzione $\sqrt{x} = t$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\ dx \ = \int \frac{1}{t(t^2-4)}2t\ dt \ = 2\int \frac{1}{(t-2)(t+2)}\ dt \ = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right) dt \ =$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + c = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}\right| + c$$

Pertanto:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}\ dx \ = \lim_{a\to 0^-}\int_{-1}^{a} \frac{1}{\sqrt{-x}(x-4)}\ dx \ + \lim_{b\to 0^+}\int_{b}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}(x-4)}\ dx \ =$$

$$= \lim_{a\to 0^-}\left(\arctan\frac{\sqrt{-a}}{2} - \arctan\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\lim_{b\to 0^+}\left(\log\frac{1}{3} - \log\left|\frac{\sqrt{b}-2}{\sqrt{b}+2}\right|\right) = -\ \frac{1}{2}\log 3 - \arctan\frac{1}{2}.$$

3. Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^n} \sim \frac{1}{x^{n-1}}$$

quindi l'integrale converge se $n-1 > 1$, cioè se $n > 2$. Pertanto il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui l'integrale converge è $n = 3$. In tal caso:

$$\int \frac{x}{(\sqrt{x^2+3})^3}\ dx \ = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+3)^{-3/2}\ dx \ = -\ \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} + c.$$

Dunque:

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\ dx \ = \lim_{b\to+\infty}\int_{2}^{b} \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}\ dx \ = -\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{b^2+3}} - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

4. (a) Per $x \to 0^+$ si ha

$$\frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}} \sim \frac{1}{4^{b+1}x^a}$$

quindi l'integrale converge in un intorno destro di $x = 0$ se $a < 1$.

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{1}{x^a(4+9x)^{b+1}} \sim \frac{1}{9^{b+1}x^{a+b+1}}$$

quindi l'integrale converge se $a + b + 1 > 1$, cioè se $b > -a$.

Globalmente l'integrale converge per $a < 1$ e $b > -a$.

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(4+9x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t(4+9t^2)}\,2t\,\mathrm{d}t = 2\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{4+9t^2}\,\mathrm{d}t = 2\lim_{b\to+\infty}\left[\frac{1}{6}\arctan\frac{3t}{2}\right]_0^b =$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\arctan\frac{3b}{2} = \frac{\pi}{6}.$

5. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-2x-3| - x^2 - 2x - 3}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\frac{-2}{x^{\alpha-2}}\right)\mathrm{d}x + \int_3^{+\infty}\left(\frac{-4x-6}{x^\alpha}\right)\mathrm{d}x$.

L'integrale $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{-2}{x^{\alpha-2}}\right)\mathrm{d}x$ converge per $\alpha < 3$ mentre l'integrale $\displaystyle\int_3^{+\infty}\left(\frac{-4x-6}{x^\alpha}\right)\mathrm{d}x$ converge per $\alpha > 2$.

Pertanto l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|x^2-2x-3| - x^2 - 2x - 3}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge per $\alpha \in]2,3[$.

(b) $\displaystyle\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\,\mathrm{d}x = \int_4^5 \frac{(1-3x)(\sqrt{x}+2)}{x-4}\,\mathrm{d}x$.

Per $x \to 4$, si ha: $\displaystyle\frac{(1-3x)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \sim \frac{-44}{x-4}$. Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_4^5 \frac{1}{x-4}\,\mathrm{d}x$ diverge, anche l'integrale di partenza diverge.

6. Per $x \to 2^+$ si ha $\displaystyle\frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}} \sim \frac{2(x-2)^\alpha}{2(x-2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}$, quindi l'integrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{x[\sin(x-2)]^\alpha}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$ converge se $\alpha > -\frac{1}{2}$.

Per $\alpha = 0$ dobbiamo calcolare:

$$\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 2^+}\left[\sqrt{x^2-4}\right]_t^3 = \lim_{t\to 2^+}(\sqrt{5} - \sqrt{t^2-4}) = \sqrt{5}\ .$$

7. (a) Se $a \leq 2$, l'integrale diverge, data la presenza del fattore $\dfrac{1}{x-2}$. Se $a > 2$, l'integrale converge perché il fattore $\dfrac{1}{\sqrt{|x-3|}}$ non dà problemi di integrazione impropria (al finito), mentre all'infinito la frazione integranda si comporta come $\dfrac{1}{x^{3/2}}$ e dunque converge.

(b) Per $a = 6$, mediante la sostituzione $\sqrt{x-3} = t$ l'integrale diventa:

$\displaystyle\int_6^{+\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{2t}{(1+t^2)t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{\sqrt{3}}^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\lim_{b\to+\infty}\int_{\sqrt{3}}^b \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t =$

$\displaystyle= 2\lim_{b\to+\infty}(\arctan b - \arctan\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}.$

8. Dobbiamo studiare la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x$$

Utilizziamo il criterio del confronto. Osserviamo che $\dfrac{|\sin x|}{x^2+x+1} \leq \dfrac{1}{x^2+x+1}$, e che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x$$

è convergente. Infatti , il primo addendo non è un integrale improprio; quanto al secondo addendo, per $x \to +\infty$, $\dfrac{1}{x^2+x+1} \sim \dfrac{1}{x^2}$ e l'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, \mathrm{d}x$ converge.

Pertanto il nostro integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\, \mathrm{d}x$ converge assolutamente.

9. (a) Nell'intervallo $[0,1]$ la funzione integranda $f(x) = \dfrac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}$ presenta solo la singolarità in $x = 0$. Per capire il comportamento di $f(x)$ in $x = 0$, utilizziamo le seguenti equivalenze, valide per $x \to 0^+$:

$$\log(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x} \ \wedge \sin x \sim x \implies \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ converge, per il criterio del confronto asintotico converge anche il nostro integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin x}\, \mathrm{d}x$ (si osservi che, per $x \in [0,1]$, $\sin x \geq 0$ e dunque $f(x) \geq 0$ e si può applicare il criterio del confronto asintotico) .

(b) Nell'intervallo $[3, +\infty[$ la funzione integranda $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\ \sqrt{2x+3}}$ non presenta singolarità, ed è positiva. Pertanto conta solo il suo comportamento per $x \to +\infty$. Ora, per $x \to +\infty$:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+3}} \sim \frac{x}{x\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}} \ .$$

Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$ diverge, anche l'integrale di partenza $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-3}\sqrt{2x+2}}\, \mathrm{d}x$ risulta divergente.

10. Per $x \to 0$, si ha:

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \ \wedge \ \log(1 + \sqrt[3]{x}) \sim \sqrt[3]{x} \implies \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \sim \frac{x^2/2}{x^2 \sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}.$$

Dunque, per $x \to 0$, $f(x)$ ha ordine di infinito $\frac{1}{3}$, e la sua parte principale è la funzione $g(x) = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}$.

Prima di studiare la convergenza dell'integrale improprio, osserviamo che , per $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq 0$. Inoltre:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx = \int_0^{\beta} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx + \int_{\beta}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx \ , \ \forall \beta \in \mathbb{R}_+ \ .$$

In base allo studio fatto in precedenza, possiamo affermare che il primo addendo converge, perché, per $x \to 0$, $f(x) \sim g(x)$ e l'integrale improprio $\int_0^{\beta} g(x) \, dx$ è convergente.

Per studiare la convergenza del secondo addendo $\displaystyle\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx$, utilizziamo il criterio del confronto :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \leq \frac{2}{x^2} \ ,$$

per β abbastanza grande (deve essere $\beta > (e-1)^3$). Poiché l'integrale improprio $\displaystyle\int_{\beta}^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx$ converge, anche il secondo addendo converge.

Pertanto l'integrale di partenza $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2 \log(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx$ è convergente.