



Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Siano f e g le funzioni definite, per tutti gli x reali, da

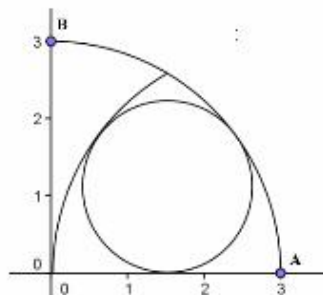
$$f(x) = |27x^3| \quad \text{e} \quad g(x) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right)$$

1. Qual è il periodo della funzione g ? Si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy .
2. Si scrivano le equazioni delle rette r e s tangenti, rispettivamente, a G_f e a G_g nel punto di ascissa $x = \frac{1}{3}$. Qual è l'ampiezza, in gradi e primi sessagesimali, dell'angolo acuto formato da r e da s ?
3. Sia R la regione delimitata da G_f e da G_g . Si calcoli l'area di R .
4. La regione R , ruotando attorno all'asse x , genera il solido S e, ruotando attorno all'asse y , il solido T . Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T .

PROBLEMA 2

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy sono assegnati l'arco di circonferenza di centro O e estremi $A(3, 0)$ e $B(0, 3)$ e l'arco L della parabola d'equazione $x^2 = 9 - 6y$ i cui estremi sono il punto A e il punto $(0, 3/2)$.

1. Sia r la retta tangente in A a L . Si calcoli l'area di ciascuna delle due parti in cui r divide la regione R racchiusa tra L e l'arco AB .
2. La regione R è la base di un solido W le cui sezioni, ottenute tagliando W con piani perpendicolari all'asse x , hanno, per ogni $0 \leq x \leq 3$, area $S(x) = e^{5-3x}$. Si determini il volume di W .
3. Si calcoli il volume del solido ottenuto dalla rotazione di R intorno all'asse x .
4. Si provi che l'arco L è il luogo geometrico descritto dai centri delle circonferenze tangenti internamente all'arco AB e all'asse x . Infine, tra le circonferenze di cui L è il luogo dei centri si determini quella che risulta tangente anche all'arco di circonferenza di centro A e raggio 3, come nella figura a lato.





Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Cosa rappresenta il limite seguente e qual è il suo valore?

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5\left(\frac{1}{2} + h\right)^4 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^4}{h}$$

2. Si illustri il significato di *asintoto* e si fornisca un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

3. La posizione di una particella è data da $s(t) = 20\left(2e^{-\frac{t}{2}} + t - 2\right)$. Qual è la sua accelerazione al tempo $t = 4$?

4. Quale è la capacità massima, in litri, di un cono di apotema 1 metro?

5. Siano dati nello spazio n punti $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$. Quanti sono i segmenti che li congiungono a due a due? Quanti i triangoli che hanno per vertici questi punti (supposto che nessuna terna sia allineata)? Quanti i tetraedri (supposto che nessuna quaterna sia complanare)?

6. Sia $f(x) = 5\sin x \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x - \frac{5}{2}\sin 2x - \cos 2x - 17$; si calcoli $f'(x)$.

7. E' dato un tetraedro regolare di spigolo l e altezza h . Si determini l'ampiezza dell'angolo α formato da l e da h .

8. Qual è il valor medio di $f(x) = \frac{1}{x}$ da $x = 1$ a $x = e$?

9. Il problema di Erone (matematico alessandrino vissuto probabilmente nella seconda metà del I secolo d.C.) consiste, assegnati nel piano due punti A e B, situati dalla stessa parte rispetto ad una retta r , nel determinare il cammino minimo che congiunge A con B toccando r . Si risolva il problema nel modo che si preferisce.

10. Quale delle seguenti funzioni è positiva per ogni x reale?

A) $\cos(\sin(x^2 + 1))$ B) $\sin(\cos(x^2 + 1))$ C) $\sin(\ln(x^2 + 1))$ D) $\cos(\ln(x^2 + 1))$

Si giustifichi la risposta.

Soluzioni dei problemi della maturità scientifica A.S. 2011/2012

Problema 1

1. Per determinare il periodo di g occorre determinare il più piccolo $T > 0$ per cui valga, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi(x+T)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right).$$

Essendo la funzione $y = \sin z$ periodica di periodo 2π si ha

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi(x+T)\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi x\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\pi(x+T) = \frac{3}{2}\pi x + 2k\pi$$

per un qualche $k \in \mathbb{Z}$. Risolvendo in T si ottiene $\frac{3}{2}\pi T = 2k\pi$, che ha come più piccolo valore positivo $T = \frac{4}{3}$ corrispondente a $k = 1$.

Passiamo allo studio delle funzioni. Per quel che riguarda f , osserviamo che risulta continua e ben definita per tutti i valori reali. Essa è inoltre una funzione pari, in quanto composizione di una funzione pari e una dispari. Quindi basta studiarla nel semiasse delle ascisse nonnegative, dove vale $f(x) = 27x^3$ (essendo il grafico su $x \leq 0$ il simmetrico rispetto all'asse y di quello nel semiasse $x \geq 0$). Il limite a $+\infty$ è $+\infty$ (e quindi anche quello a $-\infty$, per parità) e la funzione si annulla solo in $x = 0$. Ricordiamo poi che se f è una funzione pari, nei punti $x < 0$ ove è n volte derivabile vale

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x),$$

relazione che fornisce il valore delle derivate nel semiasse delle ascisse negative, una volta noto quello nel semiasse delle ascisse positive. Si ha quindi, sempre per $x > 0$

$$f'(x) = 81x^2 > 0 \quad \forall x > 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = 162x > 0 \quad \forall x > 0,$$

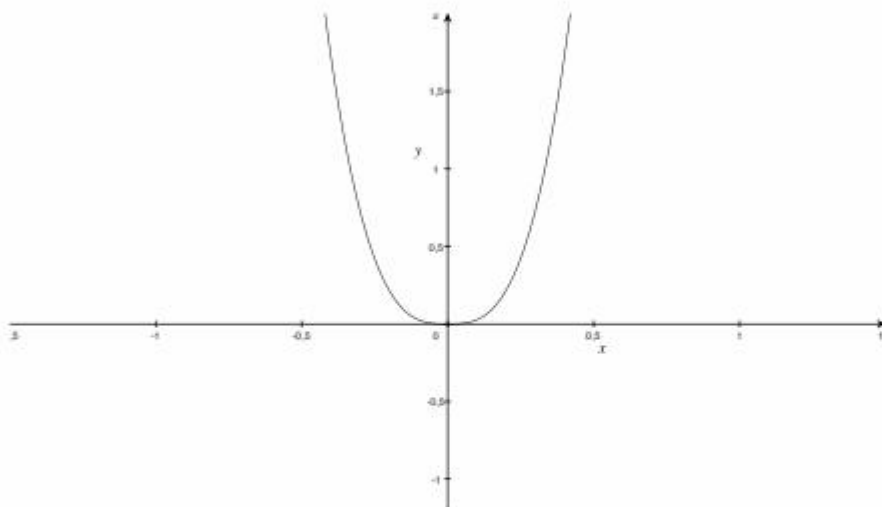
da cui si deduce

$$f' = -81x^2 < 0 \quad \forall x < 0 \quad \text{e} \quad f''(x) = -162x > 0 \quad \forall x < 0.$$

Poichè i limiti destro e sinistro della derivata seconda in 0 coincidono, f è derivabile due volte in zero. Essa è inoltre decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$ e convessa (non vi sono flessi in quanto la derivata seconda è *ovunque* non negativa). Si osservi che f non possiede derivata terza in $x = 0$, in quanto, sapendo che $f''(0) = 0$, si ha

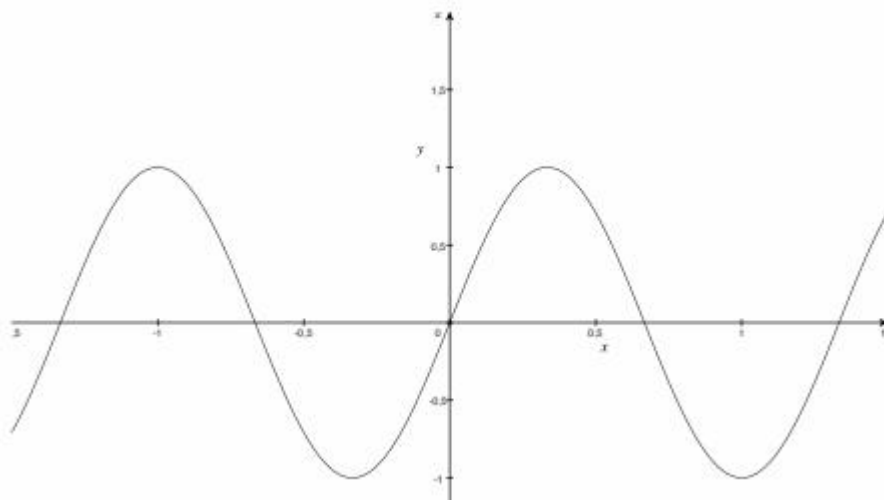
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = 162 \neq -162 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f''(x) - f''(0)}{x}.$$

Il grafico di f è riportato nella figura seguente.



Per quel che riguarda il grafico di g , esso è ottenuto dal grafico di $y = \sin z$ mediante un'omotetia sulle ascisse di centro 0 e di ragione $\frac{2}{3\pi}$. Il suo grafico è quindi simile (nel senso omotetico) a quello della funzione $y = \sin z$: la funzione è crescente in $[0, \frac{1}{3}] \cup [1, \frac{4}{3}]$ e decrescente altrimenti, è concava in $[0, \frac{2}{3}]$ e convessa altrimenti, presenta un massimo in $(\frac{1}{3}, 1)$, un minimo in $x = (1, -1)$ e un flesso in $(\frac{2}{3}, 0)$ (l'altro essendo in $(0, 0)$ o $(\frac{4}{3}, 0)$, contando la periodicità). Il suo grafico è rappresentato in figura.

Per quel che riguarda il grafico di g , esso è ottenuto dal grafico di $y = \sin z$ mediante un'omotetia sulle ascisse di centro 0 e di ragione $\frac{2}{3\pi}$. Il suo grafico è quindi simile (nel senso omotetico) a quello della funzione $y = \sin z$: la funzione è crescente in $[0, \frac{1}{3}] \cup [1, \frac{4}{3}]$ e decrescente altrimenti, è concava in $[0, \frac{2}{3}]$ e convessa altrimenti, presenta un massimo in $(\frac{1}{3}, 1)$, un minimo in $x = (1, -1)$ e un flesso in $(\frac{2}{3}, 0)$ (l'altro essendo in $(0, 0)$ o $(\frac{4}{3}, 0)$, contando la periodicità). Il suo grafico è rappresentato in figura.



2. Ricordando la formula della retta tangente a f nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

si ha

$$r : y = 9\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1, \quad s : y = 0\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1.$$

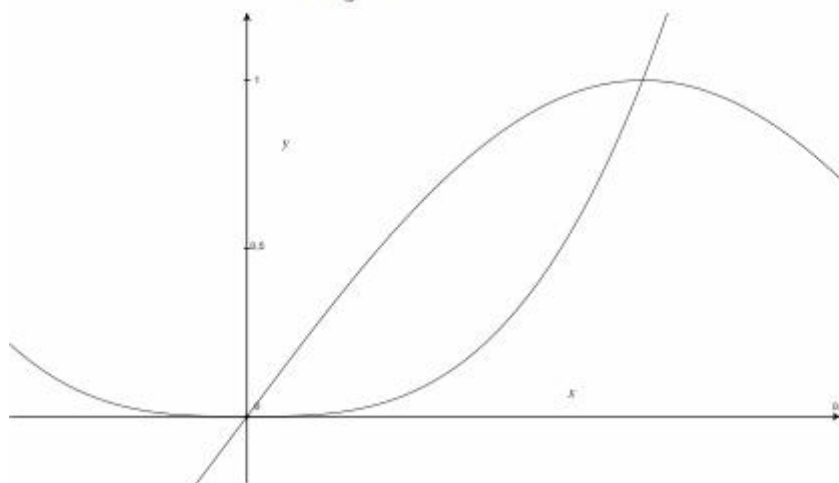
Essendo s una retta parallela all'asse x , l'angolo acuto fra r e s è lo stesso che r forma con l'asse delle ascisse. Il coefficiente angolare di r è la tangente dell'angolo che essa forma con l'asse delle x e quindi l'angolo cercato α soddisfa (in radianti) $\tan \alpha = 9$. Si ha allora

$$\alpha = \arctan 9 \simeq 1,46 \text{ rad} \Rightarrow \alpha \simeq \frac{360}{2\pi} 1,46 \simeq 83^\circ 66'.$$

3. Determiniamo i punti d'intersezione fra G_f e G_g . Si ha $g(0) = 0 = f(0)$ e in $x = \frac{1}{3}$ si ha $g(x) = 1 = f(x)$ e quindi G_f e G_g si intersecano in $(0,0)$ e in $(\frac{1}{3}, 1)$. Poichè g è strettamente concava nell'intervallo $(0, \frac{1}{3})$ e f strettamente convessa, le funzioni non possono intersecarsi ulteriormente nell'intervallo $(0, \frac{1}{3})$. Non vi sono ulteriori intersezioni neanche per $x > \frac{1}{3}$ in quanto, essendo f strettamente crescente sul semiasse positivo delle x ,

$$g(x) \leq 1 < f(x) \quad \forall x > \frac{1}{3}.$$

Infine non vi sono intersezioni nel semiasse negativo delle x : in $(-\frac{2}{3}, 0)$ vale infatti $g(x) < 0 < f(x)$, mentre per $x \leq -\frac{2}{3}$ vale $g(x) \leq 1 < 8 = f(-\frac{2}{3}) \leq f(x)$. Quindi la *regione finita* di piano R delimitata da G_f e G_g , rappresentata in figura, ha ascisse comprese fra 0 e $\frac{1}{3}$, e nell'intervallo $[0, \frac{1}{3}]$ vale $f(x) \geq g(x)$.



La sua area si calcola perciò come

$$\begin{aligned}\text{Area}(R) &= \int_0^3 g(x) - f(x) dx = -2 \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi x\right)}{3\pi} - \frac{27}{4}x^4 \Big|_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{12} \simeq 0,129.\end{aligned}$$

4. Il volume delle due regioni si calcola mediante il metodo degli indivisibili: lo mostriamo per il solido S , essendo l'argomento analogo per il solido T . La sezione $S(x)$ di S mediante un piano ortogonale all'asse delle ascisse e passante per x è una corona circolare di raggio esterno $g(x)$ e raggio interno $f(x)$. La sua area è data quindi dalla differenza delle aree dei cerchi di raggio rispettivamente $g(x)$ e $f(x)$, ossia

$$\text{Area}(S(x)) = \pi(g^2(x) - f^2(x)).$$

Il metodo degli indivisibili garantisce allora che il volume di S sia

$$\text{Volume}(S) = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} (g^2(x) - f^2(x)) dx = \pi \int_0^{\frac{1}{3}} \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi x\right) - 729x^6 dx.$$

Per il calcolo del volume di T occorre determinare l'espressione dell'area delle sezioni $T(y)$ in funzione di y . A tale scopo invertiamo le funzioni nell'intervallo $[0, \frac{1}{3}]$, ottenendo

$$\begin{aligned}f(x) = y &\Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{3} \\ g(x) = y &\Leftrightarrow x = g^{-1}(y) = \frac{2}{3\pi} \arcsin y,\end{aligned}$$

da cui, osservando che

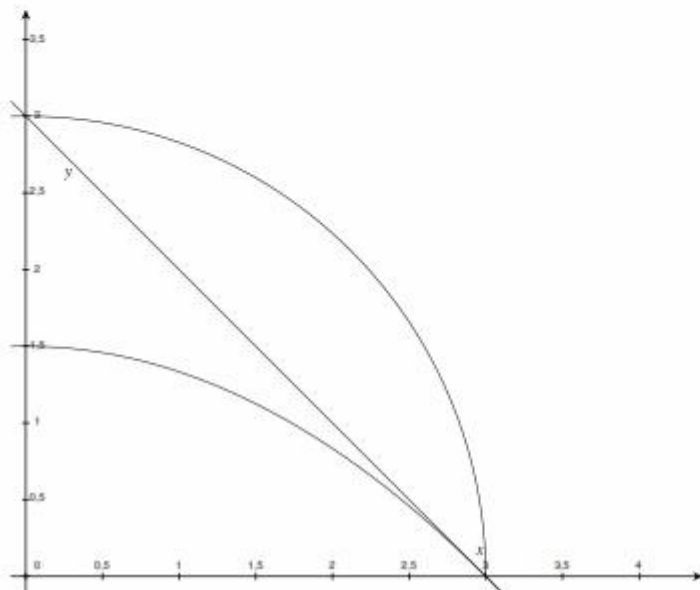
$$\begin{aligned}x \in [0, \frac{1}{3}] &\Leftrightarrow f(x), g(x) \in [0, 1], \\ f(x) \leq g(x) &\Leftrightarrow f^{-1}(y) \geq g^{-1}(y),\end{aligned}$$

si ottiene

$$\text{Volume}(T) = \pi \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{y^2}}{9} - \frac{4}{9\pi^2} (\arcsin y)^2 dy.$$

Problema 2

1. Osserviamo che L è descritto dalla relazione $y = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{6} =: f(x)$, e studiamo $f(x)$. Essa è una parabola di vertice $(0, \frac{3}{2})$, con la concavità rivolta verso il basso e quindi una funzione strettamente concava. La sua retta tangente in $x = 3$ ha equazione $y = r(x) = 3 - x$ e interseca l'arco di circonferenza solo in A e in B . Essendo f concava, essa è dominata da ogni sua retta tangente; quindi, valendo in $[0, 3)$ $f(x) < r(x)$, L interseca r (e quindi anche l'arco di circonferenza) solo in A . Le tre funzioni sono rappresentate nella figura seguente.



L'area della regione di piano delimitata da r e la circonferenza si ottiene sottraendo all'area del quarto di cerchio quella del triangolo rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 3)$ e $(3, 0)$ ed è pari a $\frac{9}{4}\pi - \frac{9}{2} \simeq 2,57$.

L'area compresa fra L e r si calcola mediante integrale:

$$\int_0^3 (3 - x) - \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{x^3}{18} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \Big|_0^3 = \frac{3}{2}.$$

2. Mediante il principio degli indivisibili, si ha che il volume del solido W è pari all'integrale

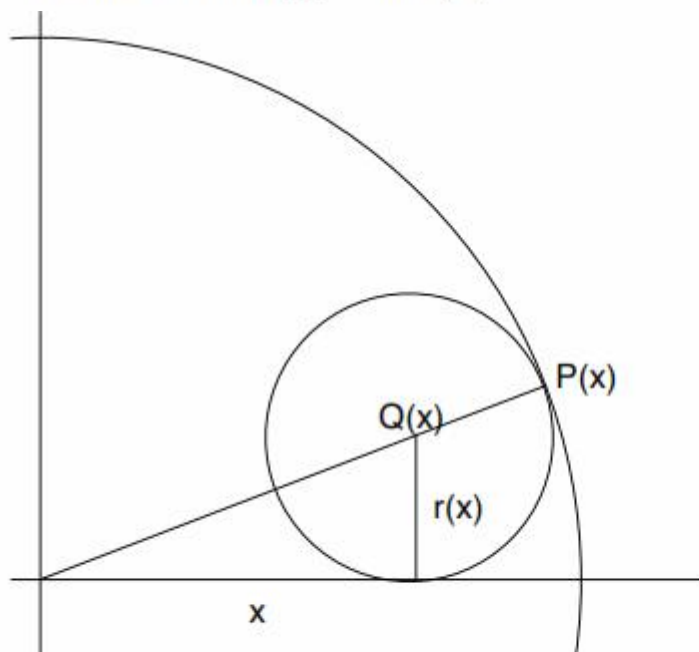
$$\int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 e^{5-3x} dx = \frac{e^{5-3x}}{-3} \Big|_0^3 = \frac{e^5 - e^{-4}}{3}.$$

3. Il volume cercato é la differenza fra quello del solido ottenuto mediante rotazione attorno all'asse x dell'arco AB e quello mediante rotazione di L . La rotazione dell'arco determina una semisfera di raggio 3, di volume $\frac{4}{3}\pi 3^3 = 18\pi$. Mediante la formula per il volume dei solidi di rotazione (si veda il punto quattro del problema 1) si ottiene che il volume del solido ottenuto per rotazione della curva L :

$$\begin{aligned}\pi \int_0^3 f^2(x)dx &= \pi \int_0^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{6}\right)^2 dx \\ &= \frac{9}{4}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{180} \Big|_0^3 \pi = \frac{18}{5}\pi.\end{aligned}$$

Il volume cercato é quindi $18\pi - \frac{18}{5}\pi = \frac{72}{5}\pi$.

4. Osserviamo innanzitutto il seguente fatto: dati due cerchi di cui uno tangente internamente all'altro, i centri dei cerchi e il punto di tangenza sono collineari. Sia allora $C(x)$ un cerchio tangente internamente all'arco AB in $P(x)$ e all'asse x in $(x, 0)$. Siano $Q(x)$ e $r(x)$ rispettivamente il centro ed il raggio di $C(x)$.



Per l'osservazione iniziale, $Q(x)$ giace sul raggio del cerchio esterno passante per $P(x)$. Consideriamo il triangolo (rettangolo per la condizione

di tangenza all'asse x) di vertici l'origine O , $Q(x)$ e $(x, 0)$: i cateti hanno lunghezza x e $r(x)$, mentre l'ipotenusa ha lunghezza $3 - r(x)$. Il teorema di Pitagora fornisce quindi

$$(3 - r(x))^2 = r^2(x) + x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 9 - 6r(x) = x^2$$

che, essendo $r(x)$ l'ascissa di $Q(x)$, è la relazione cercata $r(x) = f(x)$. Viceversa, il cerchio $C(x)$ di centro $Q(x) = (x, f(x))$ e raggio $f(x)$ è tangente all'asse delle ascisse qualsiasi sia $f > 0$. Esso è inoltre tangente alla circonferenza di raggio 3 perchè per il teorema di Pitagora il punto sulla retta $OQ(x)$ distante $f(x)$ da $Q(x)$ dista 3 dall'origine, e quindi giace sull'arco AB ; per simmetria attorno alla retta $OQ(x)$ non vi sono altri punti d'intersezione, visto che due cerchi distinti si intersecano in al più in due punti.

La circonferenza cercata deve essere simmetrica attorno alla retta verticale passante per il punto di intersezione dei due archi di circonferenza. Per simmetria l'ascissa di tale punto deve essere $\frac{3}{2}$, ed essendo $f(\frac{3}{2}) = \frac{9}{8} = r(x)$, la circonferenza cercata ha centro $(\frac{3}{2}, \frac{9}{8})$ e raggio $\frac{9}{8}$.

Quesito n.1

Il limite in questione è la derivata della funzione $f(x) = 5x^4$ nel punto $x = \frac{1}{2}$. Essendo $f'(x) = 20x^3$, il suo valore è $\frac{5}{2}$.

Quesito n.2

Un *asintoto obliquo* a $+\infty$ per una funzione f definita in un intorno di $+\infty$ è una retta $r(x)$ per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - r(x) = 0,$$

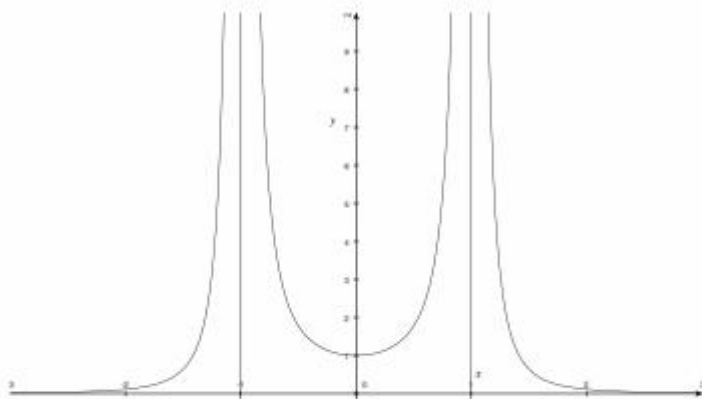
ed analogamente per gli asintoti obliqui a $-\infty$. Quando il coefficiente angolare di $r(x)$ è zero, si parla di *asintoto orizzontale*. Un *asintoto verticale da destra* in x_0 per una funzione definita in un intorno destro di x_0 eccetto $\{x_0\}$ consiste nella retta verticale di equazione $x = x_0$ quando il limite da destra di f in x_0 esista e valga

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty,$$

e analoga definizione per gli asintoti verticali da sinistra. Se $x = x_0$ è asintoto verticale sia da destra che da sinistra e i limiti destri e sinistri a x_0 coincidono, allora si dice brevemente che è un *asintoto verticale*. Un esempio di funzione che presenti un asintoto orizzontale e due verticali è

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)^2},$$

che ha $y = 0$ come asintoto orizzontale (sia a $+\infty$ che a $-\infty$) e $x = 1$ e $x = -1$ come asintoti verticali (la funzione é continua in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$). Il grafico é riportato in figura.



Quesito n.3

L'accelerazione della particella é pari alla derivata seconda della sua funzione posizione. Si ha

$$s'(x) = 20(1 - e^{-\frac{x}{2}}), \quad s''(x) = 10e^{-\frac{x}{2}},$$

e quindi la sua accelerazione é $s''(4) = 10/e^2$.

Quesito n.4

Sia r il raggio di base del cono ed h la sua altezza. Il suo volume é allora $\pi r^2 h/3$. Essendo l'apotema 1, per il teorema di Pitagora raggio di base ed altezza soddisfano $r^2 + h^2 = 1$ e quindi possiamo esprimere il volume del cono in base alla sua altezza come $V(h) = \frac{\pi}{3}(1 - h^2)h$. Studiando la cubica ottenuta si ha $V' = \frac{\pi}{3}(1 - 3h^2)$, che risulta positiva se e solo se $h \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. La funzione V , considerata solo per valori nonnegativi di h , ha quindi un massimo globale in $h = \frac{1}{\sqrt{3}}$, dove assume valore $V_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$, espresso in metri cubi. La capacità massima espressa in litri é quindi $\frac{2000\pi}{9\sqrt{3}}$.

Quesito n.5

In base alle condizioni poste un segmento é univocamente determinato da una coppia non ordinata di punti, un triangolo da una terna non ordinata e un tetraedro da una quaterna non ordinata. Essendo i punti n , ricordando la definizione combinatoria del coefficiente binomiale e indicando con $\#$ la cardinalità dell'insieme, si ha

$$\#\{\text{segmenti}\} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\#\{\text{triangoli}\} = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

$$\#\{\text{tetraedri}\} = \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Quesito n.6

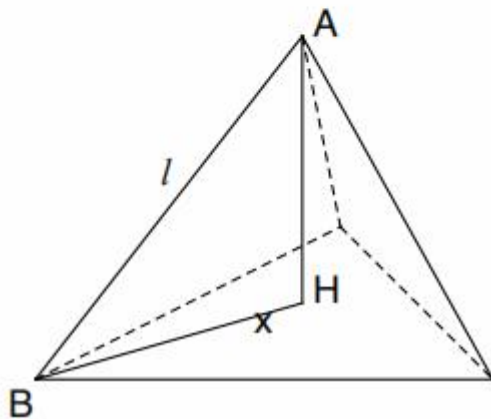
Utilizzando le formule di duplicazione

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

si ottiene $f(x) = -17$, la cui derivata é zero.

Quesito n.7

Sia x la distanza fra il piede H di un'altezza AH e uno spigolo B della faccia a cui appartiene H .



Essendo il tetraedro regolare, la faccia corrispondente é un triangolo equilatero di lato l e H , per simmetria, é il baricentro di tale triangolo. L'altezza del triangolo é $k = \sqrt{3}l$, che viene divisa dal baricentro in due parti, una il doppio dell'altra. Quindi $x = \frac{2}{3}k$, ossia $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Essendo il triangolo ABH rettangolo in H , l'angolo α fra l ed h espresso in radianti soddisfa $l \sin \alpha = x$, da cui $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. L'angolo cercato in gradi sessagesimali é perciò

$$\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 35^{\circ}26'.$$

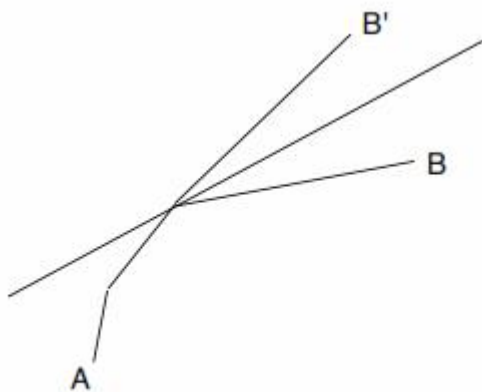
Quesito n.8

Si ha

$$\int_1^e f dx = \frac{1}{e-1} \int_1^e \frac{1}{x} dx = \frac{1}{e-1}.$$

Quesito n.9

Supponiamo di partire da A e consideriamo il punto B' simmetrico rispetto alla retta r di B . Qualsiasi percorso da A e B che tocchi r fornisce un percorso di medesima lunghezza da A a B' , riflettendo attorno a r tutto il percorso dal primo punto di contatto con r . Viceversa qualsiasi percorso da A a B' tocca necessariamente r e fornisce un percorso da A a B di medesima lunghezza riflettendo attorno a r tutto il percorso dal primo punto di contatto a B' .



Quindi il problema di Erone é equivalente alla determinazione del percorso minimo da A a B' senza alcun vincolo, che chiaramente é il segmento $\overline{AB'}$. Per le proprietà della riflessione, il percorso migliore consiste quindi in due segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, con $C \in r$ determinato univocamente dalla condizione che gli angoli che r forma con i segmenti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$ siano uguali.

Quesito n.10

L'unica funzione positiva per ogni $x \in \mathbb{R}$ é la A . Infatti, posto $z = x^2 + 1$, si ha $-1 \leq \sin z \leq 1$ e nell'intervallo $[-1, 1]$ la funzione coseno é sempre positiva, in quanto $\pi/2 > 1$. La B si annulla per $x = \sqrt{\frac{\pi}{2} - 1}$, la C per $x = 0$ e la D per $x = \sqrt{e^{\pi/2} - 1}$.