



Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \sin \pi x$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy , si studino f e g e se ne disegnano i rispettivi grafici G_f e G_g .
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R .
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

PROBLEMA 2

Sia f la funzione definita sull'insieme \mathbf{R} dei numeri reali da

$$f(x) = (ax + b) e^{-\frac{x}{3}} + 3$$

dove a e b sono due reali che si chiede di determinare sapendo che f ammette un massimo nel punto d'ascissa 4 e che $f(0) = 2$.

1. Si provi che $a = 1$ e $b = -1$.
2. Si studi su \mathbf{R} la funzione $f(x) = (x - 1) e^{-\frac{x}{3}} + 3$ e se ne tracci il grafico Γ nel sistema di riferimento Oxy .
3. Si calcoli l'area della regione di piano del primo quadrante delimitata da Γ , dall'asse y e dalla retta $y = 3$.
4. Il profitto di una azienda, in milioni di euro, è stato rappresentato nella tabella sottostante designando con x_i l'anno di osservazione e con y_i il corrispondente profitto.

Anno	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65

Si cerca una funzione che spieghi il fenomeno dell'andamento del profitto giudicando accettabile una funzione g definita su \mathbf{R}^+ se per ciascun x_i , oggetto dell'osservazione, si ha: $|g(x_i) - y_i| \leq 10^{-1}$. Si verifichi, con l'aiuto di una calcolatrice, che è accettabile la funzione f del punto 2 e si dica, giustificando la risposta, se è vero che, in tal caso, l'evoluzione del fenomeno non potrà portare a profitti inferiori ai 3 milioni di euro.



Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

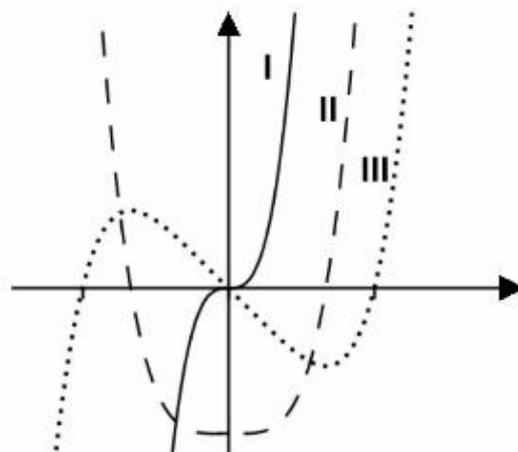
- Un serbatoio ha la stessa capacità del cilindro di massimo volume inscritto in una sfera di raggio 60 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?
- Si trovi il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto di coordinate (4; 0).
- Sia R la regione delimitata dalla curva $y = x^3$, dall'asse x e dalla retta $x = 2$ e sia W il solido ottenuto dalla rotazione di R attorno all'asse y . Si calcoli il volume di W .
- Il numero delle combinazioni di n oggetti a 4 a 4 è uguale al numero delle combinazioni degli stessi oggetti a 3 a 3. Si trovi n .
- Si trovi l'area della regione delimitata dalla curva $y = \cos x$ e dall'asse x da $x = 1$ a $x = 2$ radianti.
- Si calcoli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}$$

- Si provi che l'equazione: $x^{2011} + 2011x + 12 = 0$ ha una sola radice compresa fra -1 e 0 .
- In che cosa consiste il problema della *quadratura del cerchio*? Perché è così spesso citato?
- Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.
- Nella figura a lato, denotati con I, II e III, sono disegnati tre grafici. Uno di essi è il grafico di una funzione f , un altro lo è della funzione derivata f' e l'altro ancora di f'' .

Quale delle seguenti alternative identifica correttamente ciascuno dei tre grafici?

	f	f'	f''
A)	I	II	III
B)	I	III	II
C)	II	III	I
D)	III	II	I
E)	III	I	II



Si motivi la risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso della calcolatrice non programmabile.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

Soluzioni dei problemi della maturità
scientifica A.S. 2010/2011

Problema 1

1. (a) Studio di f

Il dominio di f è \mathbb{R} , e vale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

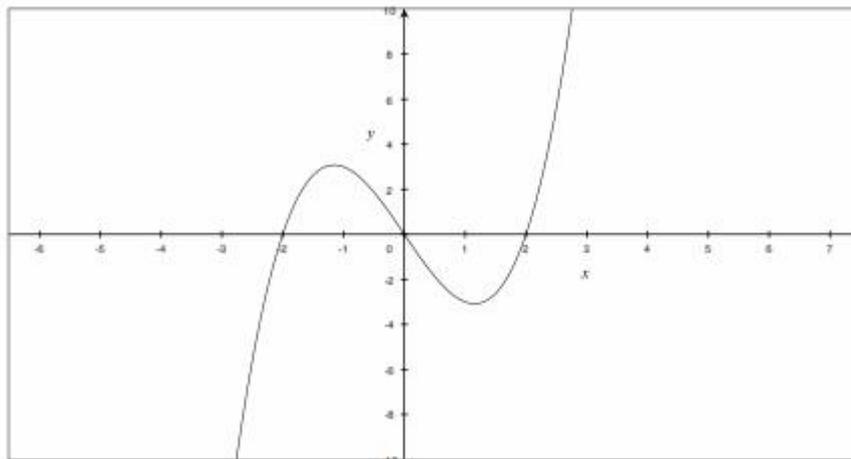
Il segno di f si ottiene fattorizzando il polinomio come $x^3 - 4x = x(x-2)(x+2)$, ed è quindi positivo in $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$, negativo in $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ e nullo in $x = -2, 0, 2$. La derivata è

$$f'(x) = 3x^2 - 4 = 3 \left(x^2 - \frac{4}{3} \right) = 3 \left(x - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \left(x + \frac{2}{\sqrt{3}} \right),$$

che risulta quindi negativa in $(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}})$ (che è quindi l'insieme di decrescenza), positiva in $(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty)$ (zona di crescita) e nulla in $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. La funzione quindi ha un massimo locale in $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ e un minimo locale in $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, di ordinate rispettivamente $\frac{16}{3\sqrt{3}}$ e $-\frac{16}{3\sqrt{3}}$.

La derivata seconda di f è data da $f''(x) = 6x$, ed è quindi positiva in $(0, \infty)$, negativa in $(-\infty, 0)$ e si annulla in 0. Ciò significa che f è concava in $(-\infty, 0)$, convessa in $(0, \infty)$ e $x = 0$ è l'unico punto di flesso.

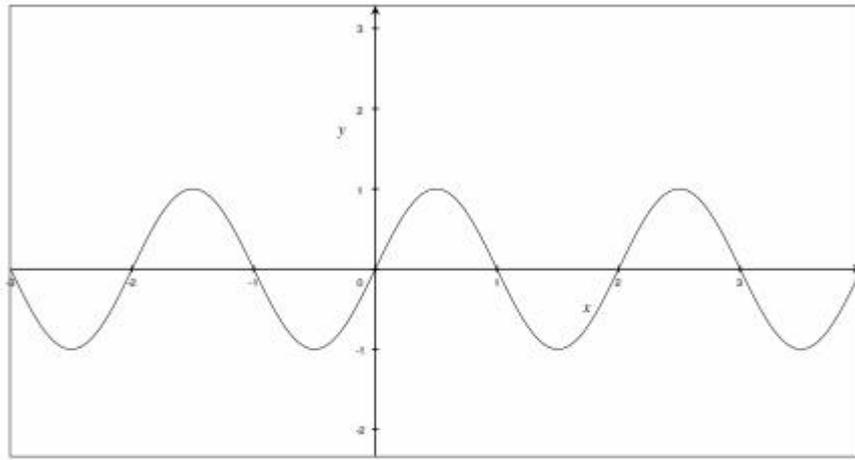
Il grafico di f è il seguente



(b) Studio di g

Il grafico di g è un'omotetia di ragione $\frac{1}{\pi}$ e centro l'origine del grafico della funzione $\sin x$. La funzione si annulla sugli interi, ed ha massimi globali in $x = \frac{1}{2} + 2k$ e minimi globali in $x = \frac{3}{2} + 2k$, di ordinata rispettivamente 1 e -1 , dove $k \in \mathbb{Z}$ è un intero arbitrario. Negli intervalli del tipo $[2k, 2k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$, la funzione g è concava, e negli intervalli $[2k-1, 2k]$ convessa.

Il grafico di g è il seguente



2. Per determinare le ascisse dei punti d'intersezione basta risolvere

$$x^3 - 4x = -3 \Leftrightarrow x^3 - 4x + 3 = 0$$

Una soluzione si trova per tentativi ed è $x = 1$. Sfruttando la regola di Ruffini si fattorizza allora il polinomio come

$$x^3 - 4x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3),$$

ed il fattore di secondo grado ha radici

$$x_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Le ascisse dei punti d'intersezione sono quindi 1 e $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

I punti a tangente orizzontale di G_g si ottengono risolvendo $g'(x) = \pi \cos \pi x = 0$, che fornisce $\pi x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, ovvero $x = \frac{1}{2} + k$. Le ordinate dei punti d'intersezione sono 1 quando k è pari, e -1 quando k è dispari. Nell'intervallo delle ascisse $x \in [-6, 6]$ si hanno quindi i seguenti punti a tangente orizzontale:

$$\left(\pm \frac{1}{2}, \pm 1\right), \quad \left(\pm \frac{3}{2}, \pm 1\right), \quad \left(\pm \frac{5}{2}, \pm 1\right), \quad \left(\pm \frac{7}{2}, \pm 1\right), \quad \left(\pm \frac{9}{2}, \pm 1\right), \quad \left(\pm \frac{11}{2}, \pm 1\right).$$

3. Mostriamo innanzitutto che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$.

Questo è certamente vero per motivi di segno in $[0, 1]$.

In $[1, \frac{3}{2}]$ entrambe le funzioni sono convesse, avendo derivata seconda

$$f''(x) = 6x, \quad g''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

sempre positiva in $[1, \frac{3}{2}]$. Nei punti $x = 1$ e $x = \frac{3}{2}$ la f è minore di -1 , quindi lo è per convessità in tutto $[1, \frac{3}{2}]$, mentre $g \geq -1$ sempre.

Per dimostrare che $f(x) \leq g(x)$ in $[\frac{3}{2}, 2]$ cominciamo col dimostrare che $f'(x) \geq g'(x)$ in $[\frac{3}{2}, 2]$. A questo fine dividiamo l'analisi negli intervalli $[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ e $[\frac{5}{3}, 2]$. In $[\frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$ si ha

$$g'(x) = \pi \cos \pi x \leq \pi \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \leq \frac{11}{4} = f'(\frac{3}{2}) \leq f'(x),$$

essendo (per convessità), crescenti sia g' che f' . Mentre per $x \in [\frac{5}{3}, 2]$ si ha

$$g'(x) = \pi \cos \pi x \leq \pi \leq \frac{13}{3} = f'(\frac{5}{3}) \leq f'(x).$$

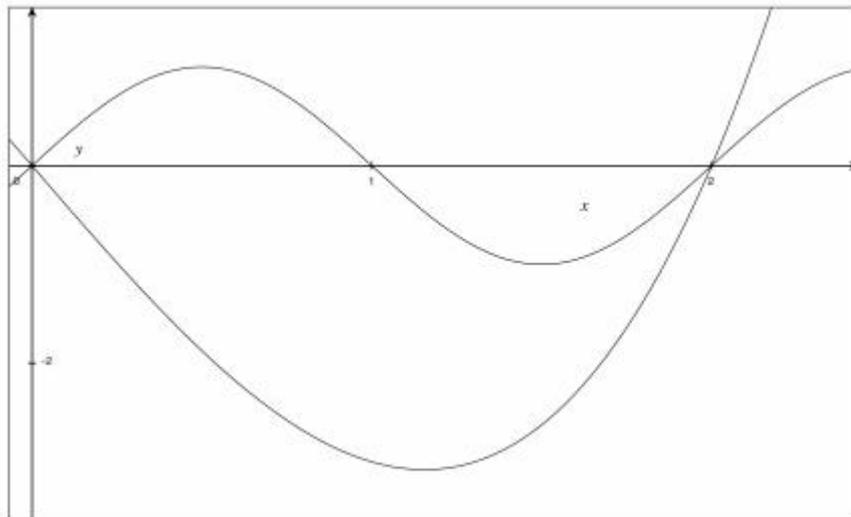
Abbiamo quindi mostrato che per $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ vale

$$g'(x) \leq f'(x). \quad (1)$$

Osservando ora che $f(2) = g(2) = 0$ abbiamo per $x \in [\frac{3}{2}, 2]$ la disuguaglianza

$$\begin{aligned} f(x) &= f(2) - \int_x^2 f'(y) dy = - \int_x^2 f'(y) dy \\ &\stackrel{(1)}{\leq} - \int_x^2 g'(y) dy = g(2) - \int_x^2 g' dy = g(x). \end{aligned}$$

In conclusione, abbiamo mostrato che $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [0, 2]$. La regione R è descritta nella figura seguente



Ergo possiamo calcolarne l'area R come

$$\begin{aligned}\text{Area}(R) &= \int_0^2 g(x) - f(x) dx \\ &= \int_0^2 \sin \pi x dx - \int_0^2 x^3 - 4x dx \\ &= \left[-\frac{\cos \pi x}{\pi} \right]_0^2 - \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 = 4.\end{aligned}\quad (2)$$

4. Il volume V del liquido si può calcolare mediante il principio di Cavalieri, integrando in x l'area della sezione della vasca S_x a distanza x dall'asse delle ordinate. Questa, per ipotesi, è un rettangolo di altezza $h(x) = 3 - x$ e base $g(x) - f(x)$, la cui area è quindi

$$\text{Area}(S_x) = (3 - x)(\sin \pi x - x^3 + 4x).$$

Il volume V sarà dato quindi dall'integrale

$$\int_0^2 (3-x)(\sin \pi x - x^3 + 4x) dx = 12 - \int_0^2 x \sin \pi x dx + \int_0^2 x^4 - 4x^2 dx, \quad (3)$$

avendo sfruttato la (2) per ottenere

$$\int_0^2 3(\sin \pi x - x^3 + 4x) dx = 3 \int_0^2 \sin \pi x - x^3 + 4x dx = 3 \cdot 4.$$

Calcoliamo separatamente i due integrali a secondo membro della (3). Per il primo addendo, un'integrazione per parti fornisce

$$\begin{aligned}\int_0^2 x \sin \pi x dx &= \left[x \frac{-\cos \pi x}{\pi} \right]_0^2 - \int_0^2 -\frac{\cos \pi x}{\pi} dx \\ &= -\frac{2}{\pi} - \left[\frac{-\sin \pi x}{\pi^2} \right]_0^2 = -\frac{2}{\pi},\end{aligned}$$

mentre per il secondo

$$\int_0^2 x^4 - 4x^2 dx = \left[\frac{x^5}{5} - 4 \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = -\frac{64}{15}.$$

Inserendo nella formula sopra per il volume si ha

$$V = 12 + \frac{2}{\pi} - \frac{64}{15} \simeq 8,370 \text{ metri cubi.}$$

Poiché un metro cubo è pari a mille litri, il volume della vasca è pari a circa 8370 litri.

Problema 2

Osserviamo che la funzione f è ben definita su tutta la retta reale per ogni valore di a, b .

1. Poiché $f(0) = b+3$, la condizione $f(0) = 2$ implica $b = -1$. La derivata di $f(x) = (ax - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ è data da

$$f'(x) = ae^{-\frac{x}{3}} - \frac{ax - 1}{3}e^{-\frac{x}{3}} = e^{-\frac{x}{3}} \left(a - \frac{ax - 1}{3} \right).$$

Osserviamo che $e^{-\frac{x}{3}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ergo affinché la derivata si annulli in $x = 4$ deve valere

$$a - \frac{4a - 1}{3} = 0,$$

che implica $a = 1$. Con tale scelta di a abbiamo

$$f'(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}(4 - x),$$

e dunque vale $f'(x) < 0$ per $x > 4$ e $f'(x) > 0$ per $x < 4$, quindi f è crescente in $(-\infty, 4)$ e decrescente in $(4, \infty)$, il che vuol dire che ha il massimo assoluto in $x = 4$.

2. Sappiamo già che $f(x) = (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3$ è ben definita su tutta la retta reale, che è crescente in $(-\infty, 4)$ e decrescente in $(4, \infty)$. Calcoliamo i limiti di $f(x)$ per $x \rightarrow \pm\infty$. Ricordando che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\frac{x}{3}} &= +\infty, \end{aligned}$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{e^{\frac{x}{3}}} = 0, \quad (4)$$

(che segue, ad esempio, dalla regola di de l'Hôpital), abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)e^{-\frac{x}{3}} + 3 = 3. \end{aligned}$$

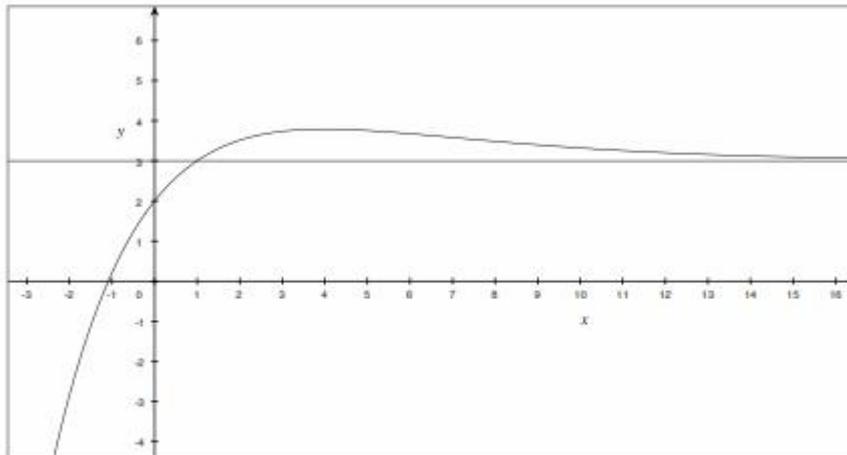
In particolare, f ha l'asintoto orizzontale $y = 3$, e, poiché per $x > 4$ è decrescente, a tale asintoto si avvicina dall'alto.

Conosciamo già l'andamento di $f'(x)$, passiamo quindi allo studio di $f''(x)$. Abbiamo

$$f''(x) = -\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(4-x) - \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(4-x+3) = -\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}}(7-x).$$

Dal fatto che $\frac{1}{9}e^{-\frac{x}{3}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, deduciamo che il segno della derivata seconda coincide col segno dell'espressione $-(7-x) = x-7$. Quindi abbiamo che $x=7$ è l'unico punto di flesso di f , che $f''(x) > 0$ in $(7, +\infty)$ (che quindi è la regione di convessità di f) e $f''(x) < 0$ in $(-\infty, 7)$ (che quindi è la regione di concavità di f).

Il grafico di f è quindi dato da:



3. La prima cosa da verificare è se il grafico Γ di f interseca la retta $y=3$ nella regione $x \geq 0$. Ponendo $f(x) = 3$ si deduce $(x-1)e^{\frac{x}{3}} = 0$, da cui $x=1$ (unica soluzione, perchè $e^{\frac{x}{3}} > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$). Poiché f è crescente in $[0, 1]$, ne deduciamo che $f(x) \leq 3$ per $x \in [0, 1]$. D'altro canto, poiché f è crescente in $[1, 4]$ e decrescente in $[4, +\infty)$ con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, ne deduciamo che

$$f(x) \geq 3 \quad \text{quando} \quad x \geq 1. \quad (5)$$

Da questo possiamo dedurre che l'area cercata è uguale a ¹

$$\text{Area} = \int_0^1 3 - f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) - 3 dx.$$

Si noti che il secondo di questi integrali è indefinito, il suo valore essendo dato da $\int_1^{+\infty} f(x) - 3 dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_1^M f(x) - 3 dx$.

Per procedere con il calcolo dobbiamo trovare una primitiva di $f(x) - 3 = (x-1)e^{-\frac{x}{3}}$. A questo proposito, cominciamo ricordando che una primitiva di $e^{-\frac{x}{3}}$ è data da $-3e^{-\frac{x}{3}}$.

Per calcolare $\int (x-1)e^{-\frac{x}{3}} dx$ ricorriamo alla formula di integrazione per parti ottenendo

$$\begin{aligned} \int f(x) - 3 dx &= \int (x-1)e^{-\frac{x}{3}} dx = -3(x-1)e^{-\frac{x}{3}} - \int -3e^{-\frac{x}{3}} dx \\ &= -3xe^{-\frac{x}{3}} - 6e^{-\frac{x}{3}} + C, \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\int 3 - f(x) dx = 3xe^{-\frac{x}{3}} + 6e^{-\frac{x}{3}} + C.$$

Ponendo per semplicità $I(x) = 3xe^{-\frac{x}{3}} + 6e^{-\frac{x}{3}}$, osserviamo che da (4) segue che $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 0$, e dunque

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^1 3 - f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) - 3 dx \\ &= I(1) - I(0) - \left(\lim_{M \rightarrow \infty} I(M) - I(1) \right) \\ &= 2I(1) - I(0) = 18e^{-\frac{1}{3}} - 6. \end{aligned}$$

4. Seguendo il suggerimento dato dal testo, proviamo a prendere la funzione g pari ad f . Utilizzando una calcolatrice e arrotondando i risultati a meno di un centesimo abbiamo

$$\begin{aligned} f(0) &\sim 2,00 \\ f(1) &\sim 3,00 \\ f(2) &\sim 3,51 \\ f(3) &\sim 3,74 \\ f(4) &\sim 3,79 \\ f(5) &\sim 3,76 \\ f(6) &\sim 3,68, \end{aligned}$$

ove tali espressioni significano che

$$\begin{aligned} |f(0) - 2,00| &\leq 0,01 \\ |f(1) - 3,00| &\leq 0,01 \\ |f(2) - 3,51| &\leq 0,01 \\ |f(3) - 3,74| &\leq 0,01 \\ |f(4) - 3,79| &\leq 0,01 \\ |f(5) - 3,76| &\leq 0,01 \\ |f(6) - 3,68| &\leq 0,01. \end{aligned}$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} |f(0) - 1,97| &\leq |f(0) - 2,00| + |2,00 - 1,97| \leq 0,01 + 0,03 = 0,04 < 10^{-1}, \\ |f(1) - 3,02| &\leq |f(1) - 3,00| + |3,00 - 3,02| \leq 0,01 + 0,02 = 0,03 < 10^{-1}, \\ |f(2) - 3,49| &\leq |f(2) - 3,51| + |3,51 - 3,49| \leq 0,01 + 0,02 = 0,03 < 10^{-1}, \\ |f(3) - 3,71| &\leq |f(3) - 3,74| + |3,74 - 3,71| \leq 0,01 + 0,03 = 0,04 < 10^{-1}, \\ |f(4) - 3,80| &\leq |f(4) - 3,79| + |3,79 - 3,80| \leq 0,01 + 0,01 = 0,02 < 10^{-1}, \\ |f(5) - 3,76| &\leq |f(5) - 3,76| + |3,76 - 3,76| \leq 0,01 + 0,00 = 0,01 < 10^{-1}, \\ |f(6) - 3,65| &\leq |f(6) - 3,68| + |3,68 - 3,65| \leq 0,01 + 0,03 = 0,04 < 10^{-1}. \end{aligned}$$

Ergo la funzione f ha le proprietà richieste.

Dunque, se assumiamo che i profitti siano davvero governati dalla funzione f , dal fatto che $f(x) > 3$ per ogni $x \geq 1$ (come stabilito in (5)), possiamo concludere che i profitti non saranno mai minori di 3 milioni di Euro all'anno.