Sessione ordinaria 2010
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 1, P un punto di AB e γ la circonferenza di centro P e raggio AP. Si prenda sul lato BC un punto Q in modo che sia il centro di una circonferenza λ passante per C e tangente esternamente a γ.

1. Se $AP = x$, si provi che il raggio di λ in funzione di x è dato da $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.
2. Riferito il piano ad un sistema di coordinate Oxy, si tracci, indipendentemente dalle limitazioni poste ad x dal problema geometrico, il grafico di $f(x)$. La funzione $f(x)$ è invertibile? Se sì, quale è il grafico della sua inversa?
3. Sia $g(x) = \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right|$, $x \in R$; quale è l'equazione della retta tangente al grafico di $g(x)$ nel punto R (0, 1)? E nel punto S (1, 0)? Cosa si può dire della tangente al grafico di $g(x)$ nel punto S?
4. Si calcoli l'area del triangolo mistilineo ROS, ove l'arco RS appartiene al grafico di $f(x)$ o, indifferentemente, di $g(x)$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a coordinate cartesiane Oxy, si consideri la funzione f definita da $f(x) = b^x$ ($b > 0$, $b \neq 1$).

1. Sia G_b il grafico di $f(x)$ relativo ad un assegnato valore di b. Si illustri come varia G_b al variare di b.
2. Sia P un punto di G_b . La tangente a G_b in P e la parallela per P all'asse y intersecano l'asse x rispettivamente in A e in B. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Per quali valori di b la lunghezza di AB è uguale a 1?
3. Sia r la retta passante per O tangente a G_e (e = numero di *Nepero*). Quale è la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse?
4. Si calcoli l'area della regione del primo quadrante delimitata dall'asse y, da G_e e dalla retta d'equazione $y = e$.

Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Sia $p(x)$ un polinomio di grado n. Si dimostri che la sua derivata n-esima è $p^{(n)}(x) = n!\, a_n$ dove a_n è il coefficiente di x^n.

2. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, r la retta perpendicolare in B al piano del triangolo e P un punto di r distinto da B. Si dimostri che i tre triangoli PAB, PBC, PCA sono triangoli rettangoli.

3. Sia γ il grafico di $f(x) = e^{3x}+1$. Per quale valore di x la retta tangente a γ in $(x, f(x))$ ha pendenza uguale a 2?

4. Si calcoli: $\lim\limits_{x\to\infty} 4x\sin\frac{1}{x}$

5. Un serbatoio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 80 cm. Quale è la capacità in litri del serbatoio?

6. Si determini il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{\cos x}$.

7. Per quale o quali valori di k la funzione

$$h(x)=\begin{cases} 3x^2-11x-4, & x\le 4 \\ kx^2-2x-1, & x>4 \end{cases}$$

è continua in $x = 4$?

8. Se $n > 3$ e $\binom{n}{n-1}, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?

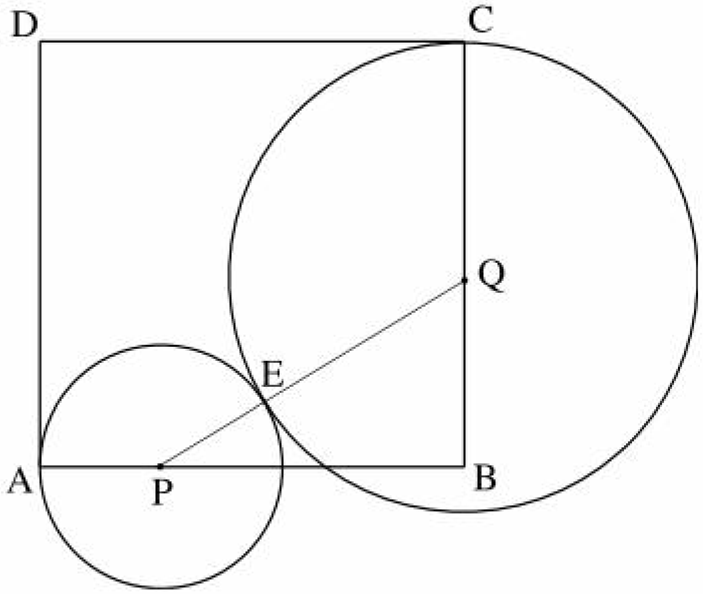
9. Si provi che non esiste un triangolo ABC con $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 45°$. Si provi altresì che se $AB = 3$, $AC = 2$ e $A\hat{B}C = 30°$, allora esistono due triangoli che soddisfano queste condizioni.

10. Si consideri la regione delimitata da $y=\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 4$ e si calcoli il volume del solido che essa genera ruotando di un giro completo intorno all'asse y.

Soluzione del primo problema della maturità scientifica A.S. 2009/2010

Problema 1

Punto 1 Chiamiamo y il raggio di λ e E il punto di contatto tra γ e λ.



Allora il segmento PQ passa per E e dunque vale

$$\overline{PQ} = x + y.$$

Poiché $\overline{PB} = 1 - x$ e $\overline{BQ} = 1 - y$, dal teorema di Pitagora abbiamo

$$(1-x)^2 + (1-y)^2 = (x+y)^2,$$

espandendo i quadrati e svolgendo i calcoli otteniamo

$$\begin{aligned} 1 - 2x + x^2 + 1 - 2y + y^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ 2 - 2x - 2y &= 2xy, \\ 1 - x &= y(1+x), \\ y &= \frac{1-x}{1+x}. \end{aligned}$$

Punto 2 Cominciamo osservando che il dominio della funzione è tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali escluso il punto $x = -1$, dove il denominatore si annulla. Negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(-1, +\infty)$ la funzione è continua. L'unico zero della funzione si ha per $x = 1$.

Calcoliamo il limiti della funzione per x che tende a $\pm\infty$ e $\pm - 1$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+x} = -1,$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{1+x} = -1,$$
$$\lim_{x\to-1^+}\frac{1-x}{1+x} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{1-x}{1+x} = -\infty.$$

Dunque f ha un asintoto orizzontale (la retta $y = -1$) e un asintoto verticale (la retta $x = -1$). La derivata di f è data da

$$f'(x) = \frac{-1(1+x) - 1(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{2}{(1+x)^2},$$

ed è quindi sempre negativa per $x \neq -1$. In particolare, la funzione non ammette massimi o minimi locali. Inoltre nell'intervallo $(-\infty, -1)$ essa è strettamente decrescente, così come nell'intervallo $(-1, +\infty)$. Per concludere che f è invertibile basta osservare che $x \in (-\infty, -1)$ implica $f(x) < -1$ e $x \in (1, +\infty)$ implica $f(x) > -1$. Per calcolare l'inversa di f poniamo $y = f(x)$ e risolviamo (in x) l'equazione

$$\frac{1-x}{1+x} = y,$$

ottenendo

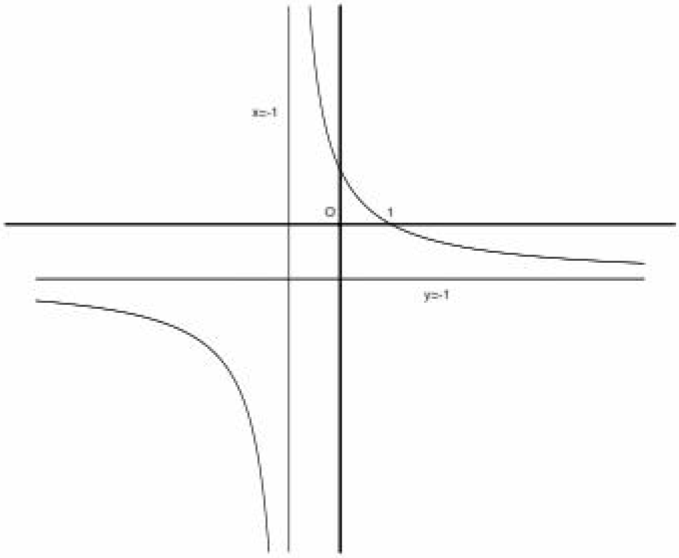
$$\frac{1-y}{1+y} = x.$$

Questo vuol dire che l'inversa di f è f stessa. Il grafico dell'inversa, in particolare, sarà uguale al grafico di f (o, che è lo stesso, il grafico di f è simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante).

Concludiamo lo studio di f con l'analisi della derivata seconda. Abbiamo:

$$f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3},$$

quindi il suo segno coincide col segno di $(1+x)^3$. Ergo abbiamo $f''(x) > 0$ se $x > -1$ e $f''(x) < 0$ se $x < -1$. Dunque nell'intervallo $(-1, +\infty)$ la f è convessa, mentre nell'intervallo $(-\infty, -1)$ la f è concava.
In definitiva, il grafico di f è il seguente:



Punto 3 Sappiamo dal punto precedente che nell'intervallo $(-1,1)$ la funzione f è positiva. Dunque in tale intervallo $f=g$ e quindi g è derivabile in 0. La sua derivata è $g'(0)=f'(0)=-2$. Dunque l'equazione della tangente a g in $(0,1)$ è data da

$$y=-2x+1.$$

Studiamo ora il problema della tangenza a g in $(1,0)$. Calcoliamo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale di g in 1. Ricordando che $g(1)=f(1)=0$ e che per $x>1$ vale $f(x)<0$ e dunque $g(x)=-f(x)$ abbiamo

$$\begin{array}{lllll} \text{limite sinistro:} & \lim_{h\to 0^-}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(1+h)}{h} & = & f'(1) = -\dfrac{1}{2}, \\ \text{limite destro:} & \lim_{h\to 0^+}\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\dfrac{-f(1+h)}{h} & = & -f'(1) = \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Dunque la funzione g non è derivabile in 1 e quindi non esiste alcuna retta tangente al suo grafico in $(1,0)$. Tuttavia possiamo osservare che 1 è un punto angoloso di g (nel senso che i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale esistono ma sono diversi), dunque possiamo parlare di tangente a sinistra e tangente a destra al grafico di g: esse hanno rispettivamente equazione

$$y=-\frac{1}{2}(x-1),$$
$$y=\frac{1}{2}(x-1).$$

Punto 4 Il segmento OR è verticale e il segmento OS orizzontale. Dunque l'area cercata è uguale a

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1-x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{2}{x+1}-1\,dx=2\big(\log 2-\log 1\big)-1=2\log 2-1$$

Soluzione del secondo problema della maturità scientifica A.S. 2009/2010

Problema 2

Punto 1 Osserviamo innanzitutto che G_b sta sempre nel semispazio delle ordinate positive e tutti i grafici passano per $(0,1)$. A b fissato possiamo studiare la funzione $f(x) = b^x$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1; \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1, \end{cases}$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < b < 1; \\ 0 & \text{se } b > 1. \end{cases}$$

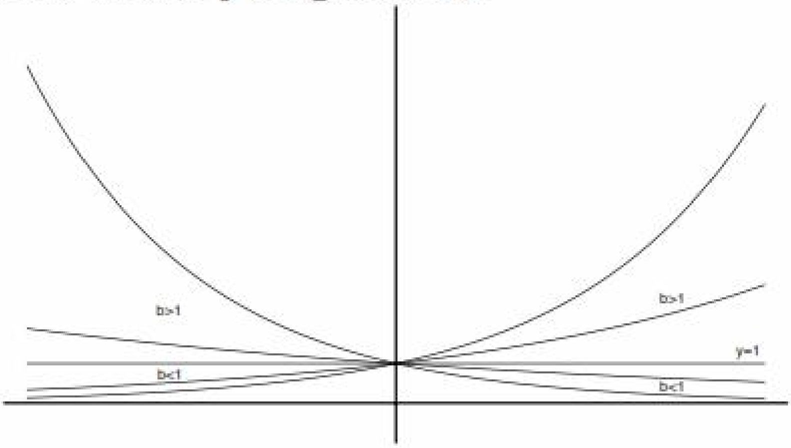
Calcoliamo le derivate:

$$f'(x) = \log(b) \cdot b^x,$$
$$f''(x) = \big(\log(b)\big)^2 b^x,$$

deducendone che f è crescente per $b > 1$, decrescente per $0 < b < 1$ e sempre convessa. Poiché

$$\left(\frac{1}{b}\right)^x = b^{-x}$$

abbiamo che $(x, y) \in G_{1/b}$ se e solo se $(-x, y) \in G_b$, ossia il grafico $G_{1/b}$ è la riflessione attorno all'asse y del grafico G_b.



Derivando rispetto a b si ha

$$\frac{d}{db} b^x = x b^{x-1}$$

e quindi per $x > 0$ i grafici G_b sono decrescenti ad x fissato, mentre per $x < 0$ sono crescenti. Inoltre, per ogni $x \neq 0$

$$\lim_{b\to 1} b^x = 1,$$

$$\lim_{b\to +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } x > 0; \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{b\to 0^+} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0; \\ +\infty & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi in definitiva:

- per b che tende a 1^+ i grafici G_b decrescono verso la retta $y = 1$ nel semiasse delle ascisse positive, mentre crescono verso la stessa retta nel semiasse delle ascisse negative.

- per b che tende a 1^- i grafici G_b crescono verso la retta $y = 1$ nel semiasse delle ascisse positive, mentre decrescono verso la stessa retta nel semiasse delle ascisse negative,

- per b che tende a 0^+ i grafici G_b decrescono a zero nel semiasse delle ascisse positive, e crescono a $+\infty$ nel semiasse delle ascisse negative,

- per b che tende a $+\infty$ i grafici G_b crescono a $+\infty$ nel semiasse delle ascisse positive, e decrescono a 0 nel semiasse delle ascisse negative,

Punto 2 Un generico punto P di G_b si può scrivere come (x_0, b^{x_0}) per un qualche numero reale x_0.
La retta parallela all'asse y e passante per (x_0, b^{x_0}) interseca l'asse delle ascisse, chiaramente, in x_0. Dunque $A = (x_0, 0)$
Per identificare B, ricordiamo che la derivata di $f(x) = b^x$ è data da $f'(x) = \log(b)b^x$. L'equazione della retta tangente a G_b in (x_0, b^{x_0}) è quindi data da

$$y = \log(b)b^{x_0}(x - x_0) + b^{x_0}.$$

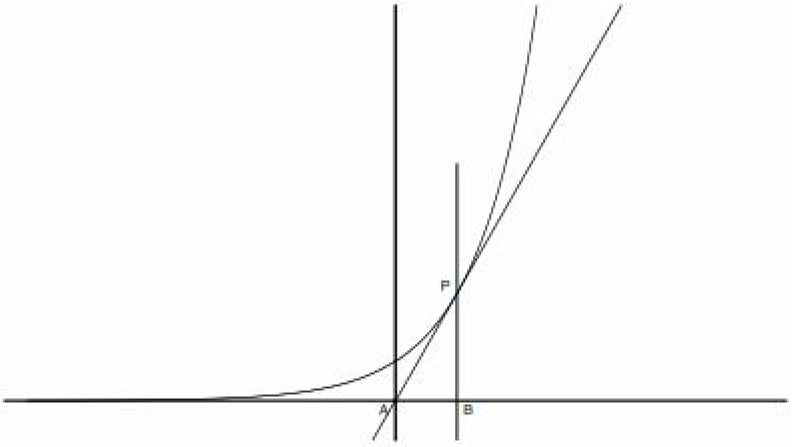
Per calcolare il punto di intersezione di questa retta con l'asse delle ascisse poniamo $y = 0$ nell'equazione e risolviamo in x:

$$\begin{aligned} 0 &= \log(b)b^{x_0}(x - x_0) + b^{x_0}, \\ 0 &= b^{x_0}\big(\log(b)(x - x_0) + 1\big), \\ 0 &= \log(b)(x - x_0) + 1, \\ x &= -\frac{1}{\log(b)} + x_0, \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che $b^{x_0} \neq 0$. Dunque $B = (-\frac{1}{\log(b)} + x_0, 0)$.
Ne deduciamo che

$$\overline{AB} = \left| x_0 - \left(-\frac{1}{\log(b)} + x_0 \right) \right| = \left| \frac{1}{\log(b)} \right|,$$

e quindi la distanza tra A e B non dipende da P, come richiesto.



Tale distanza è uguale a 1 se e solo se $\left|\frac{1}{\log(b)}\right| = 1$, ovvero se e solo se una delle seguenti due equazioni è soddisfatta:

$$\log(b) = \quad 1,$$
$$\log(b) = -1.$$

La prima di esse ha soluzione $b = e$, la seconda $b = \frac{1}{e}$. Questi sono gli unici valori di b per cui $\overline{AB} = 1$.

Punto 3 Per prima cosa determiniamo la retta r. Sia x_0 un generico numero reale. Allora poiché la derivata di e^x in x_0 è e^{x_0}, l'equazione della retta tangente a G_e in (x_0, e^{x_0}) è data da

$$y = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0}.$$

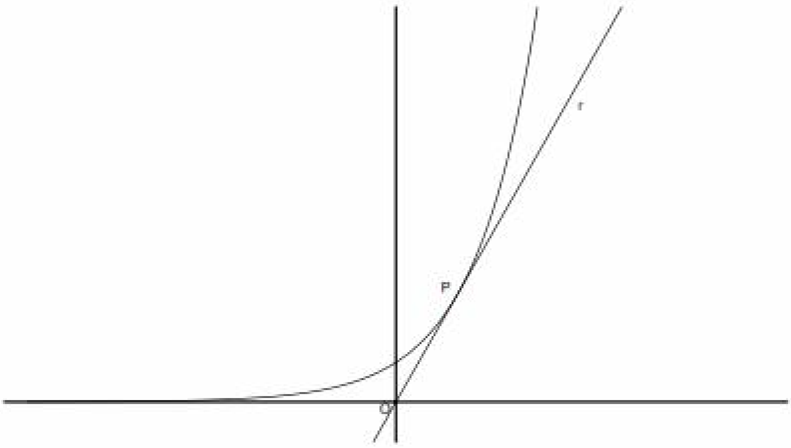
Dobbiamo trovare x_0 in maniera che tale retta passi per l'origine. Ponendo dunque $x = y = 0$ nell'equazione sopra otteniamo

$$0 = -x_0 e^{x_0} + e^{x_0},$$

poiché $e^{x_0} \neq 0$ possiamo semplificare ed ottenere $0 = -x_0 + 1$ ovvero $x_0 = 1$.
Dunque esiste una sola retta passante per l'origine e tangente a G_e: la retta di equazione

$$y = e(x - 1) + e.$$

L'angolo che tale retta forma col semiasse positivo delle ascisse è dato - in generale - dall'arcotangente del coefficiente angolare; dunque in questo caso esso vale $\arctan(e)$.



Punto 4 La retta $y = e$ interseca G_e nel punto $(1, e)$. L'area cercata può quindi essere calcolata come differenza delle aree:

- del rettangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (1, e), (0, e)$,
- dell'area sotto G_e compresa tra l'asse delle ascisse e le rette $x = 0$ e $x = 1$.

L'area del rettangolo è pari ad e. Quella della regione sotto il grafico si calcola come:

$$\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Dunque il valore cercato è:

$$e - (e - 1) = 1.$$