Sessione ordinaria 2009
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

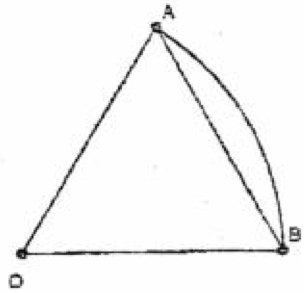
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

È assegnato il settore circolare AOB di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x, da $S(x)=\frac{1}{2}r^2(x-\operatorname{sen}x)$ con $x\in[0,\ 2\pi]$.
2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r=1$).
3. Si fissi l'area del settore AOB pari a $100\ \text{m}^2$. Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di AOB e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).



4. Sia $r=2$ e $x=\frac{\pi}{3}$. Il settore AOB è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali ad OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W.

PROBLEMA 2

Nel piano riferito a coordinate cartesiane, ortogonali e monometriche, si tracci il grafico G_f della funzione $f(x)=\log x$ (*logaritmo naturale*)

1. Sia A il punto d'intersezione con l'asse y della tangente a G_f in un suo punto P. Sia B il punto d'intersezione con l'asse y della parallela per P all'asse x. Si dimostri che, qualsiasi sia P, il segmento AB ha lunghezza costante. Vale la stessa proprietà per il grafico G_g della funzione $g(x)=\log_a x$ con a reale positivo diverso da 1?
2. Sia δ l'inclinazione sull'asse x della retta tangente a G_g nel suo punto di ascissa 1. Per quale valore della base a è $\delta=45°$? E per quale valore di a è $\delta=135°$?
3. Sia **D** la regione del primo quadrante delimitata dagli assi coordinati, da G_f e dalla retta d'equazione $y=1$. Si calcoli l'area di **D**.
4. Si calcoli il volume del solido generato da **D** nella rotazione completa attorno alla retta d'equazione $x=-1$.

Sessione ordinaria 2009
Seconda prova scritta

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

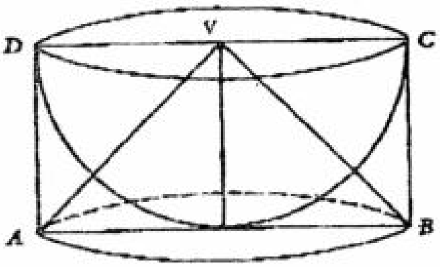
CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si trovi la funzione $f(x)$ la cui derivata è $\operatorname{sen} x$ e il cui grafico passa per il punto (0, 2).
2. Sono dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$. Tra le possibili *applicazioni* (o *funzioni*) di A in B, ce ne sono di *suriettive*? Di *iniettive*? Di *biiettive*?
3. Per quale o quali valori di k la curva d'equazione $y = x^3 + kx^2 + 3x - 4$ ha una sola tangente orizzontale?
4. *"Esiste solo un poliedro regolare le cui facce sono esagoni"*. Si dica se questa affermazione è vera o falsa e si fornisca una esauriente spiegazione della risposta.
5. Si considerino le seguenti espressioni:
$$\frac{0}{1};\ \frac{0}{0};\ \frac{1}{0};\ 0^0$$
A quali di esse è possibile attribuire un valore numerico? Si motivi la risposta.
6. Si calcoli: $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.
7. Si dimostri l'identità $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1}$ con n e k naturali e $n > k$.
8. Si provi che l'equazione:
$$x^{2009} + 2009x + 1 = 0$$
ha una sola radice compresa fra -1 e 0.
9. Nei *"Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze"*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro ad essa circoscritto. La *scodella* si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro.
Si dimostri, utilizzando il principio di *Cavalieri*, che la *scodella* ha volume pari al cono di vertice V in figura.

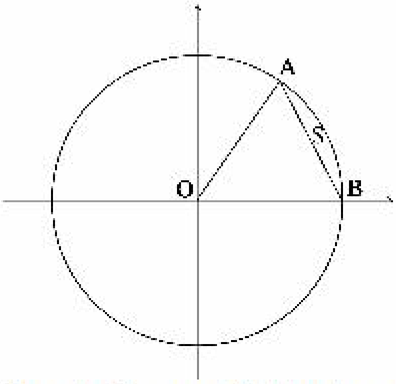


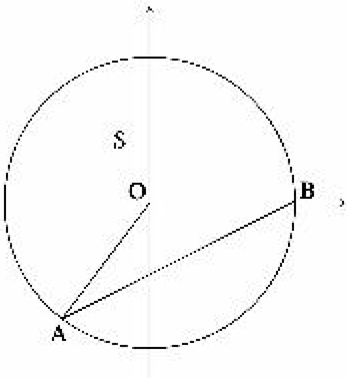
10. Si determini il periodo della funzione $f(x) = \cos 5x$.

Problema 1

1. L'area del settore circolare è pari a $\frac{1}{2}r^2x$. Il triangolo di vertici AOB ha base di lunghezza r e altezza pari a $r|\sin x|$ e quindi la sua area è $\frac{1}{2}r^2|\sin x|$. Nell'intervallo $[0,\pi]$, dove $\sin x \geq 0$, le aree vanno sottratte, mentre in quello $[\pi, 2\pi]$, dove $\sin x \leq 0$ vanno sommate. Vale quindi

$$Area(S(x)) = \frac{1}{2}r^2(x - \text{segno}(\sin x)|\sin x|) = \frac{1}{2}r^2(x - \sin x)$$





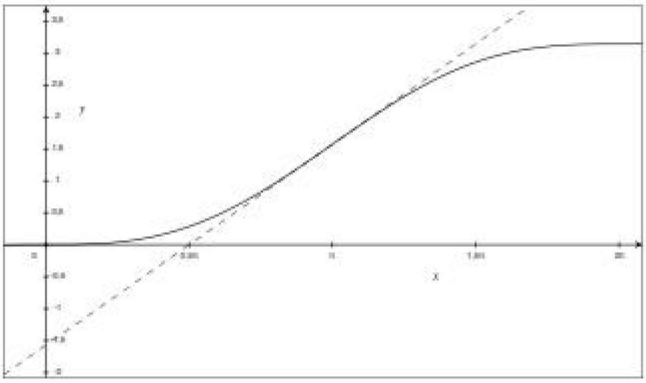
2. Lo studia va effettuato solamente nell'intervallo $[0, 2\pi)$. Per costruzione è $S(x) \geq 0$ e $S(x) = 0$ solo per $x = 0$. La derivata di $S(x)$ è

$$S'(x) = \frac{1}{2}r^2(1 - \cos x) \geq 0$$

e $S'(x) = 0$ solo quando $\cos x = 1$ ossia per $x = 0$ (per $x = 2\pi$ la funzione non è ben definita ma essa presenta comunque un asintoto orizzontale quando $x \to 2\pi^-$). Quindi la funzione è crescente nell'intervallo $[0.2\pi)$ e ha in 0 un punto a tangente orizzontale. La derivata seconda è $S''(x) = \frac{1}{2}r^2 \sin x$ il cui segno è positivo in $(0,\pi)$, negativo in $(\pi, 2\pi)$ e nullo per $x = 0, \pi$. La funzione è quindi convessa in $(0,\pi)$, concava in $(\pi, 2\pi)$ ed ha un punto di flesso per $x = \pi$. La tangente nel punto di flesso ha equazione

$$y = \frac{1}{2}r^2(2x - \pi)$$

Riportiamo il grafico della funzione nel caso $r = 1$.



3. Detto $a = 100m^2$ il valore imposto dal testo per l'area del settore circolare, si ha $\frac{1}{2}r^2x = a$. Il perimetro del settore è composto da due raggi di lunghezza r e dall'arco di lunghezza rx e quindi $P = r(2+x)$. Ottenendo x in funzione di r dalla condizione sull'area si ha $x = \frac{2a}{r^2}$ e perciò

$$P(r) = r(2 + \frac{2a}{r^2}) = 2r + \frac{2a}{r}$$

   Questa funzione ha asintoto verticale in $r = 0$ e tende a $+\infty$ per $r \to 0^+$ e $r \to +\infty$. La derivata di P è $P'(r) = 2 - \frac{2a}{r^2}$ il cui segno è negativo in $(0, \sqrt{a})$, positivo in $(\sqrt{a}, +\infty)$ e nullo in $r = \sqrt{a}$. Essa ha quindi un unico minimo in $\overline{r} = \sqrt{a} = 10m$, che è il valore cercato.

   L'angolo associato si ottiene dalla condizione imposta sull'area, essendo

$$\overline{x} = \frac{2a}{\overline{r}^2} = 2$$

   che in gradi è pari a $\overline{\theta} = \frac{360}{\pi}$, poco meno di 115°.

4. Osserviamo innanzitutto che il punto B ha coordinate $(2, 0)$ mentre l'altezza del triangolo AOB ha piede H di coordinate $(2\cos\frac{\pi}{3}, 0) =$

   $(1, 0)$. Chiamiamo $(s, 0)$ un generico punto del segmento OB, per $0 \leq s \leq 2$.

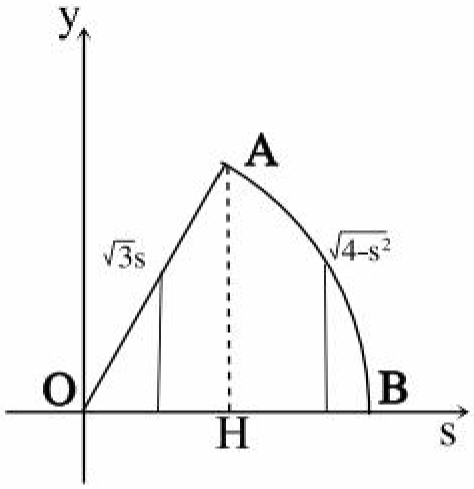
   Utilizzando il principio di Cavalieri, per calcolare il volume V del solido, basterà determinare il valore dell'integrale

$$V = \int_0^2 Area(Q(s))ds$$

dove $Q(s)$ è la sezione quadrata del solido con il piano per il punto $(s, 0)$. Il lato di tale quadrato ha due espressioni distinte se $0 \leq s \leq 1$ o $1 \leq s \leq 2$.

Il segmento OA è parte della retta di equazione $y = \tan\frac{\pi}{3}s = \sqrt{3}s$ e quindi per $0 \leq s \leq 1$ il lato del quadrato $Q(s)$ è $\sqrt{3}s$.

L'arco di cerchio AB sta nella circonferenza di equazione $s^2 + y^2 = 4$ e quindi per $1 \leq s \leq 2$ il lato di $Q(s)$ è $\sqrt{4 - s^2}$.

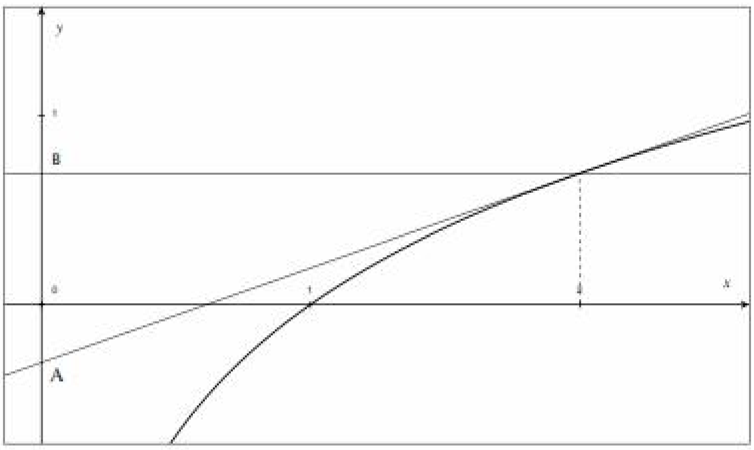


Si ha quindi

$$V = \int_0^1 3s^2 ds + \int_1^2 4 - s^2 ds = 1 + (4 - \frac{7}{3}) = \frac{8}{3}$$

Problema 2

1. La proprietà è valida per qualsiasi $a > 0$ e diverso da 1.



La retta tangente alla funzione $\log_a x$ nel generico punto x_0 ha equazione

$$y = \log_a x_0 + \frac{\log_a e}{x_0}(x - x_0)$$

e quindi intercetta l'asse y nel punto $A = (0, \log_a x_0 - \log_a e)$. Il punto B ha coordinate $(0, \log_a x_0)$. La distanza fra i due punti è pari a

$$|\overline{AB}| = |(\log_a x_0 - \log_a e) - \log_a x_0| = |\log_a e|$$

che non dipende dal punto x_0.

2. Nel punto di ascissa 1 la retta tangente ha equazione

$$y = (x - 1)\log_a e$$

La pendenza è 45° quando il coefficiente angolare è $\tan 45° = 1$, e quindi per

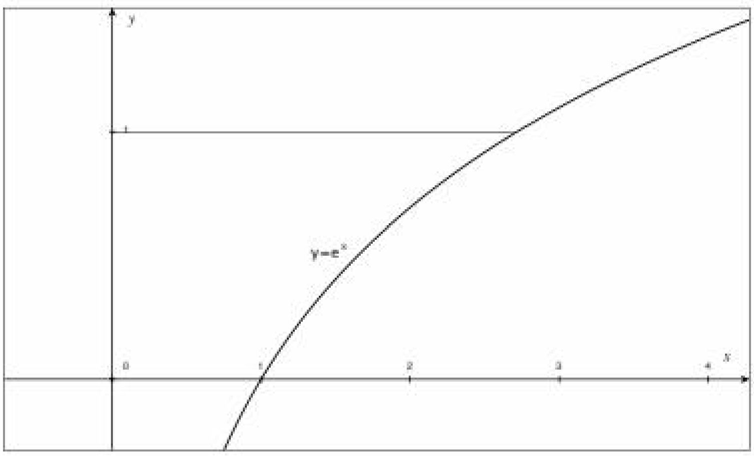
$$\log_a e = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = e$$

La pendenza è 135° quando il coefficiente angolare è $\tan 135° = -1$, e quindi per

$$\log_a e = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \frac{1}{e}$$

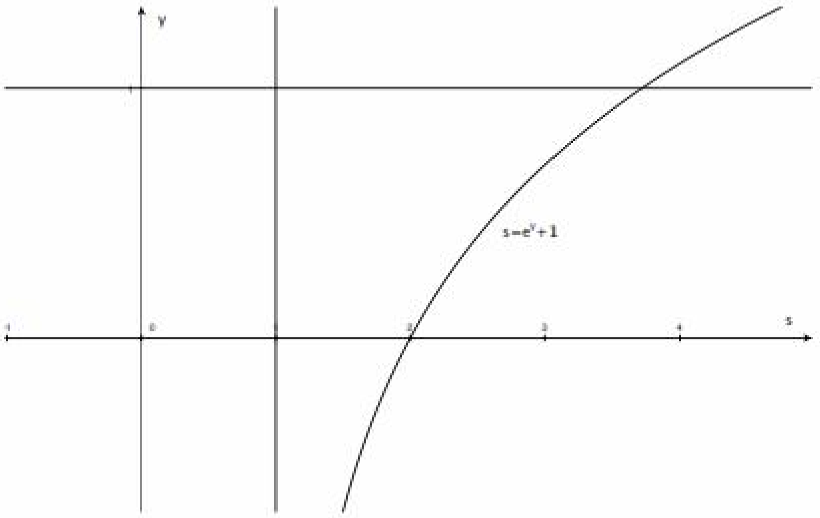
3. Il grafico G_f ha equazione $y = \log x$ o, equivalentemente, $x = e^y$. Invertendo gli assi coordinati l'area non cambia e quindi per il calcolo si può effettuare l'integrazione con y come variabile indipentende. Essa è pari a

$$Area = \int_0^1 e^y dy = e - 1$$



4. Occorre utilizzare la formula di Pappo per il volume dei solidi di rotazione. Trasliamo l'asse y a sinistra di una unità (lasciando quindi inalterato il volume), considerando la nuova variabile $s = x + 1$. L'equazione di G_f in queste variabili è

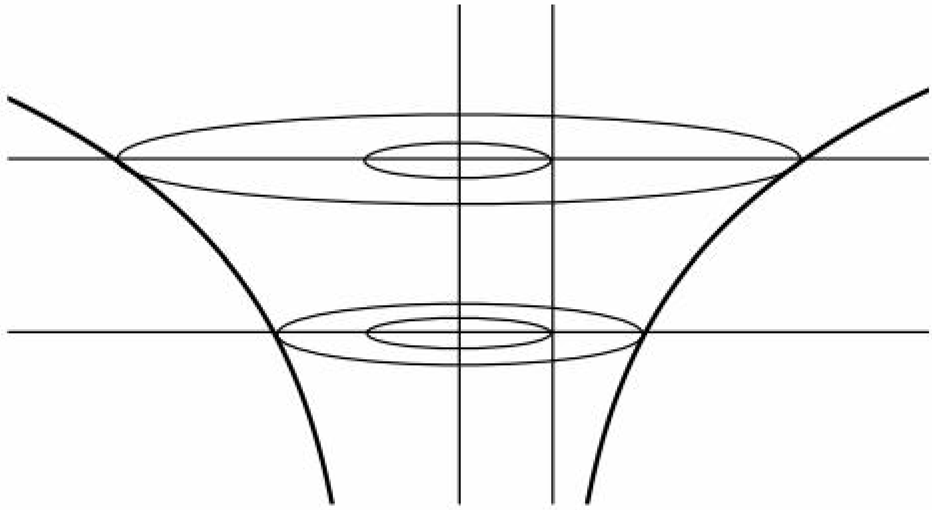
$$x = e^y \qquad \Leftrightarrow \qquad s = e^y + 1$$



Detta S la regione del piano sy delimitata dalle rette $y = 1$, $y = 0$, e dal grafico delle due funzioni $f(y) = e^y + 1$ e $g(y) = 1$, il volume V ottenuto mediante la rotazione di S attorno all'asse $s = 0$ è pari a

$$V = \int_0^1 \pi(f^2(y) - g^2(y))dy = \pi \int_0^1 (e^y + 1)^2 - 1dy = \pi(\frac{e^2}{2} + 2e - \frac{5}{2}).$$

Riportiamo di seguito la figura del solido in questione.



Soluzione dei quesiti

1. Le funzioni la cui derivata è $\sin x$ sono tutte e sole della forma

$$f(x) = \int_0^x \sin t dt + c = -\cos x + c$$

con c numero reale arbitrario. Imponendo $f(0) = 2$ si ha $-1 + c = 2$ e quindi $c = 3$. La funzione cercata è pertanto $f(x) = 3 - \cos x$.

2. La funzione così definita: $1 \to a$, $2 \to b$, $3 \to c$ e $4 \to c$, è suriettiva. Non esistono funzioni iniettive a A a B perché questo implicherebbe che la cardinalità di B sia maggiore o uguale a quella di A. Avendo A quattro elementi mentre B solo tre, questo è impossibile. Non esistono neanche funzioni biiettive da A a B in quanto in particolare esse sarebbero anche iniettive.

3. Essendo la funzione differenziabile, basta determinare il numero di zeri della derivata, e quindi risolvere

$$y' = 3x^2 + 2kx + 3 = 0$$

Questa equazione di secondo grado ha una sola soluzione se e solo se il suo discriminante è nullo, e questo significa

$$4k^2 - 36 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \pm 3$$

che sono quindi i due unici valori cercati.

4. Mostriamo che non esistono poliedri regolari le cui facce (identiche) siano esagoni. Consideriamo un suo angolo diedro. In esso devono concorrere almeno tre facce. Tuttavia gli angoli di un esagono regolare sono tutti uguali a 120° e quindi la somma degli (almeno) tre angoli concorrenti in uno spigolo è 360°. Questo significa che le tre facce giacciono su uno stesso piano e non possono quindi appartenere ad un poliedro convesso regolare.

Nel caso in cui l'affermazione sia equivalente a *Esiste ed è unico un poliedro regolare le cui facce sono esagoni* allora l'affermazione risulta falsa, in quanto non ne esiste alcuno.

Nel caso vada interpretata come *Non esiste più di un poliedro regolare le cui facce sono esagoni* allora l'affermazione è vera.

5. Si ha che

$$\frac{0}{1} = 0$$

mentre nessuna delle altre espressioni ha significato. Infatti $\frac{0}{0}$ dovrebbe essere unicamente determinato dalla condizione $0 = x \cdot 0$ il che è chiaramente vero per ogni x, e quindi l'espressione è indeterminata. L'espressione $\frac{1}{0}$ invece è impossibile in quanto non esiste alcun numero reale x per cui $1 = x \cdot 0$. Infine 0^0 non è definita perché le regole delle potenze (per $a > 0$), $a^0 = 1$ e $0^a = 0$ andrebbero in contraddizione.

6. Si ha, raccogliendo x nella radice e estraendolo dalla stessa

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = -1$$

7. Basta applicare la definizione di binomiale:

$$\binom{n}{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \qquad \binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{n-k}{k+1}$$

essendo $(n-k)! = (n-k-1)!(n-k)$ possiamo semplificare $n-k > 0$ nella seconda espressione per ottenere

$$\binom{n}{k}\frac{n-k}{k+1} = \frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!}$$

e essendo anche $k!(k+1) = (k+1)!$ si ottiene l'espressione di $\binom{n}{k+1}$.

8. Osserviamo che la funzione $f(x) = x^{2009} + 2009x + 1$ è continua e derivabile, vale 1 per $x = 0$ e -2009 per $x = -1$. Il teorema degli zeri ci garantisce quindi l'esistenza di una soluzione.

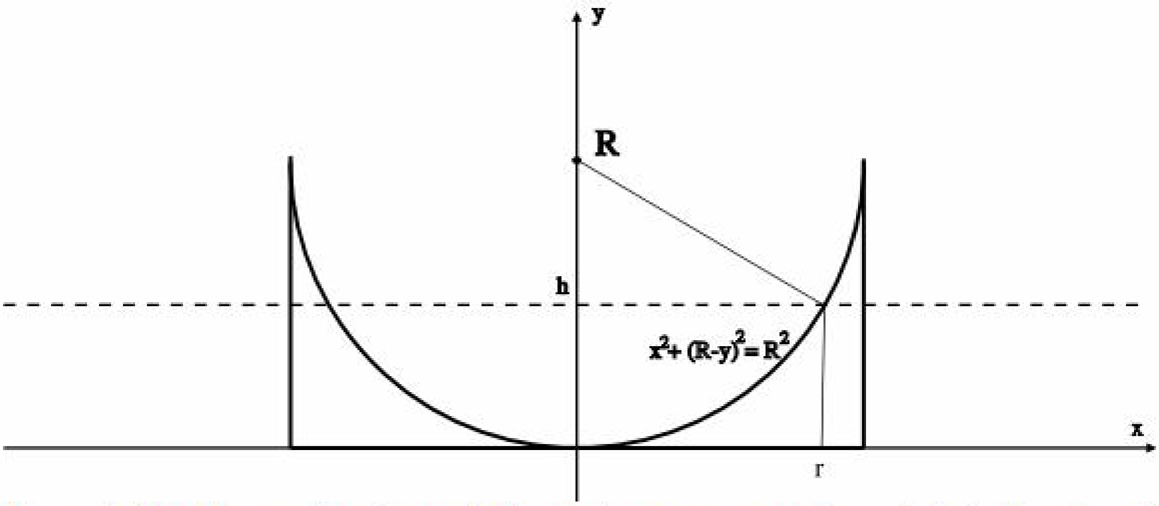
   Per mostrare l'unicità utilizziamo il teorema di Rolle. Se vi fossero due zeri interni all'intervallo $(-1, 0)$ la derivata si annullerebbe. Tuttavia la derivata di f è sempre positiva: $f'(x) = 2009x^{2008} + 2009 \geq 2009 > 0$ (essendo 2008 una potenza pari) e si è quindi ottenuto un assurdo.

9. Occorre mostrare che per ogni piano orizzontale le sezioni delle due figure con il piano hanno medesima area. Sia dunque R il raggio della sfera e h un numero soddisfacente $0 \leq h \leq R$.

   Il piano ad altezza h taglia il cono in una cerchio di raggio $R - h$ e quindi di area $\pi(R-h)^2$.

Lo stesso piano taglia la scodella in una corona circolare, il cui raggio esterno è R e di cui vogliamo calcolare il raggio interno r. A questo scopo basta ridursi a un problema planare: il cerchio ottenuto sezionando con un piano verticale fornito di coordinate cartesiane xy ha equazione $x^2 + (R - y)^2 = R^2$ e quindi il raggio interno si ottiene risolvendo rispetto ad x l'equazione con $y = h$, ottenendo

$$r = \sqrt{R^2 - (R - h)^2}.$$



10. Il periodo di una funzione è il minimo numero (se esiste) T per cui $f(x + T) = f(x)$ per ogni x reale. Si verifica immediatamente che