Sessione ordinaria 2008

Seconda prova scritta

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

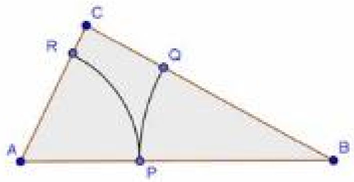
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

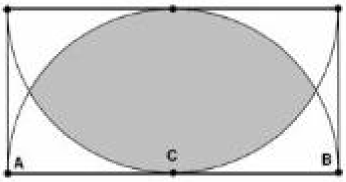
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2 , si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$

d) Si studi *f(x)* e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

Sessione ordinaria 2008

Seconda prova scritta

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si consideri la seguente proposizione: " Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{x^{2008}}{2^x} = 0$
5. Si determini un polinomio *P(x)* di terzo grado tale che:
$$P(0) = P'(0) = 0,\ P(1) = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)dx = \frac{1}{12}$$
6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$
8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x = \pi$.
9. Sia $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x \mapsto 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

Problema 1

(a) Determiniamo in funzione di a i lati del triangolo. Essendo l'angolo $B\hat{C}A$ retto è subito determinato l'angolo $A\hat{B}C = \pi - \pi/2 - \pi/3 = \pi/6$ e dalla trigonometria otteniamo

$$\begin{cases} AB = a \\ AC = a\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a}{2} \\ BC = a\cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Occorre che il punto Q giaccia all'interno del segmento BC. Distando esso x da B, deve valere $x \leq a\sqrt{3}/2$. Occorre anche che il punto R giaccia all'interno del segmento AC. Distando esso $a - x$ da A deve valere $a - x \leq a/2$. In definitiva la costruzione è possibile se e solo se

$$\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

(b) Calcoliamo l'area del quadrilatero mistilineo per sottrazione dall'area del triangolo. Essendo quest'ultimo rettangolo, si ha subito che l'area è $\overline{AC}\,\overline{BC}/2$ ossia $a^2\sqrt{3}/8$. L'area dei due settori circolari ARP e BPQ si ottiene ricordando che l'area di un settore circolare di raggio r ed angolo θ è $r^2\theta/2$. Si ha quindi

$$\text{Area}(ARP) = (a-x)^2\frac{\pi}{6} \qquad\qquad \text{Area}(BQP) = x^2\frac{\pi}{12}$$

da cui

$$\begin{aligned} S(x) =& \text{Area}(PQCR) \\ =& \text{Area}(ABC) - \text{Area}(ARP) - \text{Area}(BQP) \\ =& \frac{a^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}(a-x)^2 - \frac{\pi}{12}x^2 \end{aligned}$$

il cui grafico è una parabola con la concavità rivolta verso il basso. Calcolando la derivata si ha

$$S'(x) = \frac{\pi}{3}(a-x) - \frac{\pi}{6}x$$

che si annulla nel solo punto $x = 2a/3$, interno all'intervallo $[a/2, \sqrt{3}a/2]$. Quest'ultimo è quindi un punto di massimo, e quindi l'area massima è

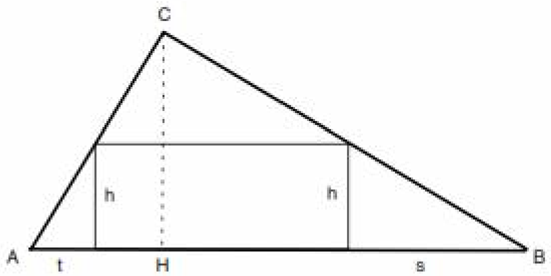
$$S\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{9}\right)$$

L'area minima sarà quindi uno dei due valori agli estremi $S(a/2)$, $S(\sqrt{3}a/2)$ ossia rispettivamente

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{8}\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right) \ , \qquad S\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{17}{8} - \sqrt{3}\right)\right).$$

Poichè il secondo è il più piccolo dei due, esso è il minimo di S nell'intervallo di compatibilità della costruzione.

(c) Detta h l'altezza del generico rettangolo, t la distanza da A dell'estremo sinistro della base e s la distanza da B dell'estremo destro della base,



si ha

$$\begin{cases} \dfrac{h}{t} = \tan\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3} \\[2ex] \dfrac{h}{s} = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Quindi la base del rettangolo sarà espressa come funzione della sua altezza da

$$a - t - s = a - \frac{h}{\sqrt{3}} - h\sqrt{3}$$

e l'area sarà

$$\text{Area} = h\left(a - \frac{4}{\sqrt{3}}h\right)$$

Questa espressione descrive una parabola con la concavità rivolta verso il basso e vertice nel punto di ascissa $h = \frac{\sqrt{3}}{8}a$. Il valore massimo si otterrà quindi calcolando l'area per quest'ultimo valore di h, ottenendo

$$\text{Area massima} = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$

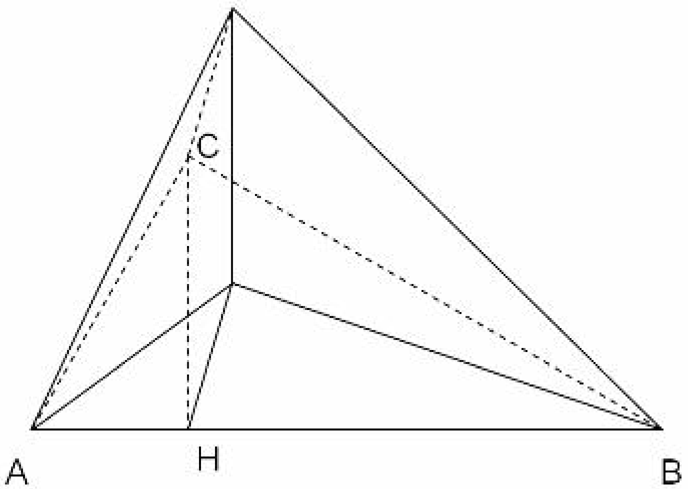
(d) Utilizzando il principio di Cavalieri calcoliamo il volume del solido integrando, al variare della distanza t da A del piano perpendicolare ad AB, l'area della sezione. Essendo la sezione un quadrato basterà determinare un lato di esso. Sia H il piede della perpendicolare per C ad AB: si ha che

$$\overline{AH} = \overline{AC}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{4} \qquad \overline{HB} = a - \overline{AH} = \frac{3}{4}a$$

Se ora il piano perpendicolare ad AB ha distanza t da A, con $t \leq \overline{AH}$, un lato del quadrato risulterà essere l'altezza del rettangolo del punto precedente quando l'estremo sinistro disti t da A, e quindi di lunghezza $\sqrt{3}t$. Analogamente se la distanza s da B del piano è minore di $\overline{HB}$, il lato del quadrato sarà l'altezza del rettangolo del punto precedente quando l'estremo destro disti s da B, e quindi ha lunghezza $\frac{s}{\sqrt{3}}$.
Il volume riulterà quindi

$$\int_0^{\frac{a}{4}} (\sqrt{3}t)^2 dt + \int_0^{\frac{3a}{4}} \left(\frac{s}{\sqrt{3}}\right)^2 ds = \frac{a^3}{16}$$

Riportiamo la figura del solido in esame.



Problema 2

(a) Riferiamo il problema ad un sistema di assi cartesiani, in modo che il punto C sia l'origine, l'asse x contenga il segmento AB e il semicerchio Γ sia contenuto nel semipiano dei punti con ordinata maggiore o uguale a zero. In questo sistema di riferimento, la semicirconferenza γ che delimita Γ è data dal grafico della funzione $\sqrt{1-x^2}$ definita sull'intervallo $[-1,1]$. Affermiamo ora che il centro C_1 di Γ_1 è il punto $(0,1)$: infatti, poiché Γ_1 è tangente in C a AB, e poiché il raggio CC_1 è ortogonale alla retta tangente, sappiamo che C_1 giace sull'asse delle ordinate. Poiché inoltre sappiamo che il raggio di Γ_1 è 1, e che la figura è tutta contenuta nel semipiano dei punti con ordinata positiva, ne deduciamo che $C_1 = (0,1)$. La semicirconferenza γ_1 che delimita Γ_1 è quindi data dal grafico della funzione $1-\sqrt{1-x^2}$, definita su $[0,1]$. Le due semicirconferenze γ e γ_1 si intersecano nei punti x tali che $\sqrt{1-x^2} = 1-\sqrt{1-x^2}$, ovvero in $x = \pm\sqrt{3}/2$. L'area A_{int} dell'intersezione dei due cerchi è dunque data dall'integrale:

$$\begin{aligned}
A_{int} &= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left|\sqrt{1-x^2} - (1-\sqrt{1-x^2})\right| dx \\
&= \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} 2\sqrt{1-x^2} - 1\, dx \\
&= -\sqrt{3} + 2\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx.
\end{aligned}$$

Ponendo $x = \sin t$ e cambiando variabile all'interno dell'integrale otteniamo (si osservi che per i fattori differenziali vale l'uguaglianza $dx = \cos t dt$):

$$A_{int} = -\sqrt{3} + 2\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 t\, dt.$$

Ricordando che vale l'identità $\cos^2 t = (\cos(2t)+1)/2$ otteniamo

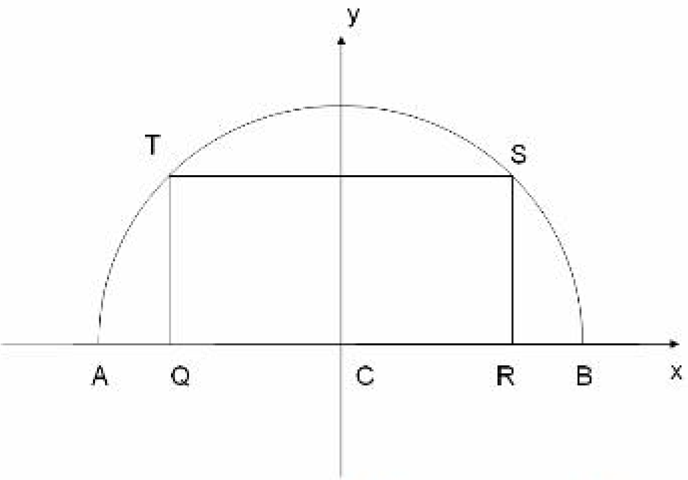
$$A_{int} = -\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi + \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos(2t)\, dt.$$

Una primitiva della funzione $\cos(2t)$ è data dalla funzione $\sin(2t)/2$, dunque l'area è data da

Una primitiva della funzione $\cos(2t)$ è data dalla funzione $\sin(2t)/2$, dunque l'area è data da

$$A_{int} = -\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi+\left(\frac{\sin(2\pi/3)}{2}-\frac{\sin(-2\pi/3)}{2}\right) = -\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(b) Consideriamo un generico rettangolo inscritto in Γ. A meno di una rotazione di centro C, possiamo supporre che esso abbia i lati paralleli agli assi cartesiani. Inoltre, a meno di ingrandire i lati (operazione che fa aumentare l'area), possiamo supporre che uno dei due lati giaccia sul segmento AB e che il suo punto medio sia C. Dunque nella ricerca del rettangolo di area massima possiamo limitarci a considerare i rettangoli $QRST$ (con i vertici ordinati in senso antiorario) per cui il lato QR giaccia su AB ed abbia centro in C.



Detta x la lunghezza del segmento RS, abbiamo che la lunghezza di QR è $2\sqrt{1-x^2}$, e dunque l'area di $QRST$ è pari a $2x\sqrt{1-x^2}$. La derivata di tale funzione è

$$\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

che è positiva per $x < 1/\sqrt{2}$ e negativa per $x > 1/\sqrt{2}$. Ne segue che la funzione assume il suo massimo in $x = 1/\sqrt{2}$ e, per quanto detto prima, che il rettangolo corrispondente è l'unico rettangolo di area massima tra quelli inscritti in Γ. Le coordinate dei suoi veritici sono: $Q = (-1/\sqrt{2}, 0)$, $R = (1/\sqrt{2}, 0)$, $S = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, $T = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(c) I due triangoli sono rettangoli in H, dunque la loro area è data dal semiprodotto delle lunghezze dei loro cateti. Indicando con $\overline{PH}$ la lunghezza del segmento PH, abbiamo $\overline{PH} = \sin x$; similmente $\overline{HC} = |\cos x|$ (la presenza del valore assuluto è necessaria, in quanto per $\pi/2 < x \leq \pi$ il coseno è negativo, e quindi non può rappresentare la lunghezza di un segmento), e $\overline{AH} = 1 + \cos x$. Dunque otteniamo le equazioni

$$S_1(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos x)\sin x, \qquad S_2(x) = \frac{1}{2}|\cos x| \sin x.$$

Il rapporto di tali aree è dato da

$$f(x) = \frac{1 + \cos x}{|\cos x|}. \tag{1}$$

(d) La funzione definita dall'equazione (1) ha come dominio l'insieme degli x per cui il denominatore è diverso da zero: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Calcolando i limiti di f per x che tende agli estremi del dominio otteniamo

$$\lim_{x \to \pi/2 + k\pi} f(x) = +\infty, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

in quanto il denominatore tende a zero dall'alto, e il numeratore tende a 1.
Osserviamo ora che la funzione è periodica di periodo 2π, quindi per studiarne il grafico è sufficiente restringersi all'intervallo $(-\pi/2, 3\pi/2)$.
Possiamo riscrivere la funzione f come

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 + \cos x}{\cos x}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ -\dfrac{1 + \cos x}{\cos x}, & x \in (\pi/2, 3\pi/2), \end{cases}$$

La derivata prima è data da

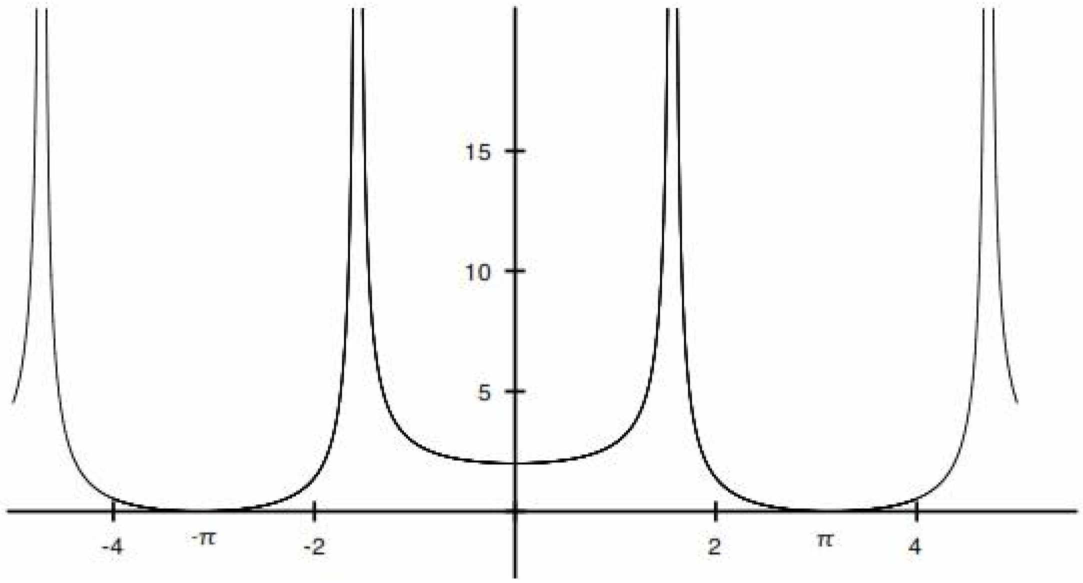
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ -\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, & x \in (\pi/2, 3\pi/2), \end{cases}$$

essa è minore di zero negli intervalli $(-\pi/2, 0)$ e $(\pi/2, \pi)$ - in questi intervalli f è decrescente - e maggiore di zero in $(0, \pi/2)$ e $(\pi, 3\pi/2)$ - in questi intervalli f è crescente. Ne deduciamo, in particolare, che f ha due minimi relativi

nell'intervallo $(-\pi/2, 3\pi/2)$: i punti $x = 0$ e $x = \pi$, per i quali abbiamo $f(0) = 1$ e $f(\pi) = 0$.
La derivata seconda è data da

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ -\dfrac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}, & x \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

È di immediata verifica che essa è strettamente maggiore di 0 in tutto il suo dominio. Ne segue che f è convessa in entrambi gli intervalli $(-\pi/2, \pi/2)$ e $(\pi/2, 3\pi/2)$ e che non ci sono flessi.
Riportiamo qui di seguito un grafico riassuntivo dell'andamento di f.

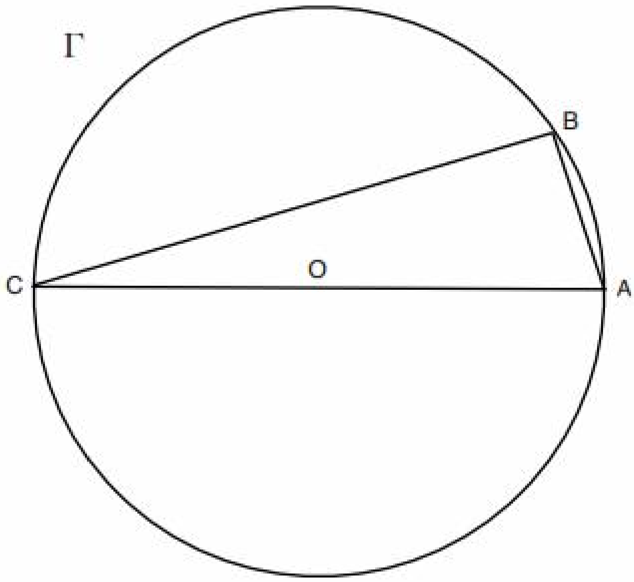


Soluzione dei Quesiti:

1. La proposizione è falsa. Per trovare un controesempio ad essa, si consideri un qualunque piano π e si trovino due solidi S_1, S_2 di uguale volume di cui S_1 interamente contenuto in uno dei due semispazi delimitati da π e S_2 interamente contenuto nell'altro. Consideriamo ora un qualunque piano π' parallelo a π e supponiamo che $\text{Area}(\pi' \cap S_1) > 0$: pur avendo S_1 ed S_2 uguale volume, per nessuna scelta di π' di questo tipo accade che $\text{Area}(\pi' \cap S_1) = \text{Area}(\pi' \cap S_2)$. Infatti la condizione $\text{Area}(\pi' \cap S_1) > 0$ e il fatto che π' sia parallelo a π, ci dicono che π' è interamente contenuto nello stesso semispazio in cui è S_1 (dei due semispazi delimitati da π), dunque la sua intersezione con S_2 è vuota ed ha area nulla.

   C'è un principio matematico la cui formulazione ricorda quella della proposizione in esame, noto come principio di Cavalieri. Esso dice che se S_1 e S_2 sono due solidi e *se esiste* un fascio di piani paralleli che intercetta sui solidi figure di uguale area, *allora* i due solidi hanno lo stesso volume. Si noti che per questo principio l'implicazione va, in un certo senso, nel verso opposto a quello della proposizione data dal testo del problema: nel principio di Cavalieri si prende come ipotesi l'esistenza del fascio di piani con le opportune proprietà e se ne deduce che i solidi hanno lo stesso volume.

2. Ricordiamo che la sezione aurea φ è data da $\varphi = (\sqrt{5} - 1)/2$. Osserviamo che siccome tutti i lati di un decagono regolare inscritto in una circonferenza individuano angoli al centro uguali, ciascuno di essi individua un angolo al centro di $2\pi/10 = \pi/5$. Sia ora Γ una circonferenza di raggio 1 e centro O, AB uno dei lati di un decagono regolare inscritto in Γ e C il punto diametralmente opposto ad A.



Il triangolo ABC è retto in B, inoltre sappiamo che $B\hat{O}A$ è pari a $\pi/5$, ne segue che l'angolo alla circonferenza $B\hat{C}A$ è pari a $\pi/10$, in quanto insiste sullo stesso arco AB. Il seno di $B\hat{C}A$ è, per definizione, pari al rapporto delle lunghezze di AB e AC. Poiché il testo del problema ci ricorda che la lunghezza di AB è pari a $(\sqrt{5}-1)/2$, otteniamo

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

3. Sia r il raggio del cerchio di base ed h l'altezza della casseruola. La superficie S è allora determinata da

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h$$

mentre il suo volume da

$$V = \pi r^2 h$$

Esprimendo h in funzione di r ed S si ha

$$h = \frac{S}{2\pi r} - \frac{r}{2}$$

e sostituendo questa espressione nella formula del volume si ottiene

$$V(r) = \frac{r}{2}(S - \pi r^2)$$

L'espressione va considerata solamente per valori positivi di r e di V. La derivata di V è

$$\frac{S}{2} - \frac{3}{2}\pi r^2$$

che risulta positiva per $0 < r < \sqrt{S/3\pi}$ e negativa per $r > \sqrt{S/3\pi}$. Il punto di massimo (globale per $r > 0$) è quindi $r = \sqrt{S/3\pi}$, dove il volume assume il valore

$$V_{max} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{S^3}{3\pi}}$$

4. La regola di de L'Hôpital, in questo caso specifico, dice che date due funzioni $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e differenziabili in $[a, +\infty)$ tali che

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \end{cases}$$

Applicando questo teorema al nostro caso con $f(x) = x^{2008}$ e $g(x) = 2^x$ si ha che la prima ipotesi è evidentemente soddisfatta. Calcolando le derivate si ha

$$f'(x) = 2008x^{2007}, \qquad g'(x) = \log(2)2^x$$

Per sapere se esiste e quanto vale il limite del rapporto delle derivate si può applicare nuovamente la regola di de L'Hôpital e di nuovo dovremo calcolare le derivate di f' e g':

$$f''(x) = 2008 \cdot 2007x^{2006}, \qquad g''(x) = (\log(2))^2 2^x$$

Iterando questo argomento 2008 volte avremo, indicando con $f^{(2008)}$ e $g^{(2008)}$ le derivate di ordine 2008 di f e g, che

$$f^{(2008)}(x) = 2008 \cdot 2007 \ldots 2 \cdot 1 = 2008!, \qquad g^{(2008)}(x) = (\log(2))^{2008} 2^x$$

Si avrà dunque la catena di uguaglianze

$$0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{2008!}{(\log(2))^{2008} 2^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f^{(2007)}(x)}{g^{(2007)}(x)} = \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e quindi il limite cercato è nullo.

5. Il generico polinomio di terzo grado è della forma

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

dalle condizioni $P(0) = P'(0) = 0$ si ha subito $d = c = 0$. Da $P(1) = 0$ si ottiene la relazione $a + b = 0$. Calcolando l'intregrale si ha

$$\int_0^1 P(x)dx = \frac{a}{4} + \frac{b}{3}$$

e quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ \dfrac{a}{4} + \dfrac{b}{3} = \dfrac{1}{12} \end{cases}$$

che ha unica soluzione $a = -1$, $b = 1$. Il polinomio cercato è quindi $P(x) = -x^3 + x^2$.

6. Sia k la ragione della supposta progressione geometrica. Allora

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{1} + k \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

ed inoltre

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{2} + k$$

da cui, sostituendo il valore trovato per k si ha l'equazione

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = n(n-1) - n.$$

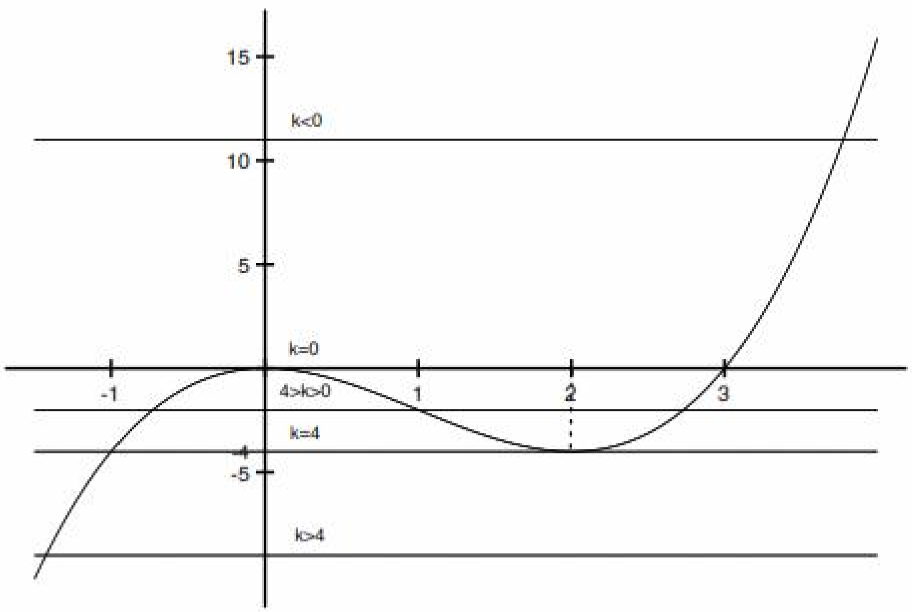
Essendo $n > 3$, l'equazione diventa

$$(n-1)\left(\frac{n-2}{6} - 1\right) = -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad (n-2)(n-7) = 0$$

e quindi l'unica valore possibile per n è $n = 7$.

7. Per ogni k, il numero delle soluzioni dell'equazione è il numero di intersezioni fra il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2$ e la retta di equazione $y = -k$. Studiamo quindi la funzione f. La sua derivata è $3x^2 - 6x$ e risulta positiva per $x < 0$ o $x > 2$, negativa per $0 < x < 2$. I limiti a $\pm\infty$ sono $\pm\infty$ rispettivamente e la funzione si annulla solo in $x = 0$ e $x = 3$. Riassumendo queste informazioni abbiamo quindi che

f ha un massimo locale in 0 (dove vale 0), un minimo locale in 2 (dove vale -4) ed ha grafico tracciato in figura.



Risulta quindi che il numero di soluzioni è

$$\begin{cases} 1 & \text{se } k < 0 \text{ o } k > 4 \\ 2 & \text{se } k = 0 \text{ o } k = 4 \\ 3 & \text{se } 0 < k < 4 \end{cases}$$

A titolo di esempio sono state tracciate le rette per $k = 10, 4, 2, 0, -11$.

8. La funzione $x \mapsto x^\pi$ è definita per tutti e soli gli x maggiori o uguali a 0, mentre la funzione $x \mapsto \pi^x$ è definita per ogni x reale. Ne segue che il dominio di f è la semiretta $[0, +\infty)$. Dal calcolo delle derivate risulta

$$f'(x) = \pi^x \log \pi - \pi x^{\pi-1},$$
$$f''(x) = \pi^x \log^2 \pi - \pi(\pi - 1)x^{\pi-2},$$

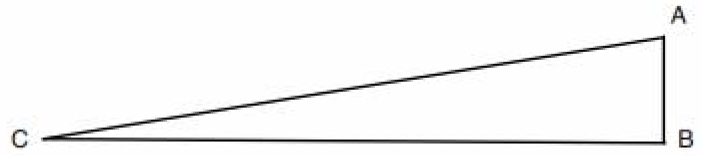
dove $\log \pi$ è il logaritmo naturale di π. Il valore di tali funzioni in π è:

$$f'(\pi) = \pi^\pi \log \pi - \pi^\pi = \pi^\pi(\log \pi - 1),$$
$$f''(x) = \pi^\pi \log^2 \pi - \pi^\pi + \pi^{\pi-1} > \pi^\pi(\log^2 \pi - 1).$$

Poiché $\pi > e$, abbiamo $\log \pi > 1$ e dunque $f'(\pi) > 0$. Analogamente, poiché $\log^2 \pi > 1$, vale anche $f''(\pi) > 0$.

9. Il limite non esiste. Infatti affinché esso esista, devono esistere entrambi i limiti $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ed essi devono essere uguali. Per $x < 1$ abbiamo $f(x) = -(1 + x)$ e dunque vale $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -2$. Se invece $x > 1$, abbiamo $f(x) = 1 + x$ e dunque $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$. Ergo entrambi i limiti esistono ma non sono uguali: in particolare il limite per x che tende ad 1 non esiste, e siamo in presenza di una discontinuità a salto.

10. Il tratto in esame è rappresentato dalla figura qui sotto (non in scala), dove il triangolo ABC è rettangolo in B.



Per ipotesi abbiamo $\overline{AB} = 0,085 Km$ (il dislivello) e $\overline{AC} = 1,2 Km$ (la lunghezza del percorso), dunque la misura in radianti $(B\hat{C}A)_{rad}$ dell'angolo $B\hat{C}A$ è data da

$$(B\hat{C}A)_{rad} = \arcsin\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\right) \simeq 0,071.$$

La misura in gradi sessagesimali $(B\hat{C}A)_{grad}$ dello stesso angolo è data da

$$(B\hat{C}A)_{grad} = \frac{180}{\pi}(B\hat{C}A)_{rad} \simeq 4,06.$$

La percentuale da indicare nel segnale, è pari alla tangente dell'angolo $B\hat{C}A$, ed è dunque data da:

$$\tan(B\hat{C}A) = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{0,085}{\sqrt{(1,2)^2 - (0,085)^2}} \simeq 0,071.$$