M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 sen \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

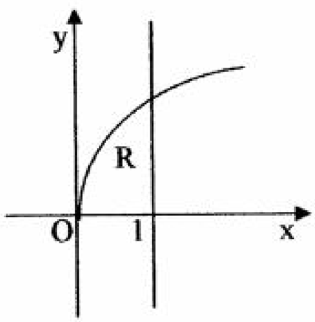
M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

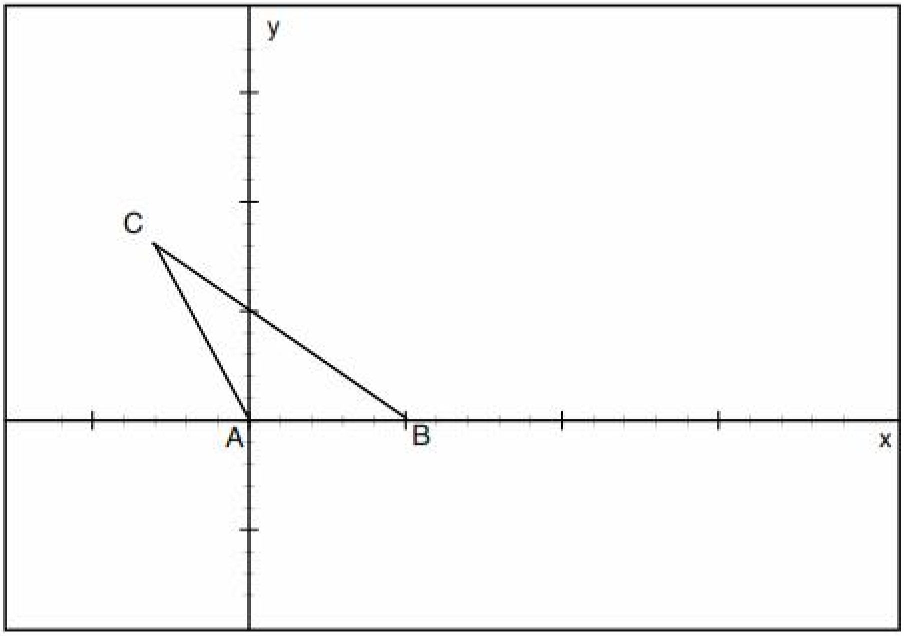
QUESTIONARIO

1. La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta x = 1 (in figura) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



2. Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm . Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.
3. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0$$
4. Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.
5. Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *teorema del valor medio* (o *teorema di Lagrange*) sull'intervallo [-2, 2]. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.
6. Si sa che il prezzo *p* di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?
7. Se *f(x)* è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo [-2, 2], che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?
8. Si risolva l'equazione: $4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}$
9. Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.
10. Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e a *paralleli*, a *latitudini* e a *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera *S* e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta *r* passante per il centro di *S*, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Problema 1

1. 

Fissato un sistema di assi cartesiani come in figura, chiamiamo α l'angolo $C\hat{A}B$, e β l'angolo $A\hat{B}C$. Si ha dunque $\alpha = 2\beta$ per ipotesi. Se C ha coordinate (x, y) vale

$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \tan\alpha \\ \frac{y}{1-x} = \tan\beta \end{cases}$$

Poiché

$$\tan 2\beta = 2\frac{\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

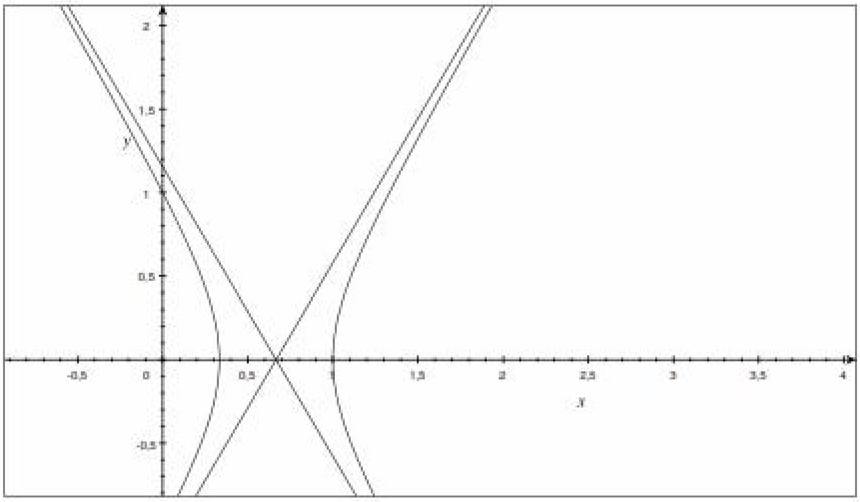
si ha

$$\frac{y}{x} = 2\frac{\frac{y}{1-x}}{1-\left(\frac{y}{1-x}\right)^2}$$

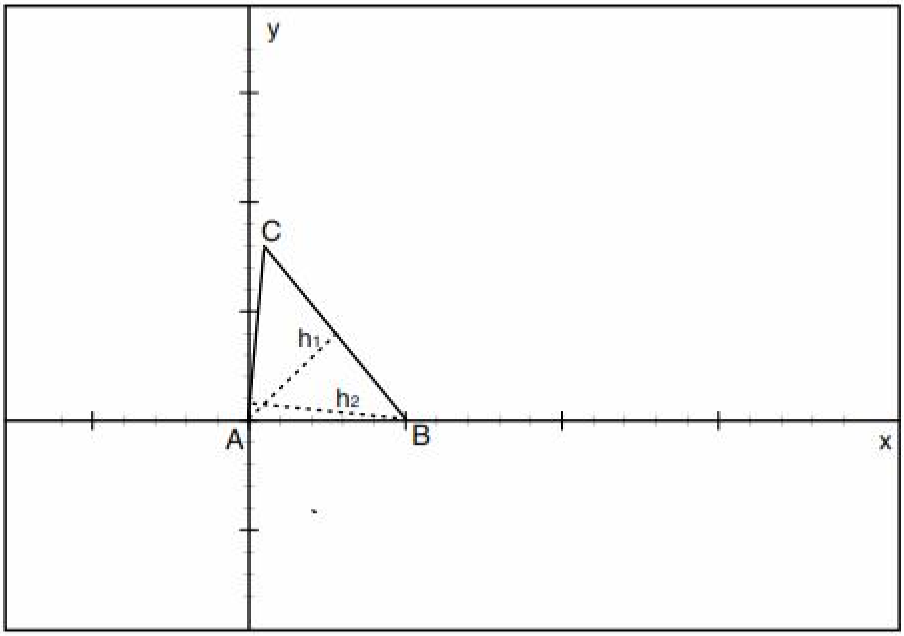
ossia, dopo alcune manipolazioni algebriche

$$3x^2 - y^2 - 4x + 1 = 0$$

che è l'equazione di un'iperbole con asintoti $y = \pm\sqrt{3}x \mp \frac{4}{2\sqrt{3}}$.



2. Solo il ramo sinistro dell'iperbole soddisfa alle ipotesi del problema.

3. 

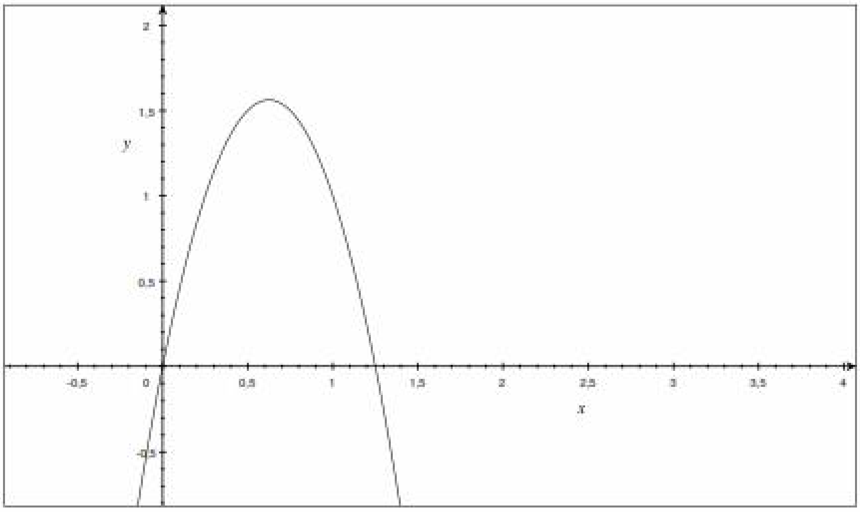
Riferendosi alla figura, chiamiamo le altezze relative ad AC e BC rispettivamente h_1 e h_2. Poiché $\overline{AB} = 1$ si ha

$$\begin{cases} h_1 = \sin\alpha \\ h_2 = \sin\beta \end{cases}$$

e quindi, ricordando che $\alpha = 2\beta$ e $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$

$$h_1^2 + h_2^2 = \sin^2 2\beta + \sin^2\beta = \sin^2\beta(5 - 4\sin^2\beta)$$

Ponendo $\sin^2\beta = t$, dovremo trovare il massimo valore di $t(5-4t)$, che viene assunto per $t = 5/8$.



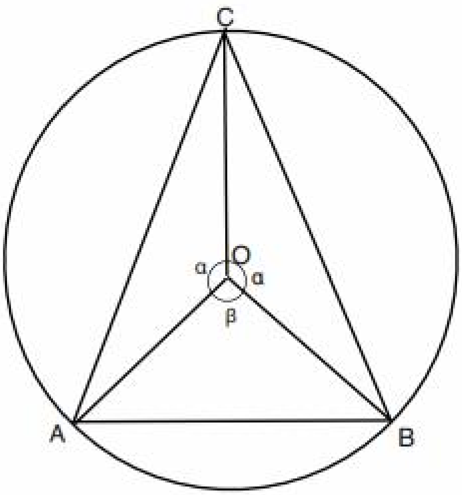
Si ha quindi che l'angolo che massimizza la somma dei quadrati delle altezze deve soddisfare

$$\sin^2 \beta = \frac{5}{8} \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = \pm \arcsin(\sqrt{\frac{5}{8}}) \simeq \pm(52^\circ \ 14')$$

4. Essendo $\beta = 36^\circ$, si ha che $\alpha = 72^\circ$ e quindi l'angolo $B\hat{C}A$ deve essere anch'esso pari a 72°. Quindi il triangolo è isoscele e risulta essere un settore del pentagono regolare inscritto nel cerchio unitario. Dalla geometria sintetica sappiamo che il lato del pentagono è in rapporto aureo col raggio del cerchio circoscritto e quindi pari a $(\sqrt{5} - 1)/2$.

Problema 2

1. Sia ABC un triangolo isoscele in C inscritto nella circonferenza unitaria di centro O.



Indichiamo con α la misura (in radianti) degli angoli $C\hat{O}B$ e $C\hat{O}A$ e con β quella dell'angolo $A\hat{O}B$. Si ha $\beta = 2\pi - 2\alpha$. Osserviamo preliminarmente che deve essere $\pi \geq \alpha \geq \pi/2$. Essendo l'area di un qualsiasi triangolo pari al semiprodotto di due lati per il seno dell'angolo compreso, abbiamo

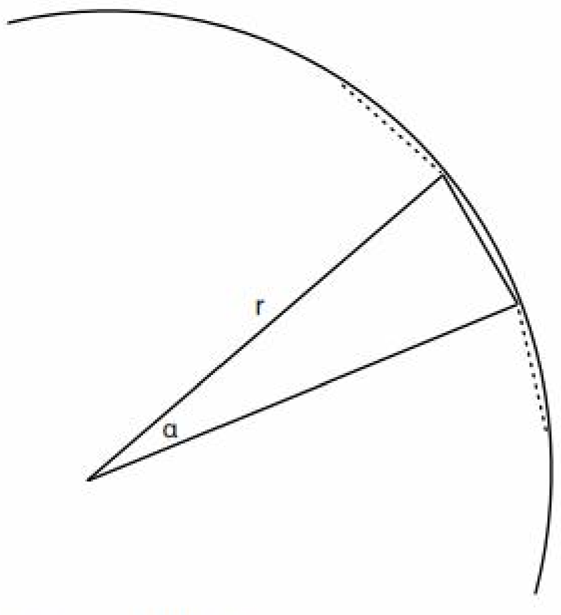
$$\begin{cases} Area(AOC) = Area(COB) = \frac{1}{2}\sin\alpha \\ Area(AOB) = \frac{1}{2}\sin\beta \end{cases}$$

quindi l'area totale $Area(ABC)$ espressa in termini di α è dunque

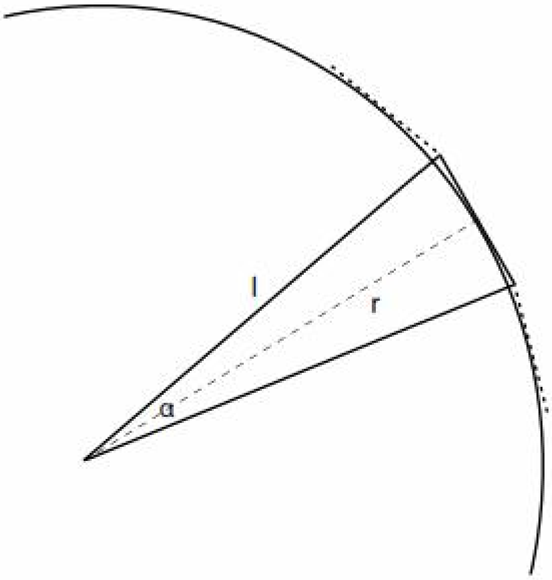
$$Area(ABC) = \sin\alpha + \frac{1}{2}\sin\beta = \sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha$$

dove si è utilizzato che $\sin(2\pi - 2\alpha) = -\sin 2\alpha = -2\sin\alpha\cos\alpha$. Derivando l'espressione ottenuta si ottiene $\cos\alpha + 1 - 2\cos^2\alpha$ che si annulla, cambiando di segno, per $\alpha = 2\pi/3$ dove in effetti si ha un massimo. Ma allora $\beta = \alpha = 2\pi/3$ e quindi il triangolo che massimizza l'area è quello equilatero.

2. Il poligono regolare di n lati sarà composto da n triangoli isosceli di angolo al centro pari a $2\pi/n$ e lato r. Ciascun triangolo ha dunque area $\frac{r^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ e la somma delle n aree sarà la quantità richiesta.



L'area del poligono regolare circoscritto si ottiene anch'essa come somma delle aree dei triangoli isosceli di pari angolo al centro, ma i lati l soddisfano ora $r = l\cos\frac{\pi}{n}$.



Quindi l'area totale del poligono circoscritto risulta

$$\frac{n}{2}\frac{r^2}{\cos^2\frac{\pi}{n}}\sin\frac{2\pi}{n}.$$

3. Sfruttando un limite notevole si ha

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \pi r^2 \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n} = \pi r^2$$

che giustamente coincide con l'area del cerchio.

4. Il problema è quello di costruire, usando solo riga e compasso, un quadrato con la stessa area di un dato cerchio. L'impossibilità di ciò deriva dal fatto che π è un numero trascendente.

Soluzioni Quesiti

1. Chiamiamo A_t l'area della sezione del solido col piano perpendicolare all'asse delle x in $x = t$. Essendo la sezione stessa un triangolo equilatero di lato $2\sqrt{t}$ e quindi di area $\sqrt{3}/4$ volte il quadrato del lato, si ha

$$A_t = \sqrt{3}t$$

e integrando per t compreso fra 0 e 1 si ottiene il volume:

$$\int_0^1 \sqrt{3}t dt = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Chiamiamo a, b e c rispettivamente i lati di lunghezza 40, 60 e 80 e i rispettivi angoli opposti α, β e γ. Applicando ciclicamente il teorema di Carnot si ha

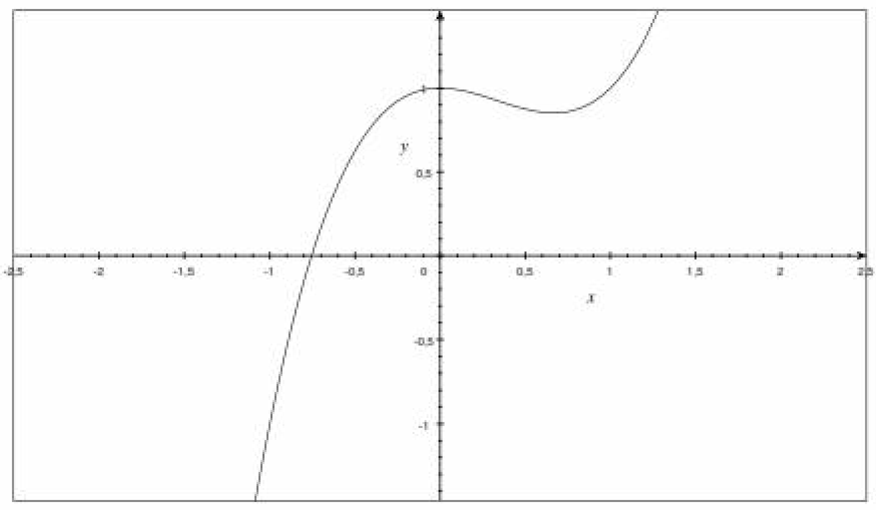
$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos\gamma \end{cases}$$

da cui inserendo i dati e risolvendo nel coseno, si ottiene

$$\begin{cases} \cos\alpha = 0,875 \Rightarrow \alpha \simeq 28°57' \\ \cos\beta = 0,6875 \Rightarrow \beta \simeq 46°34' \\ \cos\gamma = -0,25 \Rightarrow \gamma \simeq 104°29' \end{cases}$$

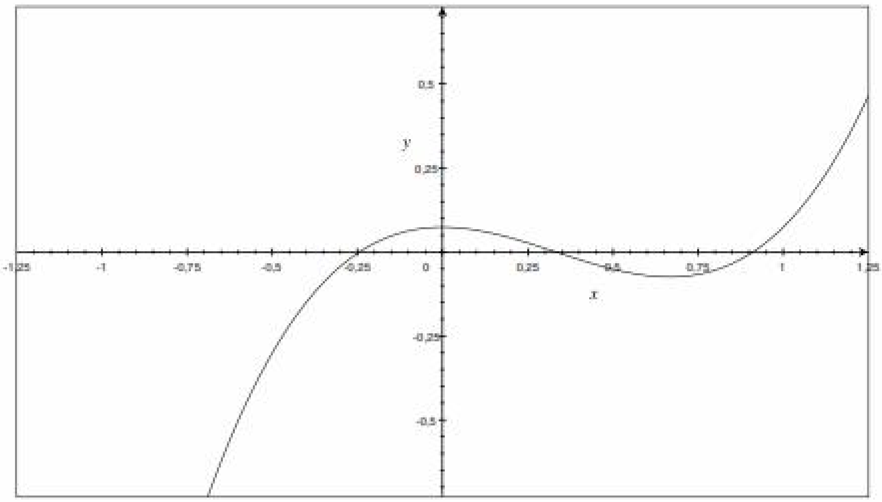
3. Calcolando la derivata si ottiene $f'(x) = 3x^2 - 2x$, che ha segno negativo se e solo se $x \in (0, 2/3)$. Quindi si ha un massimo locale in 0 e un minimo locale in 2/3. Allora si avrà

(a) Una sola soluzione se il massimo locale è negativo. Ciò avviene se $-k + 1 < 0$ ossia $k > 1$



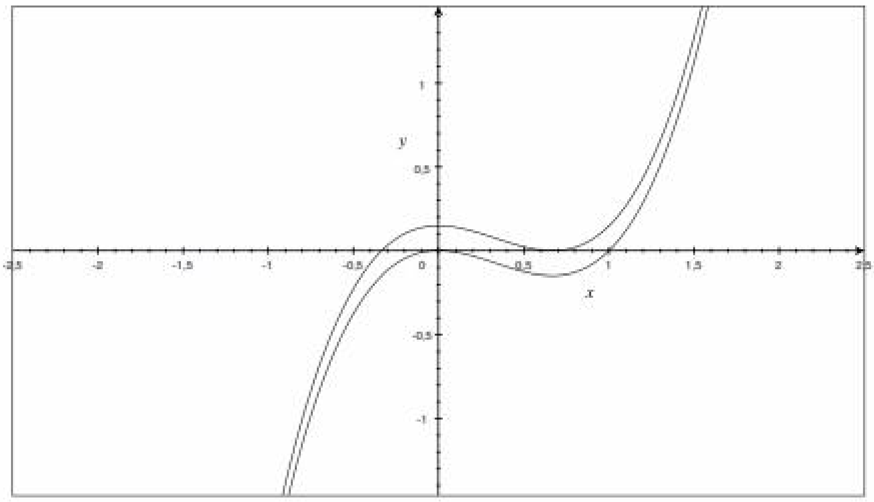
(b) Tre soluzioni se il massimo è positivo e il minimo negativo. Ciò avviene se

$$\begin{cases} -k+1>0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2-k+1<0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{23}{27}<k<1$$



(c) Due sole soluzioni (o tre soluzioni di cui due coincidenti) se il minimo o il massimo sono nulli, ossia rispettivamente se

$$\begin{cases} -k+1=0 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2-k+1=0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad k=1,\ k=\frac{23}{27}$$



4. Sia h l'altezza del cono. Essendo il cono retto e l'apotema unitario, si ha che $r = \sqrt{1-h^2}$. Il volume di un cono retto è un terzo dell'area di base per l'altezza e quindi detto Vol_h il volume del cono in questione si ha

$$Vol_h = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}(1-h^2)h.$$

Calcolando la derivata si ottiene

$$\frac{\pi}{3}(1-3h^2)$$

che ha segno positivo solo per $-1/\sqrt{3} < h < 1/\sqrt{3}$. Poichè ha senso considerare solo $1 > h > 0$, si ha un massimo per $h = 1/\sqrt{3}$, che fornisce il volume massimo Vol_{max} pari a

$$Vol_{max} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}m^3,$$

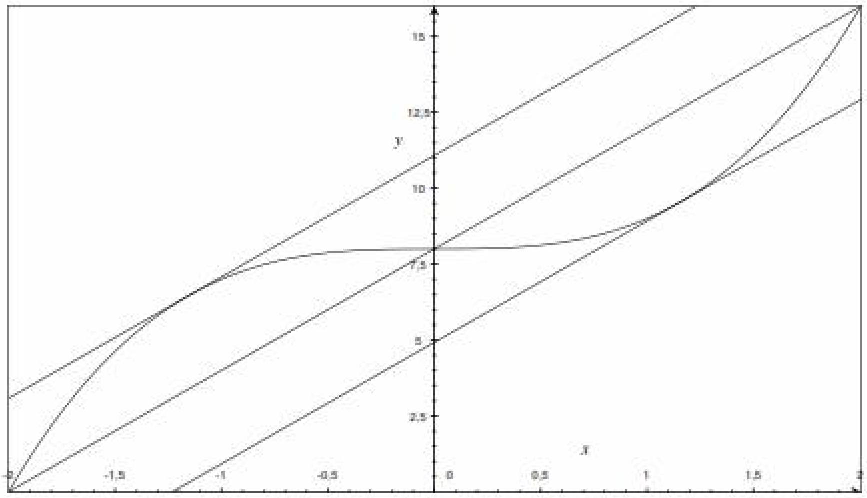
che corrisponde ad una capacità di

$$\frac{2000\pi}{9\sqrt{3}}\ l \simeq 403\ l$$

5. La funzione è continua in $[-2, 2]$ e differenziabile in $(-2, 2)$. Quindi il teorema di Lagrange è applicabile alla funzione $f(x) = x^3 + 8$, e la sua tesi afferma l'esistenza di un punto c, con $a < c < b$ tale che

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2-(-2)} = f'(c) \qquad \Leftrightarrow \qquad 4 = 3c^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Il significato geometrico del teorema consiste nell'osservare che la secante è parallela alla tangente a f in almeno un punto intermedio, e nel caso di specie di punti con tale proprietà ve ne sono due.



6. Il prezzo finale non dipenderà dall'ordine in cui il prezzo è variato. In ogni caso si otterrà un prezzo inferiore di un fattore

$$(1+\frac{6}{100})(1-\frac{6}{100}) = (1-\frac{0,36}{100})$$

ossia una diminuzione dello $0,36\%$.

7. L'integrale della funzione sarà nullo. Per l'additività dell'integrale

$$\int_{-2}^{2}(f(x)+3)dx = 0 + \int_{-2}^{2} 3dx = 12$$

8. Espandendo i coefficienti binomiali in base alla formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots 2}{k(k-1)\dots 2(n-k)(n-k-1)\dots 2}$$

si ha

$$4\frac{n(n-1)\dots 2}{4\cdot 3\cdot 2\cdot (n-4)(n-5)\dots 2} = \frac{(n-2)(n-3)\dots 2}{3\cdot 2\cdot (n-5)(n-6)\dots 2}$$

e semplificando i termini uguali si perviene all'equazione

$$n(n-1) = 15(n-4)$$

che ha soluzioni $n=6$ e $n=10$.

9. Essendo la funzione pari, ci basta effettuare l'integrazione per $x \in [0,1]$ Effettuiamo il cambio di variabile $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos^2 t dt$$

Sommando e sottraendo $1/2$ si ha

$$\int \cos^2 t dt = \int \frac{1}{2}dt - \frac{1}{2}\int (1-2\cos^2 t)dt$$

e ricordando la formula di bisezione $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$ si ha infine

$$\int \cos^2 t dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2}$$

Ricordando la sostituzione e la formula di duplicazione del seno $\sin 2t = 2 \sin t \cos t$ si ottiene

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}),$$

valida per $0 \leq x < 1$, mentre per $-1 < x < 0$ si otterrà per parità

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})$$

L'integrale definito viene calcolato mediante la primitiva e risulta

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

valore che ovviamente coincide con il significato geometrico dell'area del settore di cerchio unitario nel primo quadrante.

10. Considerando la simmetria della sfera rispetto all'asse di rotazione si possono introdurre due coordinate di natura angolare: una descriverà l'angolo che la proiezione sul piano equatoriale di un punto sulla superficie terrestre forma con un meridiano fissato (nel nostro caso quello di Greenwich). L'altra descriverà l'angolo che il punto sulla superficie terrestre forma col piano equatoriale. In questo modo tutti i punti sulla terra risultano identificati mediante i due angoli, ad eccezione dei soli poli.