

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50\ cm^2$, margini superiore e inferiore di $4\ cm$ e margini laterali di $2\ cm$. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$
8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Problema 1

1. Indicando con A e B i lati del rettangolo, il perimetro è $2A + 2B = \lambda$ mentre l'area è $\mathcal{A} = AB$. Dalla prima deduciamo $B = \lambda/2 - A$ e inserendo nella seconda $\mathcal{A} = A(\lambda/2 - A)$ che è una parabola con la concavità rivolta verso il basso nella variabile indipendente A. Avendo soluzioni $A = 0$ e $A = \lambda/2$, assume massimo nel punto intermedio $A_{max} = \lambda/4$ e quindi $B = A = \lambda/4$ e l'aiuola di area massima è un quadrato di superficie $\lambda^2/16$.

2. Detti P_Q e P_C i perimetri del quadrato di lato l e del cerchio di raggio r rispettivamente, si ha $P_Q = 4l$ mentre $P_C = 2\pi r$. Le aree rispettive sono quindi $\mathcal{A}_Q = P_Q^2/16$ e $\mathcal{A}_C = P_C^2/4\pi$. Essendo $P_Q + P_C = \lambda$ possiamo esprimere la somma delle aree in funzione di P_Q come

$$\mathcal{A}_{tot} = \frac{4+\pi}{16\pi}P_Q^2 - \frac{\lambda}{2\pi}P_Q + \frac{\lambda^2}{4}$$

   che è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice in corrispondenza di $P_Q = \frac{4\lambda}{4+\pi}$ che fornisce il minimo dell'area con l'aiuola quadrata di lato $\frac{\lambda}{4+\pi}$ e l'aiuola circolare di raggio $\frac{\lambda}{8+2\pi}$.

   che è una parabola con concavità rivolta verso l'alto e vertice in corrispondenza di $P_Q = \frac{4\lambda}{4+\pi}$ che fornisce il minimo dell'area con l'aiuola quadrata di lato $\frac{\lambda}{4+\pi}$ e l'aiuola circolare di raggio $\frac{\lambda}{8+2\pi}$.

3. Il massimo si ottiene quando tutto il filo viene utilizzato per delimitare l'aiuola circolare, di raggio $\lambda/2\pi$.

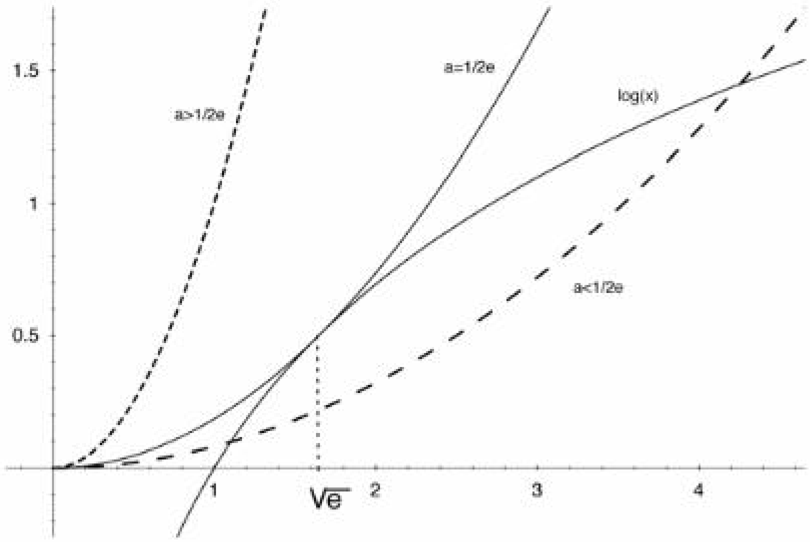
Ogni lato della nuova scatola è 11/10 del lato iniziale, dunque il volume della scatola ingrandita è $\left(\frac{11}{10}\right)^3$ dell' iniziale, determinandone così un incremento del 33, 1%.

Problema 2

1. Per $a \leq 0$ f è crescente e g è non crescente sul dominio di definizione di f. Poichè in $x = 1$ $f(1) = 0$ e $g(1) \leq 0$ per il teorema degli zeri si ha un'unica soluzione. Per $a > 0$ la condizione di tangenza implica l'uguaglianza delle derivate, ossia

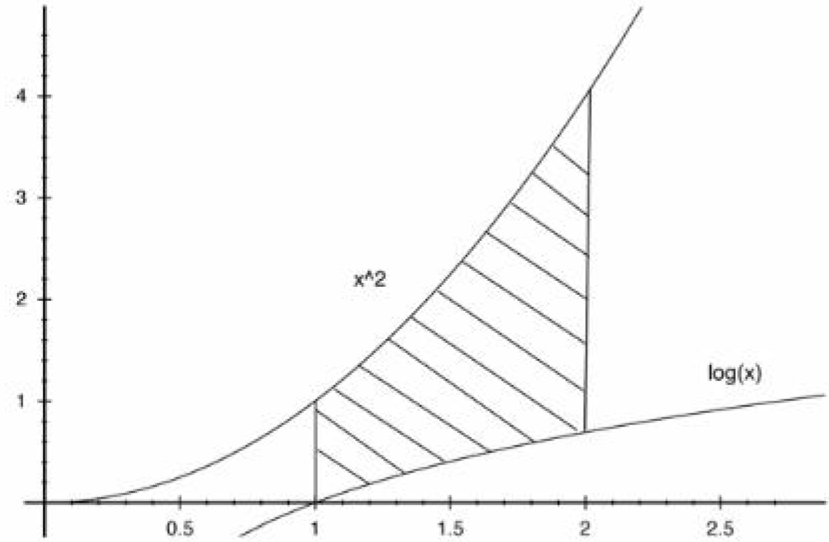
$$f'(x) = g'(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x} = 2ax \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

(nel dominio $\{x > 0\}$ del logaritmo). Sostituendo il valore trovato nell'equazione $f(x) = g(x)$ si ottiene $a = 1/2e$. Per questo valore di a si ha quindi tangenza delle funzioni nel punto di ascissa $\sqrt{e}$. Essendo g crescente in a, se $a > 1/2e$ non si hanno soluzioni. Se invece $0 < a < 1/2e$ si hanno esattamente due soluzioni, dal momento che $f - g$ è una funzione concava, quindi ha al massimo due intersezioni con l'asse x.

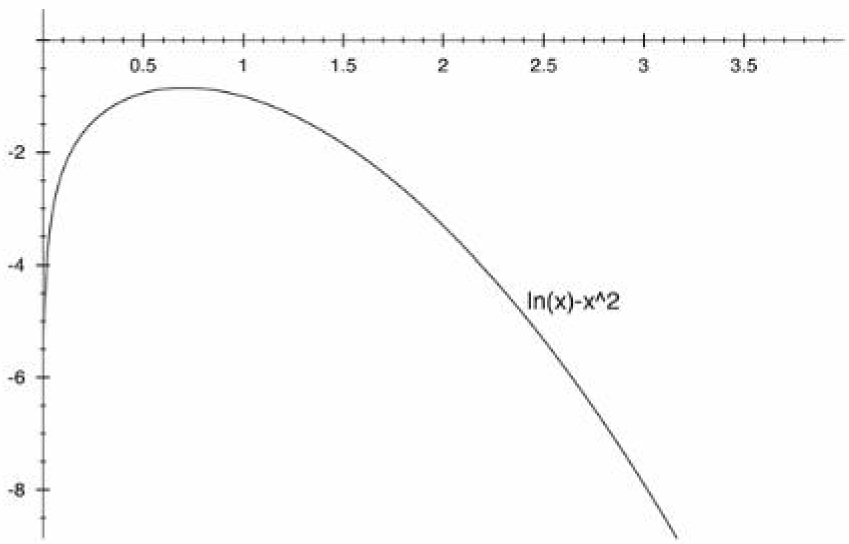


2. Essendo $a = 1 > 1/2e$ si ha $g > f$ per ogni $x > 0$, quindi l'area indicata (tratteggiata in figura) si ottiene integrando $g - f$ fra 1 e 2, ottenendo

$$Area = \int_1^2 (x^2 - \log x)dx = \frac{x^3}{3} - x\log x + x\Big|_1^2 = \frac{10}{3} - 2\log 2$$



3. Il dominio di $\log x - ax^2$ è $\{x > 0\}$, e si ha $\lim_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$ (osservando che $a > 0$). Il segno è sempre negativo, essendo $a > 1/2e$ e la derivata è positiva in $(0, 1/\sqrt{2a})$, negativa in $(1/\sqrt{2a}, +\infty)$ e nulla in $1/\sqrt{2a}$, dove quindi la funzione ha massimo assoluto. Non vi sono asintoti obliqui né orizzontali dal momento che $h'(x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$. Infine la funzione è concava in quanto somma di funzioni concave. In figura è rappresentato il grafico nel caso $a = 1$.



Questionario

1. Il numero totale di chicchi si ottiene come somma della serie geometrica

$$1+2+2^2+\cdots+2^{63}=\sum_{n=0}^{63}2^n=2^{64}-1$$

da cui deduciamo il peso totale in tonnellate P_{ton} come

$$P_{ton}=\frac{1}{10^6}P_g=10^{-6}\left(38\frac{2^{64}-1}{10^3}\right)\simeq 38\frac{2^{64}}{10^9}\simeq 700976471852,37$$

(dove P_g è il peso in grammi) ossia circa 701 miliardi di tonnellate!

2. Si osserva innanzi tutto che la somma degli angoli delle facce che si incontrano in un vertice di un poliedro deve essere strettamente minore di 360°. Inoltre per formare un vertice sono necessarie almeno tre facce. Nel caso le facce siano triangolari, gli angoli saranno di 60°, quindi abbiamo tre possibilità:

   (a) 3 facce: la somma degli angoli è 180°, e si ottiene il tetraedro.

   (b) 4 facce: la somma degli angoli è 240°, e si ottiene l'ottaedro.

   (c) 5 facce: la somma degli angoli è 300°, e si ottiene l'icosaedro.

   Nel caso di facce quadrate gli angoli saranno di 90° quindi le facce incidenti in un vertice non possono essere più di 3 (con somma 270°), generando il cubo. Per facce pentagonali, la somma degli angoli può essere al massimo $3\times 108°=324°$ corrispondente al caso del dodecaedro. Se il numero di lati delle facce è maggiore o uguale a 6 l'angolo al vertice del poligono è maggiore o uguale 120° e quindi la somma di almeno tre di questi angoli è maggiore o uguale a 360°.

3. Siano a e b i lati dell'area di stampa. L'area del foglio (in centimetri quadrati) sarà pari a $(a+8)(b+4)$. Essendo $ab=50$ si ha $b=50/a$ e quindi l'area del foglio sarà $(a+8)(50/a+4)$. Studiando la funzione della variabile indipendente a così ottenuta, si osserva che essa assume minimo (in $\{a>0\}$) per $a=10$, da cui $b=5$. Si ottiene quindi che il foglio di area massima ha misure 18×9.

4. Essendo la diagonale di un cubo $\sqrt{3}$ volte il lato e osservando che la diagonale del cubo inscitto è un diametro della sfera si ha che il lato del cubo è $1/\sqrt{3}$ metri e il volume $1/3\sqrt{3}$ metri cubi, pari a circa $192,45$ litri.

5. Posto

$$(a+b)^n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} b + \cdots + c_n b^n$$

per calcolare la somma dei coefficienti $c_1, \ldots, c_n$ è sufficiente porre $a = b = 1$, ottenendo

$$2^n = (1+1)^n = c_0 + c_1 + \cdots + c_n.$$

6. Poniamo innanzitutto $y = 2x$, con $30° < y < 90°$. Osservando che $k = 0$ non può mai dare soluzione, dobbiamo determinare per quali valori di k l'equazione

$$\cos y = \frac{5k-2}{k}$$

ha soluzione per $30° < y < 90°$. In questo dato intervallo la funzione coseno assume tutti e soli i valori strettamente compresi fra $0 = \cos 90°$ e $\sqrt{3}/2 = \cos 30°$. Risolvendo il conseguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \frac{5k-2}{k} > 0 \\ \frac{5k-2}{k} < \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

si ottiene $\frac{2}{5} < k < \frac{4}{10-\sqrt{3}}$.

7. La funzione soddisfa le ipotesi del teorema di lagrange perché è continua e derivabile in tutto $[0,1]$. Osserviamo preliminarmente che il punto ξ citato nel teorema deve essere interno all'intervallo. Ponendo $a = 0$ $b = 1$ e risolvendo in ξ nella formula data si ottiene l'equazione

$$-1 = 3\xi^2 - 4\xi$$

che fornisce le soluzioni $\xi = 1/3$ e $\xi = 1$, di cui la seconda va esclusa in quanto estremo dell'intervallo.

8. In effetti $\tan(\pi/4) = 1$ mentre $\tan(3\pi/4) = -1$. La funzione $\tan x$ è strettamente crescente dove definita, in quanto la sua derivata è pari a $1 + \tan^2 x$, quindi sempre positiva. Tuttavia la funzione non è definita in $x = \pi/2 \in [\pi/4, 3\pi/4]$ ed in particolare $\lim_{x\to\pi/2^-} \tan x = +\infty$ (da cui $\tan x > 1$ per $\pi/4 \leq x < \pi/2$) e $\lim_{x\to\pi/2^+} \tan x = -\infty$ (da cui $\tan x < -1$ per $\pi/2 < x \leq 3\pi/4$). Ciò non contraddice il teorema degli zeri perché la funzione non è continua nell'intervallo indicato.

9. Essendo $f(x) \neq 0$ per ogni x, possiamo dedurre che

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dx}\log(f(x)) = 1$$

e integrando ambo i membri e applicando il teorema fondamentale del calcolo e il fatto che $f(0) = 1$

$$\int_0^x \frac{d}{dt} \log(f(t))dt = \int_0^x 1dt \quad \Leftrightarrow \quad \log(f(x)) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = e^x$$

10. Poiché in $4\pi/3$ si ha un estremo, la derivata di f si deve annullare in $4\pi/3$. Mettendo a sistema con la condizione $f(2\pi/3) = 1$ si ottiene perciò

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b = 0 \\ a\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{b}{2} = 1 \end{cases}$$

che ha l'unica soluzione $a = \sqrt{3}$, $b = 1$. La funzione risulta quindi $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ che si può riscrivere come $f(x) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$, di periodo 2π.