Sessione ordinaria 2005

Seconda prova scritta

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione *R,* finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno all'asse *y*.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di *R* attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di *k* per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di *R*.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa *t*. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di *t* per il quale $A(t)$ è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione *f* definita sull'intervallo $[0\,;+\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \quad se \quad x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se *f* è *continua* e *derivabile* in 0.
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0\,;+\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta *r* tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia *n* un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di *n*, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente *r* e dalle due rette: $x = \dfrac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare $sen18°$, $sen36°$.
2. Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di *0,4 litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).
3. Si dimostri che la curva $y = x\,sen\,x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $sen\,x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $sen\,x = -1$
4. Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.
5. Il numero *e* di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x ?
6. Come si definisce $n!$ (*n* fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perchè?
7. Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.
8. I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. E' un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?
9. Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:
$$sen^2(35°) + sen^2(55°)$$
ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.
10. Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = arctg\,x - arctg\,\dfrac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

PROBLEMA 1

1) Il volume del solido di rotazione è dato da:

$$V_1 = \pi \int_0^6 R^2(y)dy = \pi \int_0^6 \left(\sqrt{6-y}\right)^2 dy = 18\pi.$$

2) Ricavando i raggi di rotazione interno ed esterno, si ha $R_{int}(x) = 6-(6-x^2) = x^2$ e $R_{est} = 6$ e dunque il volume del solido di rotazione è dato da:

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[R_{est}^2(x) - R_{int}^2(x)\right] dx = \pi \int_0^{\sqrt{6}} \left[6^2 - x^4\right] dx \\ &= \pi \left(36\sqrt{6} - \frac{(\sqrt{6})^5}{5}\right) = \frac{144\sqrt{6}}{5}\pi. \end{aligned}$$

3) Chiamando $R(k)$, per $0 \leq k \leq 6$, l'area della porzione di R sopra alla retta $y = k$, si ha

$$\begin{aligned} R(k) &= \int_0^{\sqrt{6-k}} (6-x^2-k)dx = (6-k)\sqrt{6-k} - \frac{1}{3}(6-k)\sqrt{6-k} \\ &= \frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k}. \end{aligned}$$

Quindi, osservando che l'area di R è proprio $R(0)$, vogliamo risolvere l'equazione $R(k) = R(0)/2$ ossia

$$R(k) = \frac{2}{3}(6-k)\sqrt{6-k} = 2\sqrt{6} = \frac{R(0)}{2} \quad \longrightarrow \quad 6-k = (3\sqrt{6})^{\frac{2}{3}}$$

da cui si deriva con semplici calcoli $k = 3(2-\sqrt[3]{2})$.

4) Ricordiamo che la retta tangente al grafico di una funzione f nel punto $(t, f(t))$ è data da $y = f(t) + f'(t)(x-t)$. Quindi per $f(x) = 6-x^2$ otteniamo che la retta tangente a λ nel suo punto di ascissa t ha equazione

$$y = 6 - t^2 - 2t(x-t),$$

e determina quindi un triangolo di vertici dati dall'intersezione con gli assi coordinati e dall'origine: l'intersezione con l'asse delle ascisse si trova ponendo $y = 0$ e risolvendo in x per ottenere $x(t) = (6+t^2)/2t$; l'intersezione con l'asse delle ordinate si trova ponendo $x = 0$ per ottenere $y(t) = 6 + t^2$. $A(1)$ risulta quindi essere

$$A(1) = \frac{x(1)y(1)}{2} = \frac{7 \cdot 7}{4} = \frac{49}{4}$$

5) Dal punto precedente si ricava l'espressione per $A(t)$:

$$A(t) = \frac{x(t)y(t)}{2} = \frac{(6+t^2)^2}{2t}.$$

Per trovare il punto di minimo basta porre $A'(t) = 0$ ottenendo

$$\frac{4t^2(6+t^2) - (6+t^2)^2}{2t} = 0 \quad \rightarrow \quad 3t^2 - 6 = 0$$

che fornisce l'unica soluzione positiva $t = \sqrt{2}$, che risulta essere punto di minimo per considerazioni sul segno della derivata.

PROBLEMA 2

1) Per la continuità è sufficiente studiare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x^2 + 1 - x^2 \log x = 1 - 0 = 1.$$

Per la differenziabilità studiamo il limite del rapporto incrementale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{2}x - x\log x = 0,$$

quindi f risulta continua e derivabile in $x = 0$.

2) Osserviamo innanzi tutto che $f(x)$ tende a $-\infty$ per $x \to +\infty$ e quindi, per il Teorema del Valore Intermedio, essendo f continua e assumendo valori sia positivi ($f(0) = 1$) che negativi ($f(e^2) < 0$), l'equazione $f(x) = 0$ ha almeno una soluzione. Calcolando la derivata si ha

$$f'(x) = 2x(1 - \log x)$$

e quindi la funzione ha un punto a tangente orizzontale in $x = 0$, che risulta di minimo locale. Essa è crescente per $0 \leq x \leq e$, assume un massimo positivo in $x = e$ e risulta decrescente per $x \geq e$. Pertanto l'equazione $f(x) = 0$ ha una e una sola soluzione.

3) Dal calcolo della derivata seconda: $f''(x) = -2\log x$ si ricava che la funzione è convessa per $0 \leq x \leq 1$, ha un flesso in $x = 1$ ed è concava per $x \geq 1$. Raccogliendo tutte queste informazioni si ricava il grafico in figura. Per quel che riguarda l'equazione della retta tangente r nel punto di flesso si ha

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \rightarrow \quad y = \frac{5}{2} + 2(x-1) \quad \rightarrow \quad y = 2x + \frac{1}{2}.$$

4) L'area A_n evidenziata in figura si ottiene come (integrando per parti il termine $x^2 \log x$)

$$
\begin{aligned}
A_n &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[f(x)-(2x+\frac{1}{2})\right]dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left[\frac{3}{2}x^2-2x+\frac{1}{2}-x^2\log x\right]dx \\
&= \left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\log x+\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{1}{9}-\frac{11}{18n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^3}\log(\frac{1}{n}).
\end{aligned}
$$

5) Si ha che A_n tende a $1/9$ per n che tende a $+\infty$ e questo fatto si giustifica osservando che la porzione di piano di cui al punto 4) tende ad essere la porzione delimitata dalla curva C, dalla retta tangente R e dalle due rette $x = 1$ e $x = \lim(1/n) = 0$, di area

$$
A_\infty = \int_0^1 \left[f(x)-(2x+\frac{1}{2})\right]dx = \left[\frac{x^3}{2}-x^2+\frac{x}{2}-\frac{x^3}{3}\log x+\frac{x^3}{9}\right]_0^1 = \frac{1}{9}
$$

osservando che la funzione fra parentesi quadre, pur non essendo definita in 0 è ivi estendibile con continuità.

QUESTIONARIO

1) Detto OAB il triangolo isoscele avente lati OA e OB unitari e lato AB coincidente con quello del decagono, si tracci la bisettrice BH all'angolo OBA. Essendo l'angolo $AOB = \pi/5$ si ha che

$$
\frac{\pi}{5}+OAB+OBA=\pi \quad \rightarrow \quad OAB=\frac{2}{5}\pi \quad \rightarrow \quad ABH=\frac{\pi}{5}.
$$

Quindi i due triangoli ABH e OAB avendo due angoli uguali ($ABH = BOA$ e OAB è in comune) sono simili. Dette quindi x e y le lunghezze di AB e HA rispettivamente, si ha la proporzione

$$
x:y=1:x \quad \rightarrow \quad x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}
$$

che è il rapporto aureo. La metà del lato del decagono è quindi il seno di $\pi/10 = 18°$, mentre il $\sin(36°)$ si può calcolare mediante le forme di duplicazione ottenendo

$$
\sin(36°)=2\frac{\sqrt{5}-1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.
$$

2) Per poter utilizzare la quantità minima di materiale per costruire la lattina è necessario minimizzare la superficie del cilindro. Osserviamo che l'area S della superficie e il volume V sono date, per il cilindro, da

$$
S=2\pi R(R+h) \quad \text{e} \quad V=\pi R^2 h
$$

dove R è il raggio della base e h l'altezza del cilindro. Poichè il volume è assegnato e pari a $0.4l = 0.4dm^3$, deduciamo l'espressione dell'altezza h in funzione del raggio R come $h = (0.4dm^3)/(\pi R^2)$ e di conseguenza l'espressione dell'area in funzione di R:

$$
S=S(R)=2\pi R(R+\frac{0.4dm^3}{\pi R})=2\pi R^2+2(0.4dm^3)\frac{1}{R}
$$

Derivando rispetto a R e annullando la derivata otteniamo per R e poi per h le espressioni

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt[3]{\frac{0.2dm^3}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{0.2}{\pi}}dm = 10\sqrt[3]{\frac{0.2}{\pi}}cm \\
h &= \frac{0.4}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{0.04}}dm = 10\sqrt[3]{\frac{1.6}{\pi}}cm
\end{aligned}
$$

3) Detta $f(x) = x \sin x$ la retta tangente al grafico di f in un punto x_0 è

$$y = x_0 \sin x_0 + (\sin x_0 + x_0 \cos x_0)(x - x_0)$$

che per $\sin x_0 = 1$ (e quindi $\cos x_0 = 0$) fornisce $y = x$ mentre per $\sin x_0 = -1$ (e quindi $\cos x_0 = 0$) fornisce $y = -x$.

4) Detti a e b i lati del rettangolo, $P = 2a + 2b$ il suo perimetro e $A = ab$ la sua area abbiamo che

$$A = a(\frac{P}{2} - a) = \frac{aP}{2} - a^2.$$

Quindi se $P \geq 0$ è fissato, l'area è una funzione del solo lato a, dove $0 < a < P$. Trovando il massimo di questa parabola nell'intervallo $(0, P)$ si ha che esso viene assunto nel punto $a = P/4$. Dunque, essendo $P = 2a + 2b$ si ha che anche $b = P/4$ e quindi il rettangolo è un quadrato.

5) Il numero e è definito come

$$e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Il limite del rapporto incrementale della funzione e^x si calcola sfruttando la proprietà $e^{x+y} = e^x e^y$ della funzione esponenziale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

dove si è sfruttato il limite notevole (deducibile direttamente dalla definizione di e) $(e^h - 1)/h \to 1$ per $h \to 0$.

6) Per ogni numero naturale n il numero $n!$ è il prodotto dei primi n numeri positivi. Esso rappresenta il numero di permutazioni di n oggetti ed è legato ai coefficienti binomiali dalla formula

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Questa formula si ottiene ricordando che il coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di sottinsiemi si k elementi in un insieme di n elementi. Per calcolare questo numero si sceglie il primo elemento fra tutti gli n possibili, il secondo fra i rimanenti $n-1$, il terzo fra i rimanenti $n-2$ e cosi via fino a scegliere il k-esimo elemento fra i restanti $n-k+1$. Effettuata questa scelta bisogna osservare che si otterrebbe lo stesso insieme per una qualsiasi permutazione delle k scelte fatte. Quindi occorre dividere il numero ottenuto per il numero di permutazioni, $k!$, di k scelte

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

7) Raccogliendo x^2 e osservando che $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ si ottiene

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = x^2(x-2)^2 + 3 \geq 3 > 2.$$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3 = x^2(x-2)^2 + 3 \geq 3 > 2.$$

Quindi non esiste alcun valore di k che soddisfi $f(k) = 2$.

8) L'ottaedro è regolare perchè ha tutti gli spigoli uguali. Esso è formato da due piramidi rette a base quadrata il cui lato è $\sqrt{2}/2$ volte il lato l del cubo e la cui altezza è la metà di l. Ricordando che il volume di una piramide è pari a un terzo del prodotto fra l'area di base e l'altezza, otteniamo che il volume dell'ottaedro è $l^3/6$ e quindi pari a un sesto del volume.

9) Osservando che $55° = 90° - 35°$ si ha che $\sin^2(55°) = \cos^2(35°)$ e quindi, per la relazione fondamentale della trigonometria $\sin^2(55°) + \sin^2(35°) = 1$.

10) Derivando si ottiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Quindi f è costante a tratti nel suo dominio di definizione $\{x \neq -1\}$ e i due valori assunti nelle due semirette si ottengono ad esempio prendendo i limiti per $x \to \pm\infty$ che danno rispettivamente i valori $(\pi/2) - \text{artg} 1 = \pi/4$ e $(-\pi/2) - \text{artg} 1 = -3\pi/4$.