Studiare e disegnare il grafico delle seguenti funzioni

Esercizio no.1 *Soluzione a pag.2*

$$y = 2x - atg\left(\frac{4x-1}{4x} - \frac{1}{4|x|}\right)$$

Esercizio no.2 *Soluzione a pag.4*

$$y = \frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}}$$

Esercizio no.3 *Soluzione a pag.6*

$$y = \frac{x|\ln x|}{(\ln x-1)^2}$$

Esercizio no.4 *Soluzione a pag.9*

$$y = \frac{1}{\sqrt{|\ln x|}} \cdot \left(2 - \frac{1}{\ln x}\right)$$

Esercizio no.5 *Soluzione a pag.12*

$$y = |x^2 - 2x| \cdot e^x$$

Esercizio no.6 *Soluzione a pag.14*

$$y = \sqrt{|x|} - \arcsin\frac{x-1}{|x|+1}$$

Esercizio no.7 *Soluzione a pag.17*

$$y = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}}$$

Esercizio no.8 *Soluzione a pag.19*

$$y = \frac{1}{x|x|}\ln^3|x|$$

Esercizio no.9 *Soluzione a pag.22*

$$y = (x-1)\sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot(|x|-x)} - \arcsin\frac{x-|x|+2}{x+|x|+2} + 2$$

Esercizio no.10 *Soluzione a pag.26*

$$y = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - 2\cdot\frac{x+1}{|x+1|}$$

Esercizio no.1:soluzione

La funzione da studiare è: $$y = 2x - atg\left(\frac{4x-1}{4x} - \frac{1}{4|x|}\right)$$

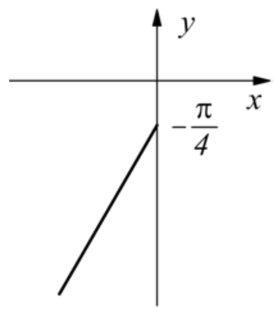
Per il campo di esistenza deve essere $x \neq 0$ quindi C.E.≡ (-∞ — 0 — +∞)

data la presenza del |x| bisogna considerare i due casi:

I) x<0 e la funzione diventa

$$y = 2x - atg\left(\frac{4x-1}{4x} - \frac{1}{-4x}\right) = 2x - atg\left(\frac{4x-1}{4x} + \frac{1}{4x}\right) = 2x - atg(1) = 2x - \frac{\pi}{4}$$

$y = 2x - \frac{\pi}{4}$ è l'equazione di una retta:



I) x>0 e si ha:

$$y = 2x - atg\left(\frac{4x-1}{4x} - \frac{1}{4x}\right) = 2x - atg\left(\frac{4x-2}{4x}\right) = 2x - atg\left(\frac{2x-1}{2x}\right)$$

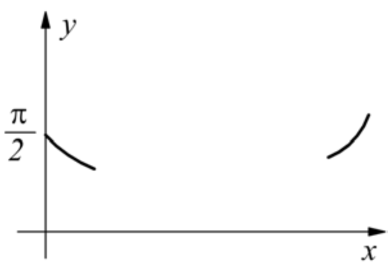
Le condizioni agli estremi del campo sono:

$$y = 2x - atg\left(\frac{4x-1}{4x} - \frac{1}{4x}\right) = 2x - atg\left(\frac{4x-2}{4x}\right) = 2x - atg\left(\frac{2x-1}{2x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0+}\left[2x - atg\left(\frac{2x-1}{2x}\right)\right] = -atg(-\infty) = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left[2x - atg\left(\frac{2x-1}{2x}\right)\right] = +\infty$$

l'andamento presunto è illustrato a destra

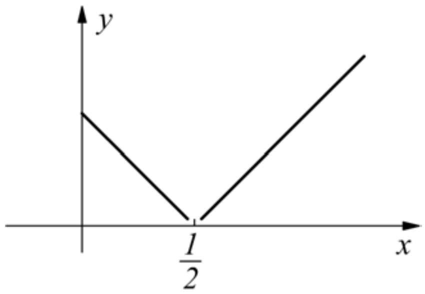


Calcolando le derivate:

$$y' = 2 - \frac{1}{1+\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2}\cdot\frac{2\cdot 2x-(2x-1)\cdot 2}{4x^2} = 8\cdot\frac{2x^2-x}{(8x^2-4x+1)}$$

$$y'' = 8\cdot\frac{4x-1}{(8x^2-4x+1)^2}$$ studiando la y' notiamo che $(8x^2-4x+1)>0 \quad \forall x>0$ sempre.

y'>0 per 2x-1>0 $\rightarrow$ $x>\frac{1}{2}$



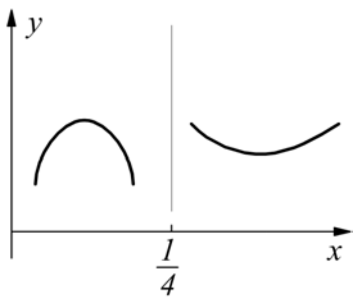
Il punto x=1/4 è di flesso.

il punto $x=\frac{1}{2}$ è di minimo con $y\left(\frac{1}{2}\right)=1 \rightarrow min\left(\frac{1}{2},1\right)$

y'(0)=0 : la curva parte dal punto $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ed ha la tangente orizzontale.

studiando la y'': y''>0 per 4x-1>0 $\rightarrow$ x>1/4
il punto x=1/4 è di flesso



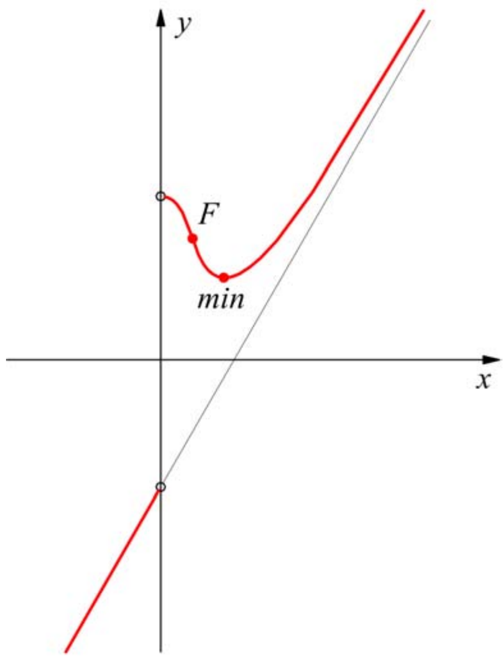
$$y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}-atg(-1)=\frac{1}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

$F\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ con y'(1/4)=-2

l'eventuale asintoto obliquo di equazione y=mx+q ha valori $m=\lim_{x\to+\infty} y'=2$

$$q=\lim_{x\to+\infty}(y-mx)=-atg(1)=-\frac{\pi}{4}$$

l'asintoto obliquo è $y=2x-\frac{\pi}{4}$

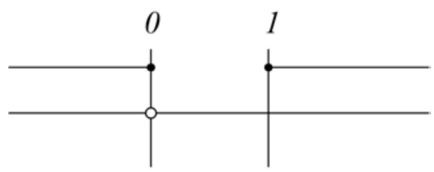


Esercizio no.2:soluzione

La funzione da studiare è $$y=\frac{1}{\sqrt{x+|x^2-x|}}$$

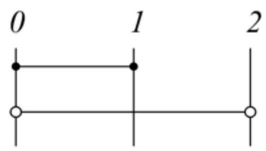
Deve essere $x+|x^2-x|>0$ la disequazione è equivalente ai due sistemi

$$I)\begin{cases}x^2-x\geq 0\\ x+x^2-x>0\end{cases}\qquad \begin{cases}x(x-1)\geq 0\\ x^2>0\end{cases}$$



$$x<0\vee\ x\geq 1$$

$$II)\begin{cases}x^2-x\leq 0\\ x-x^2+x>0\end{cases}\qquad \begin{cases}x(x-1)\leq 0\\ x(2-x)>0\end{cases}$$



$$0<x\leq 1$$

Il campo di esistenza è quindi C.E. (-∞ — e — +∞)
Nel caso I) la funzione diventa:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2}}=\frac{1}{|x|}=\begin{cases}\frac{1}{x}\quad per\quad x\geq 1 & (\alpha)\\ -\frac{1}{x}\quad per\quad x<0 & (\beta)\end{cases}$$

Nel caso II) la funzione diventa:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}\qquad con\qquad 0<x\leq 1\qquad (\gamma)$$

la (α) e la (β) sono i rami di una iperbole equilatera, bisogna studiare solo la (γ) che può anche essere riscritta come:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=(2x-x^2)^{-1/2}\qquad con\qquad 0<x\leq 1$$

una curva che non interseca mai gli assi ed è sempre positiva.

Le condizioni agli estremi del campo:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=+\infty$$ y(1)=1 l'asse y è asintoto verticale.

Il calcolo delle derivate:

$$y' = -\frac{1}{2}(2x - x^2)^{-3/2} \cdot (2 - 2x) = y^3(x-1)$$

$$y'' = 3y^2 y'(x-1) + y^3 = 3y^5(x-1)^2 + y^3 = y^5\left[3(x-1)^2 + \frac{1}{y^2}\right] =$$

$$= y^5(3x^2 - 6x + 3 + 2x - x^2) = y^5(2x^2 - 4x + 3)$$

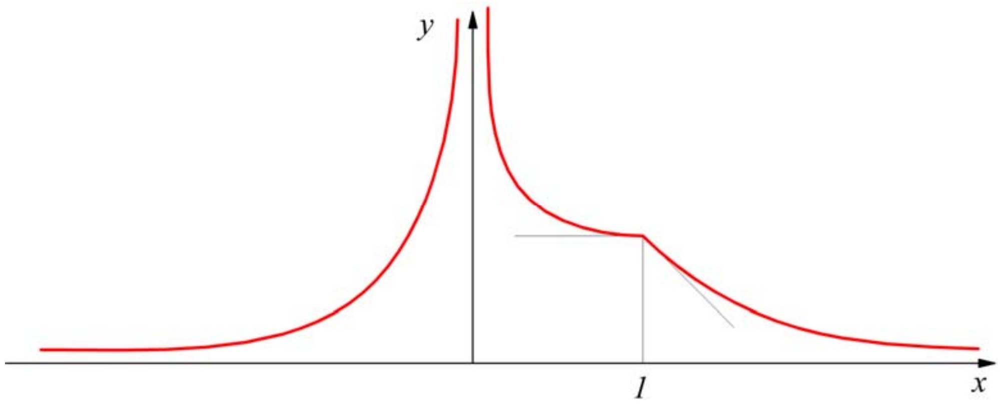
Studiando la y' si riconosce come

y'>0 mai!, quindi la curva è sempre decrescente; inoltre y'(1)=0.

Studiando la y'' ha:

$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2 - 4x + 3 > 0$ sempre vero dato che il Δ<0.

La curva ha la concavità sempre rivolta verso l'alto.



Esercizio no.3:soluzione

La funzione da studiare è: $y = \dfrac{x\,|\ln x|}{(\ln x - 1)^2}$

Per il campo di esistenza deve essere x>0 e lnx-1≠0 → x≠e C.E. (0 — e — +∞)

le eventuali intersezioni con l'asse x si ha per

y=0 → x|lnx|=0 → x=0 che però non è accettabile dato che non appartiene al campo. E' però possibile x=1 che appartiene al campo.

Si intuisce che la funzione è sempre positiva, dato che x>0 e |lnx| è sempre positivo o uguale a 0 per x=1.

Le condizioni agli estremi del campo sono:

$$\lim_{x\to 0+} y = \lim_{x\to 0+} x \cdot \frac{-\ln x}{(\ln x - 1)^2} = 0^+ \cdot 0^+ = 0^+$$

$$\lim_{x\to e\pm} y = \lim_{x\to e\pm} \frac{x \ln x}{(\ln x - 1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} y = \lim_{x\to +\infty} \frac{x \ln x}{(\ln x - 1)^2} = +\infty$$ per il confronto fra infiniti.

Ora calcolo le derivate:

dato che $|\ln x| = \begin{cases} \ln x \;\; se \;\; x > 1 \\ -\ln x \;\; se\; 0 < x < 1 \end{cases} \rightarrow \; y = \pm \dfrac{x \ln x}{(\ln x - 1)^2} = \begin{cases} y_1 \\ y_2 \end{cases}$

$$y'_1 = -y'_2 = \frac{(\ln x + 1)(\ln x - 1)^2 - 2\ln x(\ln x - 1)}{(\ln x - 1)^4} = \frac{\ln^2 x - 2\ln x - 1}{(\ln x - 1)^3}$$

$$y''_1 = -y''_2 = \frac{\ln^2 x - 2\ln x - 5}{x(\ln x - 1)^4}$$

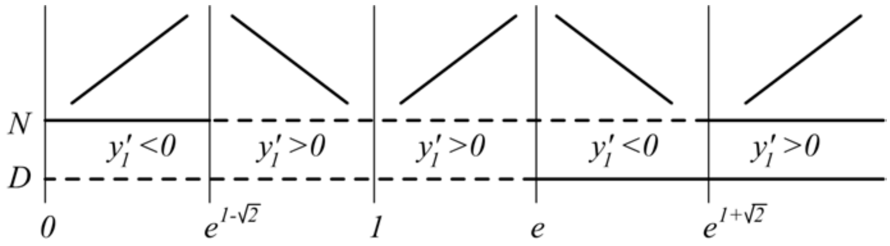
studiando la y' notiamo che

$$y' > 0 \;\begin{cases} (a) \quad x > 1 \qquad quando \quad y'_1 > 0 \\ (b) \quad 0 < x < 1 \quad quando \quad y'_2 > 0 \;\rightarrow\; -y'_1 > 0 \;\rightarrow\; y'_1 < 0 \end{cases}$$

quindi la funzione è crescente in x>1 quando $y'_1>0$ e in 0<x<1 quando $y'_1<0$; per cui studieremo in tutto il C.E. il segno della y'_1.

$$N > 0 \quad \rightarrow \quad x < e^{(1-\sqrt{2})} \quad \vee \quad x > e^{(1-\sqrt{2})}$$

$$D > 0 \quad \rightarrow \quad x > e$$



I punti di ascissa $x = e^{1-\sqrt{2}}$ ed $x = e^{1+\sqrt{2}}$ sono rispettivamente di massimo e di minimo.

$$y(e^{1-\sqrt{2}}) = \frac{(\sqrt{2}-1)\cdot e^{1-\sqrt{2}}}{2} \quad \rightarrow \quad max \qquad\qquad y(e^{1+\sqrt{2}}) = \frac{(\sqrt{2}+1)\cdot e^{1+\sqrt{2}}}{2} \quad \rightarrow \quad min$$

$\lim\limits_{x\to 0+} y'_2 = 0$ la curva parte da 0 con tangente orizzontale

$$\lim_{x\to 1-} y'_2 = -1 \qquad\qquad \lim_{x\to 1+} y'_1 = 1$$

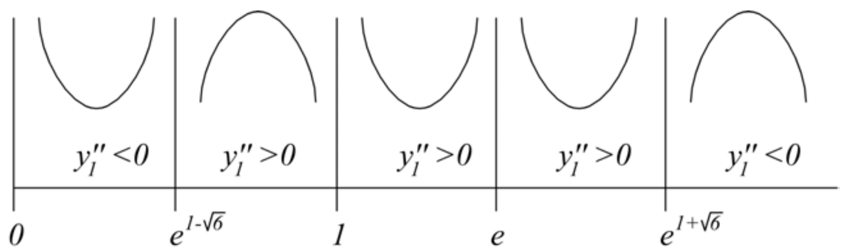
Il punto di ascissa x=1 è un punto angoloso.

Studiando la y’’ avremo:

$$y'' > 0 \begin{cases} (a) \quad x > 1 & quando \quad y''_1 > 0 \\ (b) \quad 0 < x < 1 & quando \quad y''_2 > 0 \quad \rightarrow \quad -y''_1 > 0 \quad \rightarrow \quad y''_1 < 0 \end{cases}$$

Cioè si tratta di una funzione concava verso l’alto in x>1 quando $y''_1>0$ e in 0<x<1 quando $y''_1<0$.
Studiando in tutto il CE il segno della y''_1:

$$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{\ln^2 x - 2\ln x - 5}{x(\ln x - 1)} > 0 \quad \rightarrow \quad \ln^2 x - 2\ln x - 5 < 0 \quad \rightarrow \quad e^{1-\sqrt{6}} < x < e^{1+\sqrt{6}}$$

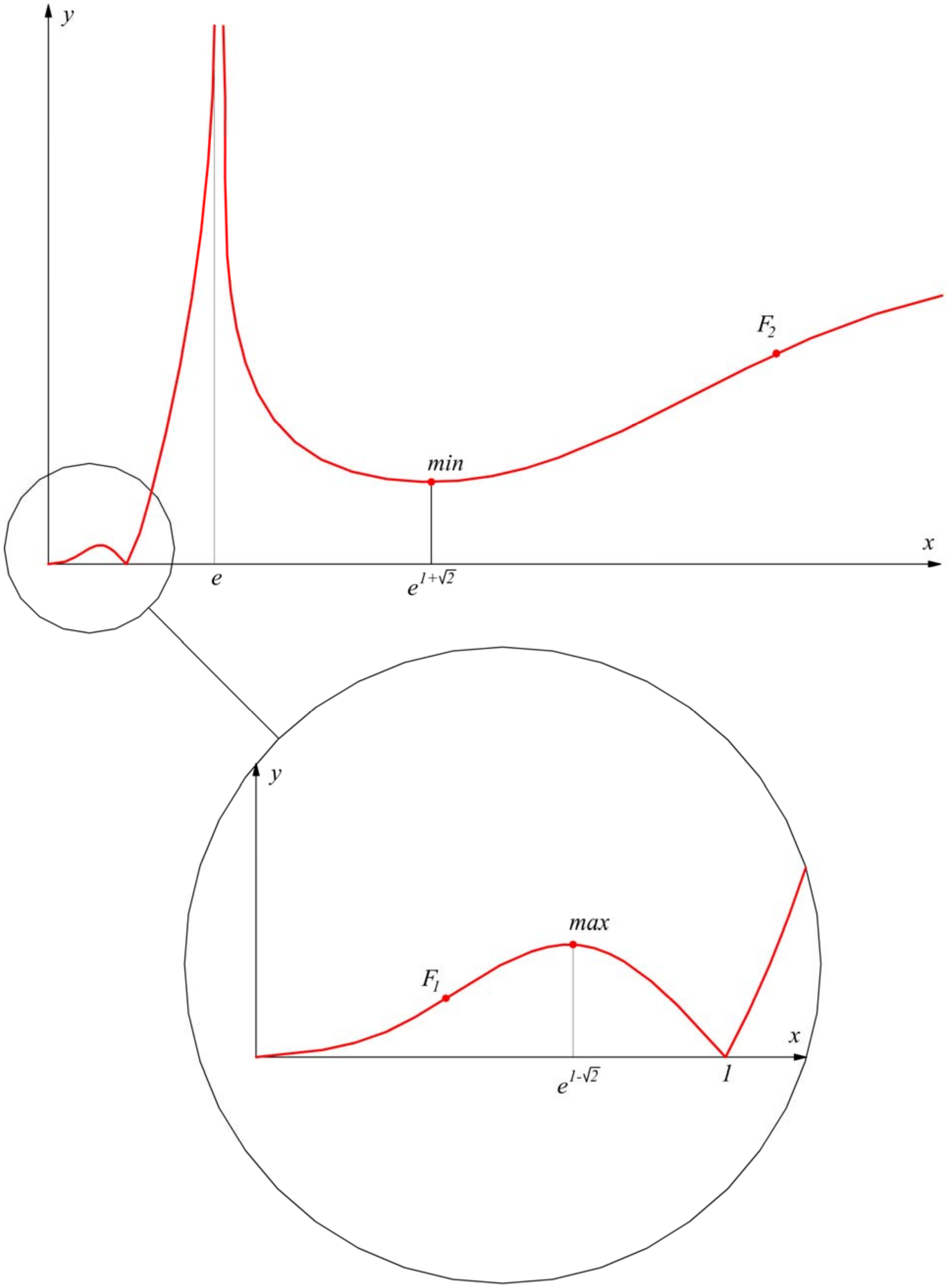


i punti di ascissa $x = e^{1-\sqrt{6}}$ e $x = e^{1+\sqrt{6}}$ sono punti di flesso.

$$y(e^{1-\sqrt{6}}) = \frac{(\sqrt{6}-1)\cdot e^{1-\sqrt{6}}}{6} \quad \rightarrow \quad F_1 \qquad\qquad y(e^{1+\sqrt{6}}) = \frac{(\sqrt{6}+1)\cdot e^{1+\sqrt{6}}}{6} \quad \rightarrow \quad F_2$$

$y'_2(e^{1-\sqrt{6}})=\frac{\sqrt{6}}{9}$ con $y'_1(e^{1+\sqrt{6}})=\frac{\sqrt{6}}{9}$

Non esiste un eventuale asintoto obliquo, infatti constatiamo: $y = mx + q$ $m = \lim_{x\to+\infty} y' = 0$



Esercizio no.4:soluzione

La funzione è: $y=\dfrac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\cdot\left(2-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

Soluzione

Si cerca il campo di esistenza; deve essere:

$$\begin{cases} x>0 \\ \ln x\neq 0 \quad \rightarrow \quad x\neq 1 \end{cases}$$

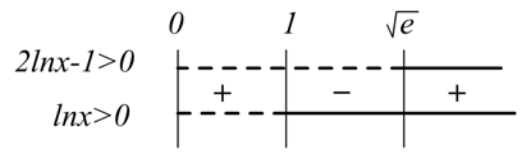
C.E.≡ (0 — 1 — +∞)

Le eventuali intersezioni con gli assi si hanno per

$$y=0 \quad \rightarrow \quad 2\ln x-1=0 \quad \rightarrow \quad \ln x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x=e^{1/2}=\sqrt{e}$$

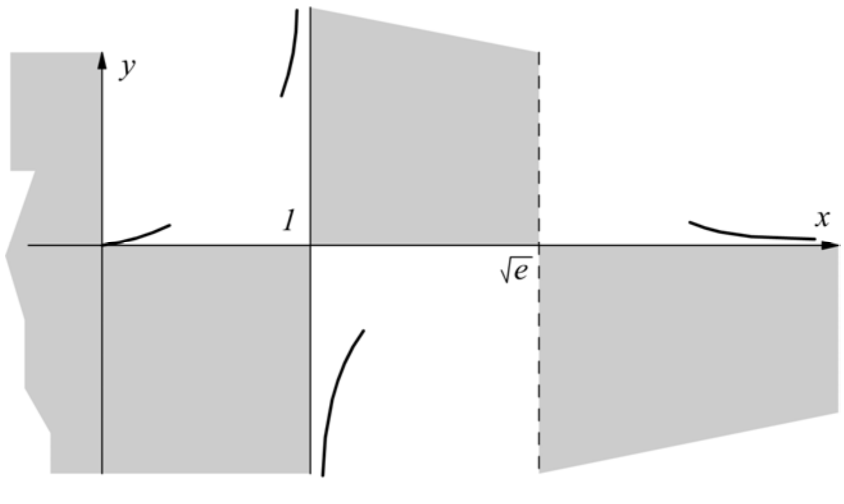
studiando il segno della funzione si ha:

$$y>0 \quad \rightarrow \quad \frac{2\ln x-1}{\ln x}>0$$



le condizioni agli estremi sono:

$$\lim_{x\to 0+} y=0^{+} \qquad \lim_{x\to 1-} y=+\infty \qquad \lim_{x\to 1+} y=-\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} y=0^{+}$$



La retta x=1 è asintoto verticale, l'asse delle ascisse y=0 è asintoto orizzontale.
Calcoliamo la derivata prima.

$$y' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{|\ln x|^{-3/2}}{x}\cdot\frac{|\ln x|}{\ln x}\cdot\left[2-(\ln x)^{-1}+\frac{(\ln x)^{-2}}{x}|\ln x|^{-1/2}\right]$$

$$y' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{|\ln x|^{-1/2}}{x\ln x}\cdot\left(\frac{2\ln x-1}{\ln x}\right)+\frac{|\ln x|^{-1/2}}{x\ln^2 x}$$

$$y' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{|\ln x|^{-1/2}}{x\ln^2 x}\cdot(2\ln x-1-2) = -\frac{1}{2}|\ln x|^{-1/2}\cdot\frac{2\ln x-3}{x\ln^2 x}$$

essendo $|\ln x|^{-1/2} = \frac{y\ln x}{2\ln x-1}$ avremo

$$y' = -\frac{1}{2y}\cdot\frac{2\ln x-3}{x\ln x(2\ln x-1)} = -\frac{1}{2y}\cdot\frac{2\ln x-3}{x(2\ln^2 x-\ln x)}$$

$$y'' = -\frac{1}{2}\cdot\left\{y'\cdot\frac{2\ln x-3}{x\ln x(2\ln x-1)}+y\cdot\frac{-4\ln^3 x+4\ln^2 x+9\ln x-3}{x^2\ln^2 x(2\ln x-1)^2}\right\}$$

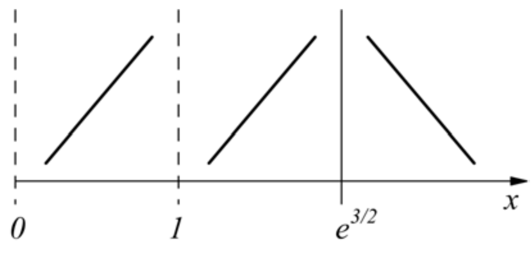
$$y'' = -\frac{1}{2}\cdot\left\{-\frac{1}{2y}\cdot\frac{(2\ln x-3)^2}{x^2\ln^2 x(2\ln x-1)^2}+y\cdot\frac{-4\ln^3 x+4\ln^2 x+9\ln x-3}{x^2\ln^2 x(2\ln x-1)^2}\right\}$$

$$y'' = \frac{y}{4}\cdot\frac{8\ln^3 x-4\ln^2 x-30\ln x+15}{x^2\ln^2 x(2\ln x-1)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{|\ln x|}}\cdot\frac{4\ln^2 x-15}{x^2\ln^3 x}$$

studiando la y’:

$y' > 0 \ \rightarrow \ -\frac{1}{2}|\ln x|^{-1/2}\cdot\frac{2\ln x-3}{x\ln^2 x} > 0$ sarà soddisfatta per

$2\ln x-3<0 \ \rightarrow \ x<e^{3/2}$ $\quad y(e^{3/2}) = \frac{4\sqrt{6}}{9} \equiv max$



$$\lim_{x\to 0+} y' = \lim_{x\to 0+}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{2\ln x-3}{x\ln^2 x\cdot\sqrt{|\ln x|}}\right) = \frac{\infty}{0\cdot\infty}$$

osservando che nella condizione $x\to 0+$ si ha $|\ln x| = -\ln x$

e che $\ln^2 x\cdot(-\ln x)^{1/2} = (-\ln x)^2\cdot(-\ln x)^{1/2} = (-\ln x)^{5/2}$

si ha inoltre $\lim_{x\to 0+} x\,ln^2 x\sqrt{|ln\,x|} = \lim_{x\to 0+} x(-ln\,x)^{5/2} = \lim_{x\to 0+} \frac{(-ln\,x)^{5/2}}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}$

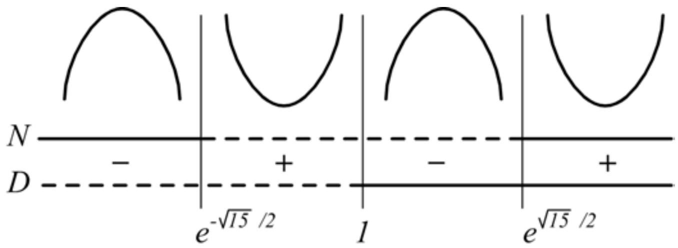
applicando no.3 volte il teorema di l'Hospital :

$$\lim_{x\to 0+} \frac{15x}{8(-ln\,x)^{1/2}} = 0^+$$

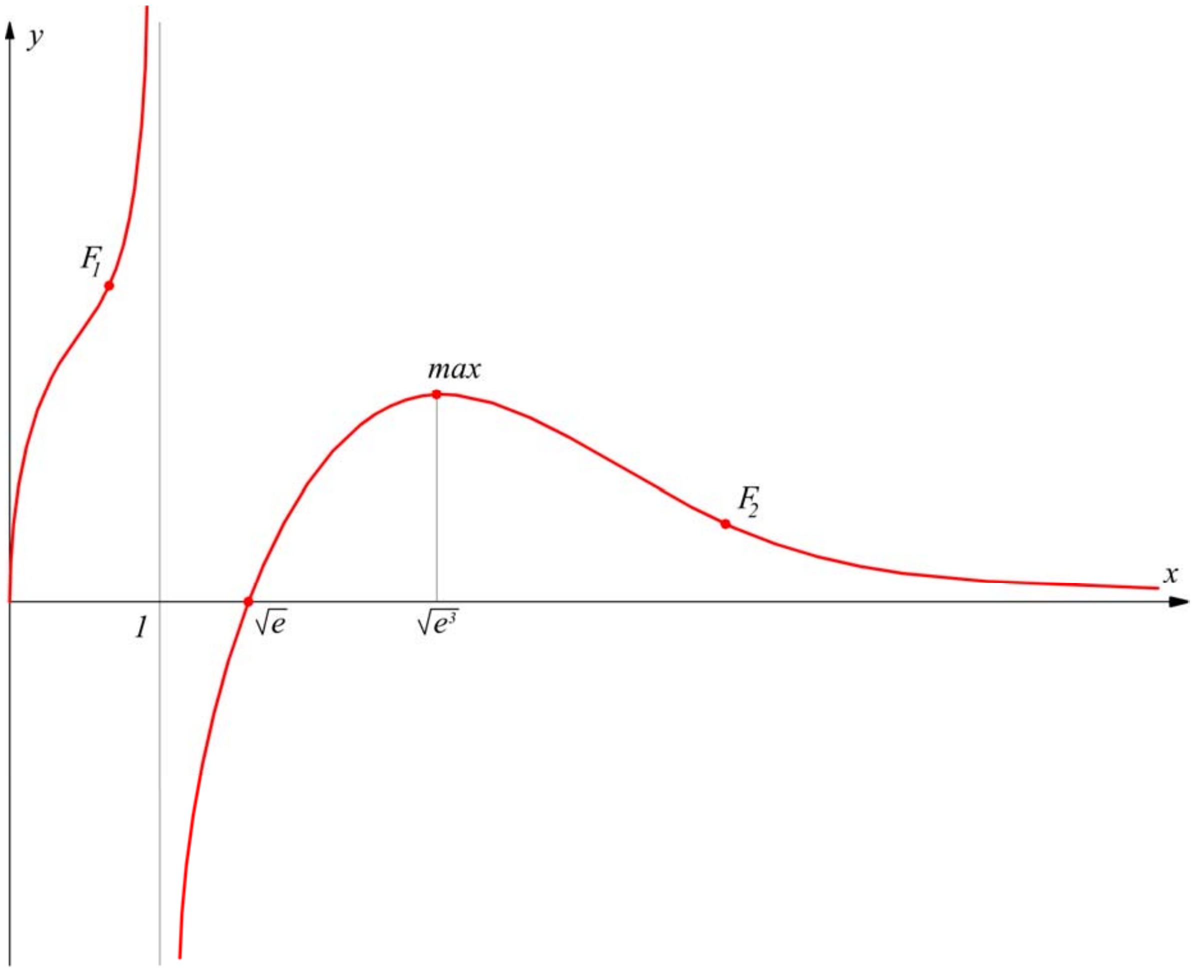
per cui $\lim_{x\to 0+} y' = +\infty$ la curva esce dall'origine con tangente verticale.

Studiando la y'':

$$y''>0 \;\rightarrow\; \frac{4\,ln^2 x - 15}{ln\,x} > 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} N>0 \;\rightarrow\; x < e^{-\sqrt{15}/2} \;\vee\; x > e^{\sqrt{15}/2} \\ D>0 \;\rightarrow\; x>1 \end{cases}$$



La curva presenta due punti F_1 ed F_2 di flesso.



Esercizio no.5:soluzione

Studiamo la funzione $y = |x^2 - 2x| \cdot e^x$

Per la ricerca del campo di esistenza avremo: C.E.≡ (-∞— +∞).

Per le eventuali intersezioni con gli assi poniamo:

$x = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\rightarrow\; O(0,0)$

$y = 0 \;\rightarrow\; x = 0 \vee x = 2 \;\rightarrow\; P(2,0)$

Vi sono, dunque, due punti di intersezione con gli assi.
e^x è sempre positiva, $|x^2$-$2x|$ è sempre positiva, si deduce che la curva è collocata nel semipiano cartesiano superiore.
Le condizioni agli estremi del campo sono:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \infty \cdot 0 \;\rightarrow\; \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^2-2x|}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty} = 0^+$$

questo perché e^x è un infinito di ordine superiore; quindi per $x\to-\infty$ l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale per la curva; mentre..

$$\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$$

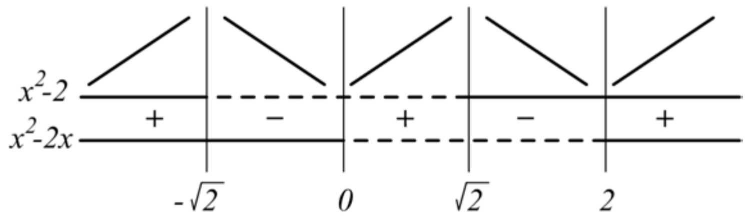
Calcoliamo ora le derivate.

$$y' = (2x-2)\cdot\frac{|x^2-2x|}{x^2-2x}e^x + |x^2-2x|e^x = \frac{|x^2-2x|}{x^2-2x}e^x(x^2-2) = y\frac{x^2-2}{x^2-2x}$$

$$y'' = y'\frac{x^2-2}{x^2-2x} + y\frac{-2x^2+4x-4}{(x^2-2x)^2} = y\frac{x^2+2x-2}{x^2-2x}$$

Studiando la y' abbiamo:

$$y' > 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2-2}{x^2-2x} > 0$$



Si nota come i punti di ascissa $x = -\sqrt{2}$ ed $x = \sqrt{2}$ siano di massimo.

$$y(-\sqrt{2}) = 2(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \;\rightarrow\; M_1$$

$$y(\sqrt{2}) = 2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} \;\rightarrow\; M_2$$

i punti x=0 e x=2 sembrano di minimo ma in realtà in questi punti la derivata prima risulta indefinita.

$$\lim_{x \to 0-} y' = -2$$
$$\lim_{x \to 0+} y' = 2$$

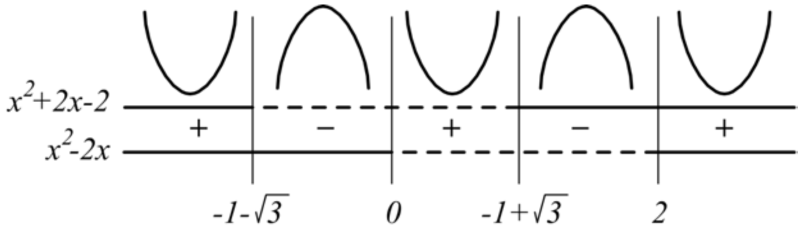
l'origine O è un punto angoloso

$$\lim_{x \to 2-} y' = -2e^2$$
$$\lim_{x \to 2+} y' = 2e^2$$

anche il punto P è un punto angoloso

Studiando la y'' otteniamo:

$$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - 2x} > 0$$

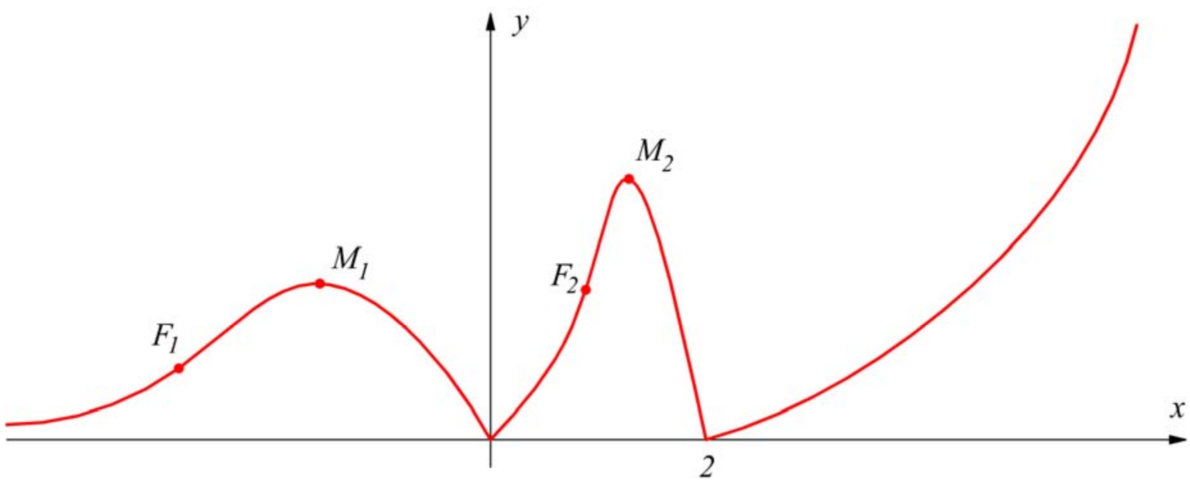


I punti di ascissa $x = -1 \pm \sqrt{3}$ sono di flesso.

$$y(-1-\sqrt{3}) = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{e^{1+\sqrt{3}}} \quad \rightarrow \quad F_1$$
$$y(-1+\sqrt{3}) = \frac{4\sqrt{3} - 6}{e^{\sqrt{3}-1}} \quad \rightarrow \quad F_2$$

constatiamo l'assenza di un eventuale asintoto obliquo, dato che:

$$\lim_{x \to +\infty} y' = +\infty$$



Esercizio no.6:soluzione

La funzione da studiare: $y = \sqrt{|x|} - arcsin\dfrac{x-1}{|x|+1}$

Eseguiamo la ricerca del campo di esistenza.

$$\begin{cases} |x|+1 \neq 0 \\ \underbrace{-1 \leq}_{(I)} \underbrace{\dfrac{x-1}{|x|+1} \leq 1}_{(II)} \end{cases}$$

La prima condizione è sempre verificata, dato che |x| è sempre maggiore o uguale a 0.

Le seconda condizione è composta in due parti : la (II) è sempre verificata ∀x dato che il numeratore è sempre minore del denominatore, bisogna risolvere la (I):

$$-1 \leq \frac{x-1}{|x|+1} \quad \rightarrow \quad -|x|-1 \leq x-1 \quad \rightarrow \quad -|x| \leq x$$

Questa è vera ∀x infatti se

$$x \geq 0 \quad \rightarrow \quad -x \leq x \quad \rightarrow \quad -2x \leq 0 \quad \rightarrow \quad x \geq 0$$
$$x < 0 \quad \rightarrow \quad x \leq x \quad \rightarrow \quad x = x$$

si deduce C.E.≡ (-∞—+∞).

Lo studio della funzione assegnata viene separato in due casi:

$$(a) \quad x \leq 0 \quad \rightarrow \quad y_1 = \sqrt{-x} + \frac{\pi}{2}$$
$$(b) \quad x \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_2 = \sqrt{x} - arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

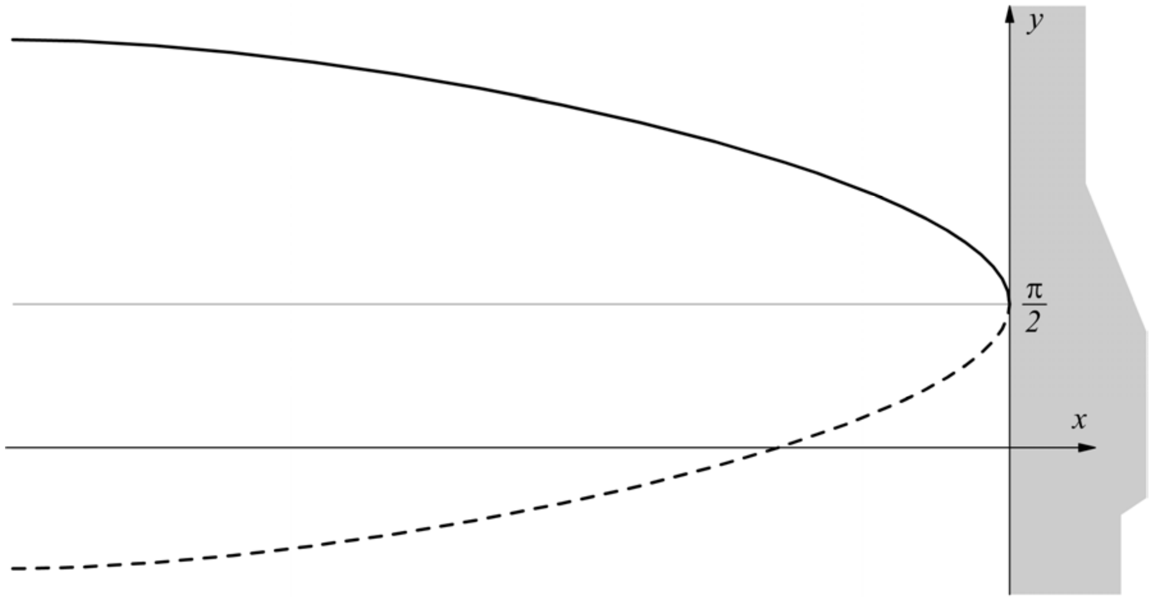
Ovviamente la y_1 va studiata nel dominio D_1.≡ (-∞—┤0].

$y_1 = \sqrt{-x} + \dfrac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad y_1 - \dfrac{\pi}{2} = \sqrt{-x}$ ma dato che $\sqrt{-x} \geq 0$ deve essere anche

$$y_1 - \frac{\pi}{2} \geq 0 \quad \rightarrow \quad y_1 \geq \frac{\pi}{2}$$

Sotto queste condizioni elevando al quadrato entrambi i membri

$-x = \left(y_1 - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad x = -\left(y_1 - \dfrac{\pi}{2}\right)^2$ può essere ricondotta alla parabola con asse di simmetria $y = \dfrac{\pi}{2}$ e dato che $y_1 \geq \dfrac{\pi}{2}$ bisogna considerare solo il ramo superiore della curva:



Studiamo invece la y_2 nell'intervallo $D_2 \equiv [0 \vdash +\infty)$.

$$y_2 = \sqrt{x} - \arcsin\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

per questa parte di funzione le condizioni agli estremi del campo sono:

$$y_2(0) = -\arcsin(-1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} y_2 = +\infty$$

Calcoliamo le derivate:

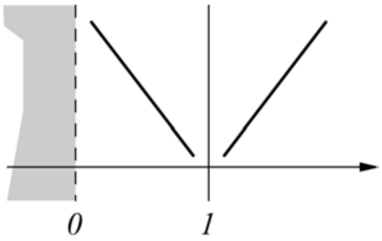
$$y'_2 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{|x+1|}{\sqrt{4x}} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x(x+1)}}$$

$|x+1| = x+1$ per $x \geq 0$ che è la condizione di esistenza della y_2.
Per la derivata seconda otterremo:

$$y''_2 = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^2 - 4x - 1}{x\sqrt{x}(x+1)^2}$$

Lo studio della y'_2 è il seguente:

$y'_2 > 0 \;\rightarrow\; x-1>0 \quad x>1$ il punto di ascissa x=1 è di minimo.



$y_2(1)=1 \;\rightarrow\; min$

notiamo come sia $\lim_{x\to 0+} y'_2 = -\infty$

il punto $P\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ è per la funzione, un flesso a tangente verticale.

infatti si nota anche come sia:

$$\lim_{x\to 0-} y'_1 = \lim_{x\to 0-} \frac{-1}{2\sqrt{-x}} = -\infty$$

Studiando la y''$_2$ si avrà:

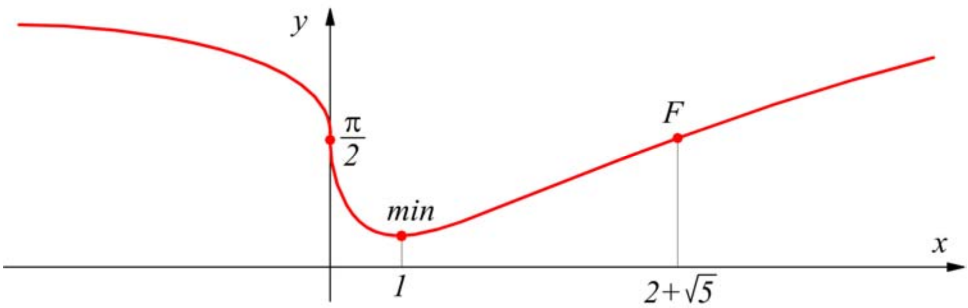
$y''_2 > 0 \;\rightarrow\; x^2-4x-1<0$ verificata nell'intervallo

$2-\sqrt{5} < x < 2+\sqrt{5}$ per la storia che $D_2 \equiv [0 \vdash\!\!- +\infty)$ si avrà $0 \le x < 2+\sqrt{5}$

La situazione delle concavità e delle convessità per l'intervallo D_2 è:

constatiamo l'assenza di un eventuale asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to +\infty} y'_2 = 0$$



Esercizio no.7:soluzione

La funzione in questione è: $y = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}}$

L'unica condizione da rispettare è la $x \neq 0$ quindi C.E.≡ (-∞ — 0 — +∞).
Ricerchiamo le eventuali intersezioni con l'asse x.

$y = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$ che non è accettabile.

la curva non incontra gli assi ed è sempre positiva dato che se $x \neq 0$, $x^2 > 0$, $\forall x$ e la generica funzione $e^{f(x)} > 0$ $\forall x$.

Condizioni agli estremi del campo.

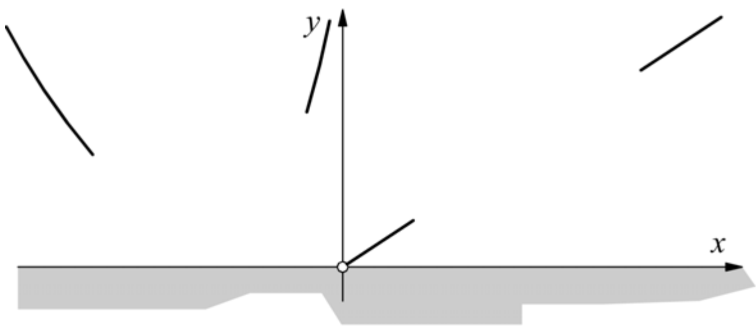
$\lim_{x \to \pm\infty} y = +\infty$ mentre abbiamo $\lim_{x \to 0-} y = 0 \cdot \infty$
osserviamo come il comportamento di |x| per $x \to 0^-$ sia |x|=-x.

$$\lim_{x \to 0-} y = \lim_{x \to 0-} \frac{e^{-\frac{x+1}{x}}}{1/x^2} = \frac{\infty}{\infty} = +\infty$$

cioè prevale il termine esponenziale che è infinito di ordine superiore.

$\lim_{x \to 0+} y = 0^+$ perché $e^{\frac{|x|-1}{x}} = e^{\frac{x-1}{x}} = e^{\frac{0^+ - 1}{0^+}} = e^{\frac{-1}{0^+}} = e^{-\infty} = 0^+$

arrivati a queste conclusioni possiamo riassumere le condizioni agli estremi.

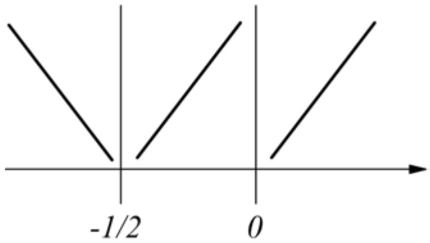


Calcolo le derivate.

$$y' = 2xe^{\frac{|x|-1}{x}} + x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = (2x+1) \cdot e^{\frac{|x|-1}{x}} = y\frac{2x+1}{x^2}$$

$$y'' = y'\frac{2x+1}{x^2} + y\frac{2x^2 - 2x(2x+1)}{x^4} = y\frac{(2x+1)^2}{x^4} - y\frac{2x^2+2x}{x^4} = y\frac{2x^2+2x+1}{x^4}$$

studiando la $y'>0 \rightarrow 2x+1>0 \rightarrow x>-\frac{1}{2}$



il punto di ascissa $x=-\frac{1}{2}$ è un minimo con $y\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e}{4}$ si nota come:

$\lim_{x\to 0+} y'=0^+(2\cdot 0^+ +1)=0^+$

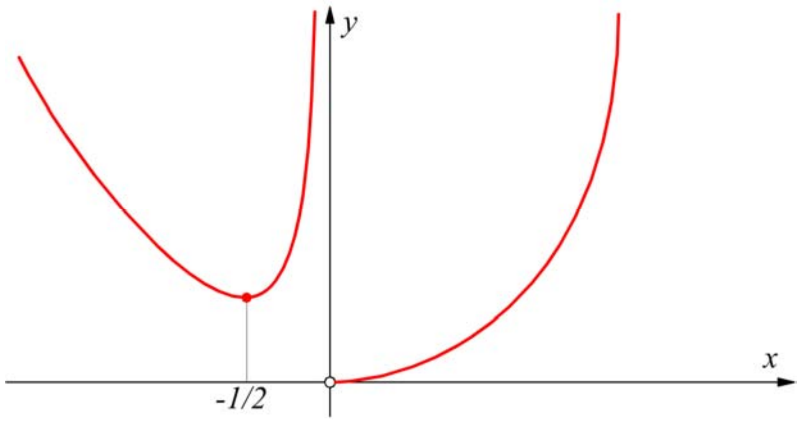
la curva parte dall'origine con tangente orizzontale.

Studiamo la y'':

$y''>0 \rightarrow 2x^2+2x+1>0$ quest'ultima condizione è sempre verificata (Δ<0).
la curva, ha dunque, la concavità rivolta verso l'alto sempre.

Non vi sono eventuali asintoti obliqui, infatti

$\lim_{x\to\pm\infty} y'=\pm\infty$



Esercizio no.8:soluzione

$$y=\frac{1}{x|x|}ln^3|x|$$

Deve essere necessariamente x≠0 quindi C.E.≡ (-∞ — 0 — +∞).
Si nota come la funzione sia dispari:

$$y(-x)=\frac{1}{-x|-x|}ln^3|-x|=-\frac{1}{x|x|}ln^3|x|=-y(x)$$

La funzione è quindi simmetrica rispetto all'origine; basterà studiarla soltanto nel semipiano destro.
Questo facilita le cose, perché nel semipiano destro |x|=x.
e la f(x) diventa.

$$y=\frac{ln^3 x}{x^2}$$

Cerchiamo eventuali intersezioni con l'asse x;

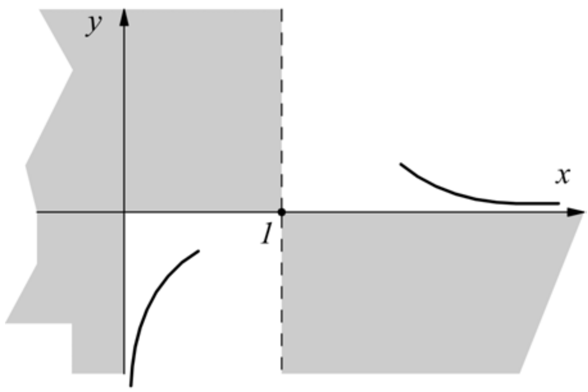
$$y=0 \quad\rightarrow\quad ln\,x=0 \quad\rightarrow\quad x=1$$

per il segno della funzione $y>0 \quad\rightarrow\quad ln\,x>0 \quad\rightarrow\quad x>1$; le condizioni agli estremi:

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{ln^3 x}{x^2}=\frac{\infty}{\infty}=0^+$$

perché il logaritmo ha un infinito di ordine inferiore rispetto ad x^2.

$$\lim_{x\to0+} y=\lim_{x\to0+}\frac{ln^3 x}{x^2}=\frac{-\infty}{0}=-\infty$$



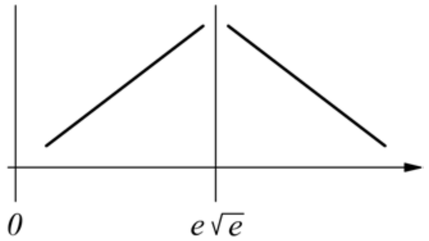
calcoliamo le derivate:

$$y' = \frac{3x\ln^2 x - 2x\ln^3 x}{x^4} = \frac{3\ln^2 x - 2\ln^3 x}{x^3} = \frac{\ln^2 x(3 - 2\ln x)}{x^3}$$

$$y'' = \frac{(6\ln x - 6\ln^2 x)x^2 - 3x^2(3\ln^2 x - 2\ln^3 x)}{x^6} = \frac{3\ln x(2\ln^2 x - 5\ln x + 2)}{x^4}$$

osservando il comportamento della y'.

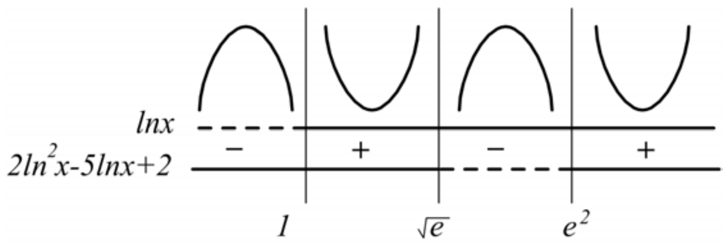
$$y' > 0 \;\rightarrow\; 3 - 2\ln x > 0 \;\rightarrow\; \ln x < \frac{3}{2} \;\rightarrow\; x < e\sqrt{e}$$



il punto di ascissa $x = e\sqrt{e}$ con $y(e\sqrt{e}) = \frac{27}{8e^3}$ è punto di massimo.

osservando il comportamento della y''.

$y'' > 0 \;\rightarrow\; \ln x(2\ln^2 x - 5\ln x + 2) > 0$ si ha



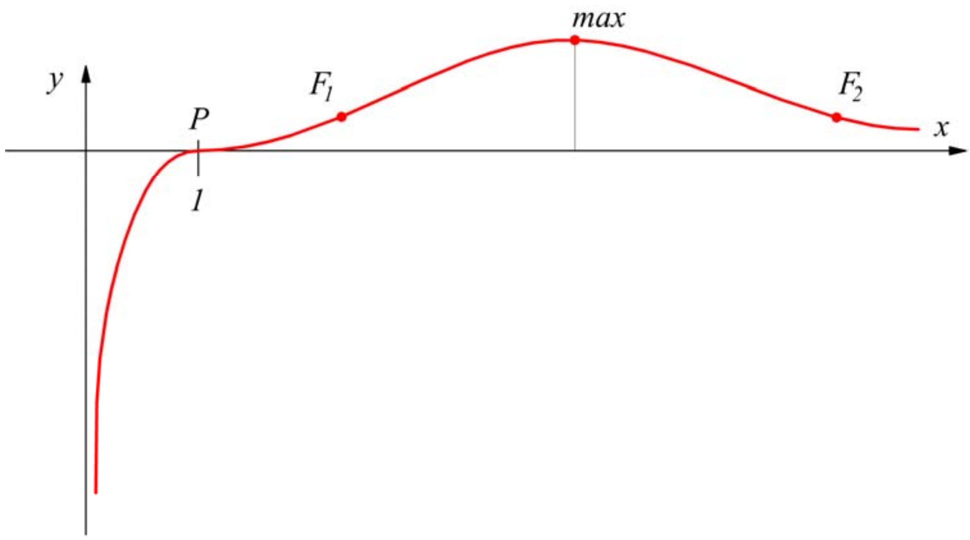
i punti $x = 1$ $x = \sqrt{e}$ e $x = e^2$ sono di flesso le rispettive ordinate sono:

$y(1) = 0 \quad \rightarrow P \qquad\qquad y'(1) = 0$

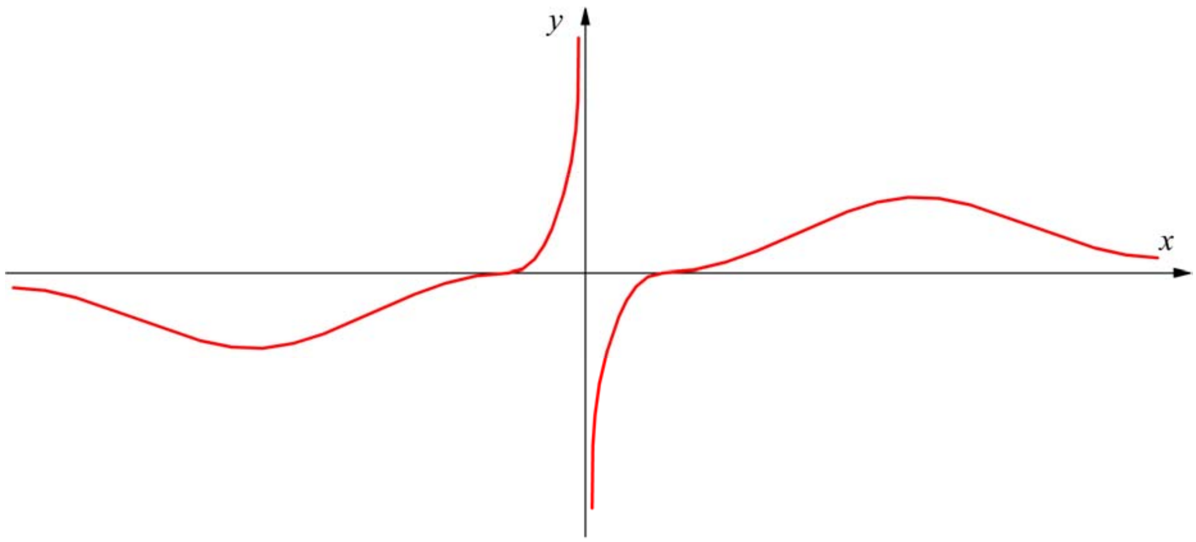
$y(\sqrt{e}) = \frac{1}{8e} \quad \rightarrow F_1 \qquad\qquad y'(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e\sqrt{e}} \quad \rightarrow F_1$

$y(e^2) = \frac{8}{e^4} \quad \rightarrow F_2 \qquad\qquad y(e^2) = -\frac{4}{e^6} \quad \rightarrow F_2$

sul semipiano destro avremo:



essendo la funzione dispari l'intero diagramma è:



Esercizio no.9:soluzione

$$y=(x-1)\sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot(|x|-x)}-\arcsin\frac{x-|x|+2}{x+|x|+2}+2$$

Vengono distinti due casi

(a) x≤0 e la funzione diventa

$$y_1=(x-1)\sqrt{\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot(-2x)}-\arcsin(x+1)+2=(x-1)\sqrt{-x(x+2)}-\arcsin(x+1)+2$$

di questa prima funzione va ricercato il campo di esistenza, sempre considerando che x≤0. Deve dunque essere:

$$\begin{cases} x\le 0 \\ -(x+2)\ge 0 \\ -1\le(x+1)\le 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x\le 0 \\ -2\le x\le 0 \\ -2\le x\le 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad -2\le x\le 0$$

(b) x≥0 e la funzione diventa

$y_2=2-\arcsin\dfrac{1}{x+1}$ per questa ultima deve essere: $-1\le\dfrac{1}{x+1}\le 1$ quindi

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}\le 1 \quad \rightarrow \textit{sempre vera} \\ \dfrac{1}{x+1}\ge -1 \quad \rightarrow \quad -x-1\le 1 \quad \rightarrow \quad x\ge -2 \end{cases}$$

unendo i due risultati il campo di esistenza complessivo è C.E.≡ [2 ⊢— +∞).
Osservando il comportamento della

$y_1=(x-1)\sqrt{-x(x+2)}-\arcsin(x+1)+2$ per -2≤x≤0

le condizioni agli estremi del campo sono:

$$y_1(0)=-\arcsin(1)+2=2-\frac{\pi}{2}$$

$$y_1(-2)=-\arcsin(-1)+2=2+\frac{\pi}{2}$$

Le derivate sono:

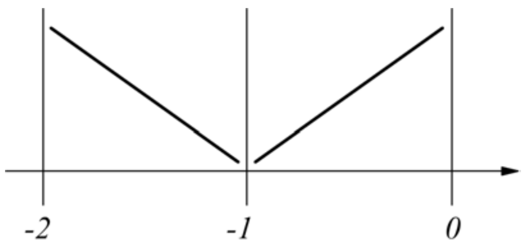
$$y'_1=\sqrt{-x(x+2)}+(x+1)\frac{-2x-2}{2\sqrt{-x(x+2)}}-\frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}=$$

$$=\sqrt{-x(x+2)}-\frac{x^2-1}{\sqrt{-x(x+2)}}-\frac{1}{\sqrt{-x(x+2)}}=-2\frac{x(x+1)}{\sqrt{-x(x+2)}}$$

$$y''_1=-2\frac{x^2+3x+1}{(x+2)\sqrt{-x(x+2)}}$$

Lo studio della y'_1:

$$y'_1>0 \quad\rightarrow\quad x+1>0 \quad\rightarrow x>-1$$



Il punto di ascissa x=-1 è di minimo, con ordinata $y(-1)=0$; notiamo che:

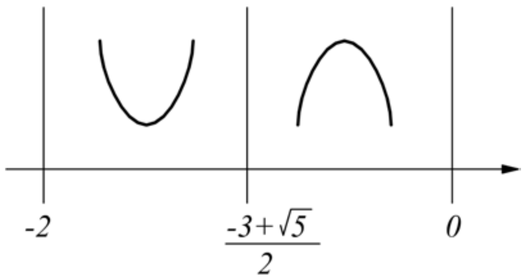
$\lim_{x\to-2^+} y'_1=-\infty$ la curva parte con tangente verticale

$\lim_{x\to 0-} y'_1=0$ la curva termina in 0 con tangente orizzontale

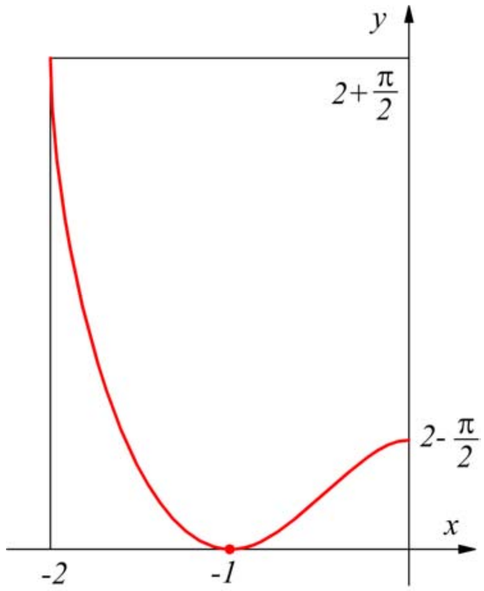
Sulla y''_1 possiamo constatare:

$$y''_1>0 \quad\rightarrow\quad x^2+3x+1<0 \quad\rightarrow\quad \frac{-3-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{cioè}$$

$-2\le x<\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ il punto di ascissa $x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è di flesso



Se ne trae il grafico della funzione y_1 nel tratto $-2 \leq x \leq 0$.



Ora possiamo studiare la y_2.

$$y_2 = 2 - \arcsin\frac{1}{x+1} \qquad \text{con } x \geq 0$$

per essa le condizioni agli estremi del campo sono:

$$y_2(0) = 2 - \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} 2 - \arcsin(0^+) = 2 - 0^+ = 2^-$$

la retta y=2 è asintoto orizzontale per la y_2 che non attraversa mai la retta stessa.

Calcolo delle derivate:

$$y'_2 = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{|x+1|}{\sqrt{x^2+2x}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$$

ricordando che per x≥0 si ha |x+1|=x+1.

$$y''_2 = -\frac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$$

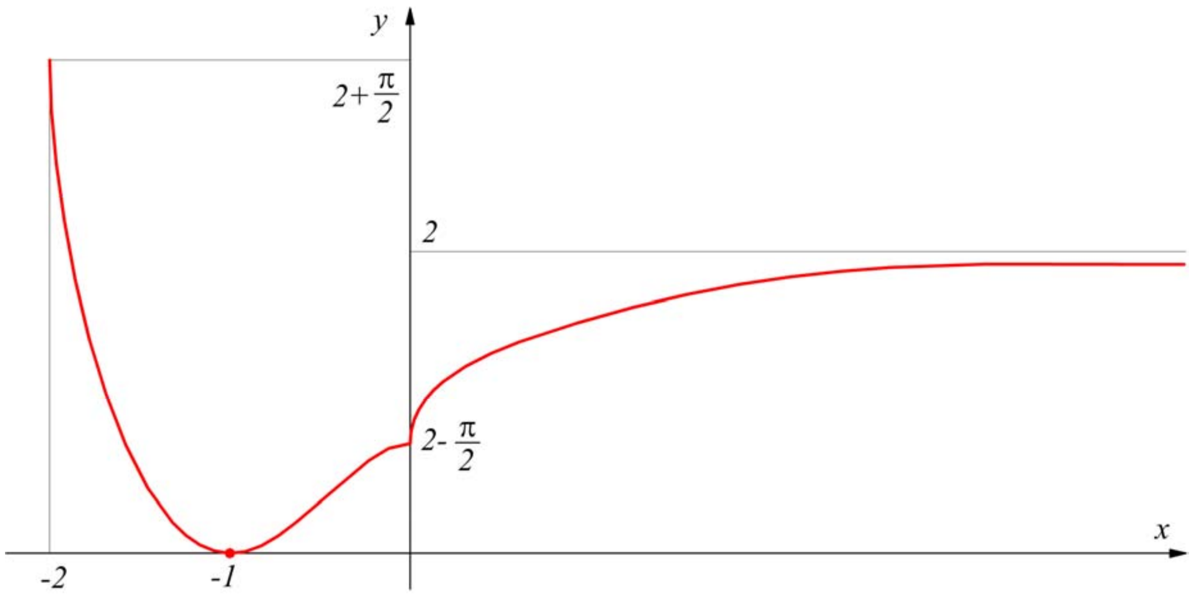
Per le sua caratteristiche la $y''_2>0$ ∀x; la curva è sempre crescente.

$\lim_{x\to 0+} y'_2 = +\infty$: la curva parte da 0 con tangente verticale.

Il sospetto che la curva abbia per x>0 la concavità rivolta esclusivamente verso il basso è più che fondato.

$y''_2 > 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2+4x+1>0$ sempre! dato che Δ<0.

Il denominatore della y''_2 è sempre positivo, ma la frazione è preceduta dal segno (-).
Si deduce che $y''_2<0$ per cui nel tratto x>0 la concavità è sempre rivolta verso il basso.
Questo il diagramma completo:



Esercizio no.10:soluzione

$$y=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})-2\cdot\frac{x+1}{|x+1|}$$

Per il campo di esistenza deve essere

|x+1|≠0 cioè x≠-1 e anche $x+\sqrt{x^2+1}>0$ quest'ultima è sempre vera se x>0

ma se x<0 → $\sqrt{x^2+1}>-x$ → $x^2+1>x^2$ che è sempre vera.

In conclusione: C.E.≡ (-∞ — -1 — +∞).

La eventuale intersezione con l'asse delle y si ha per

$x=0 \rightarrow y=-2$ nel punto P(0,-2)

Le condizioni agli estremi:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+1/x^2}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-1}{x-\sqrt{x^2-1}}-2\lim_{x\to-\infty}-\frac{x+1}{x+1}=$$

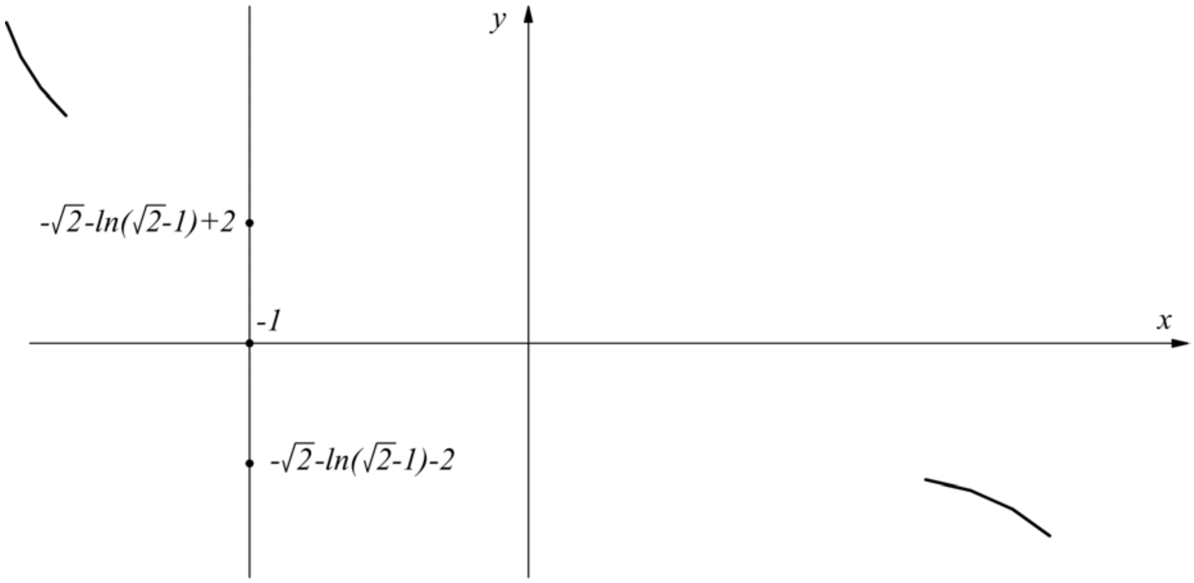
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+1/x^2}}-\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2-1}}+2=-2+\infty+2=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-} y=-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)+2$$

$$\lim_{x\to-1^+} y=-\sqrt{2}-\ln(\sqrt{2}-1)-2$$

$$\lim_{x\to+\infty} y=2-\infty-2=-\infty$$

per il momento riusciamo ad immaginare solo una cosa del genere:



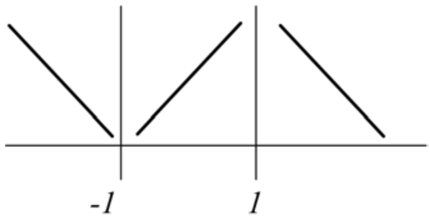
Il punto di ascissa x=-1 è di discontinuità di I[a] specie.

Dopo alcuni brevi passaggi otteniamo le derivate:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad y'' = \frac{x(x^2-5)}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$$

Studio della y':

$$y' > 0 \quad \rightarrow \quad x^2 - 1 > 0 \quad \rightarrow \quad -1 < x < 1$$

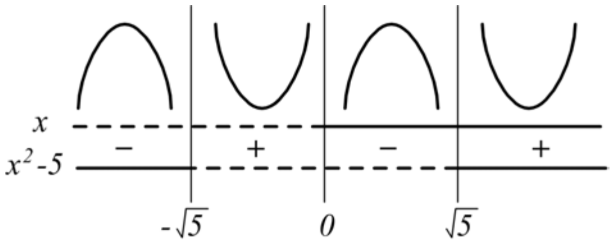


il punto di ascissa x=1 è di massimo con ordinata $y(1) = \sqrt{2} - ln(\sqrt{2}+1) - 2$ (max)

$\lim\limits_{x \to -1\pm} y' = 0$ sia a sinistra che a destra di x=-1 la curva parte con tangente orizzontale.

Osservando la y'':

$y'' > 0 \quad \rightarrow \quad x(x^2-5) > 0$ mettendo a sistema i due termini si ha:



i punti di ascissa $x=-\sqrt{5}$ e $x=\sqrt{5}$ sono di flesso con ordinate:

$$y(-\sqrt{5})=-\frac{\sqrt{30}}{3}-ln(\sqrt{6}-\sqrt{5})+2 \quad \rightarrow \quad F_1$$

$$y(\sqrt{5})=\frac{\sqrt{30}}{3}-ln(\sqrt{6}+\sqrt{5})-2 \quad \rightarrow \quad F_2$$

non esiste asintoto obliquo: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y'=0$ il grafico è il seguente: