Disequazioni con modulo (valore assoluto)

Esercizio no.1 Soluzione a pag.3

$|x^2-4x|<2$ $\qquad R\ \left(2-\sqrt{6}<x<2-\sqrt{2}\ \vee\ 2+\sqrt{2}<x<2+\sqrt{6}\right)$

Esercizio no.2 Soluzione a pag.3

$|1+3x|>7$ $\qquad R\ \left(x<-\frac{8}{3}\ \vee\ x>2\right)$

Esercizio no.3 Soluzione a pag.4

$|3-x^2|>6$ $\qquad R\left(-3<x<3\right)$

Esercizio no.4 Soluzione a pag.4

$|x-1|+3x>7$ $\qquad R\left(x>2\right)$

Esercizio no.5 Soluzione a pag.4

$|x-1|>1$ $\qquad R\ \left(x<0\ \vee\ x>2\right)$

Esercizio no.6 Soluzione a pag.5

$|2x+7|\leq 3$ $\qquad R\left(-5<x<-2\right)$

Esercizio no.7 Soluzione a pag.5

$\frac{1}{|x|}>\frac{2}{3}$ $\qquad R\ \left(-\frac{3}{2}<x<\frac{3}{2}\quad con\ x\neq 0\right)$

Esercizio no.8 Soluzione a pag.5

$|5x+2|>3$ $\qquad R\left(x<-1\ \vee\ x>\frac{1}{5}\right)$

Esercizio no.9 Soluzione a pag.6

$|x^2-5x+6|>6$ $\qquad R\left(x<0\ \vee\ x>5\right)$

Esercizio no.10 Soluzione a pag.6

$2x+3|x|-4\geq 0$ $\qquad R\left(x\leq -4\ \vee\ x\geq\frac{4}{5}\right)$

Esercizio no.11 Soluzione a pag.7

$|x-2|+x-5<0$ $\qquad R\left(x<\frac{7}{2}\right)$

Esercizio no.12 Soluzione a pag.7

$|x-2|<3-x$ $\qquad R\left(x<\frac{5}{2}\right)$

Esercizio no.13 Soluzione a pag.7

$|2x+3|<2x-1$ $\qquad R\ (impossib.)$

Esercizio no.14 Soluzione a pag.8

$|3x-4|\geq 2x+5$ $\qquad R\left(x\leq -\frac{1}{5} \;\vee\; x\geq 9\right)$

Esercizio no.15 Soluzione a pag.8

$|3x+1|-3(x+5)>2$ $\qquad R\left(x<-3\right)$

Esercizio no.16 Soluzione a pag.9

$\left|\frac{x}{2}-3\right|>2x-\frac{5}{2}$ $\qquad R\left(x<\frac{11}{5}\right)$

Esercizio no.17 Soluzione a pag.9

$|x|>x^2-4x+6$ $\qquad R\ (2<x<3)$

Esercizio no.18 Soluzione a pag.10

$\frac{|x|-2}{3}+\frac{1}{2}>1-\frac{|x|-1}{6}$ $\qquad R\left(x<-\frac{8}{3} \;\vee\; x>\frac{8}{3}\right)$

Esercizio no.19 Soluzione a pag.10

$|x^2-1|<2-|3-2x|$ $\qquad R\ (\sqrt{3}-1<x<\sqrt{7}-1)$

Esercizio no.20 Soluzione a pag.12

$\frac{x+|x-1|}{1-|x|}<\frac{1}{3}$ $\qquad R\ (x<-1 \;\vee\; x>1)$

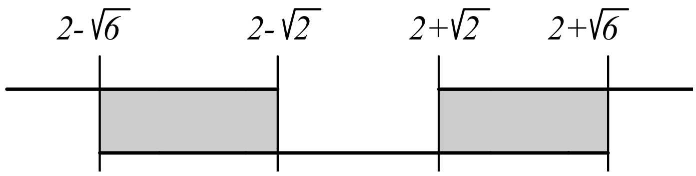
Esercizio no.1:soluzione

$|x^2 - 4x| < 2$ è del tipo $|f(x)| < k \quad \rightarrow \quad -k < f(x) < k$

$$\begin{matrix} I) \\ II) \end{matrix}\begin{cases} x^2 - 4x > -2 \\ x^2 - 4x < 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + 2 > 0 \\ x^2 - 4x - 2 < 0 \end{cases}$$ individuiamo le radici

$$I)\ x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \rightarrow \quad 2 - \sqrt{2} < x \vee x > 2 + \sqrt{2}$$

$$II)\ x_{1/2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{6 \cdot 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad 2 - \sqrt{6} < x < 2 + \sqrt{6}$$



La soluzione del sistema è l'<u>intersezione</u> delle soluzioni delle due disequazioni:

$$S = S_I \cap S_{II}$$

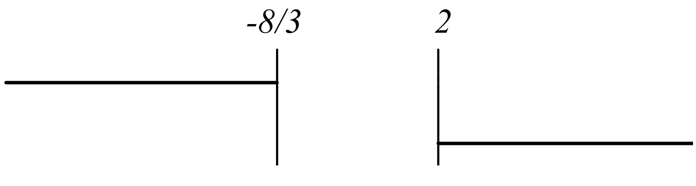
$$R\ \left(2 - \sqrt{6} < x < 2 - \sqrt{2} \quad \vee \quad 2 + \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{6}\right)$$

Esercizio no.2:soluzione

$|1 + 3x| > 7$ è del tipo $|f(x)| > k \rightarrow \quad f(x) < -k \quad \vee \quad f(x) > k$

equivale al sistema:

$$\begin{cases} 1 + 3x > 7 \\ 1 + 3x < -7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x > 6 \\ 3x < -8 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 2 \\ x < -8/3 \end{cases}$$



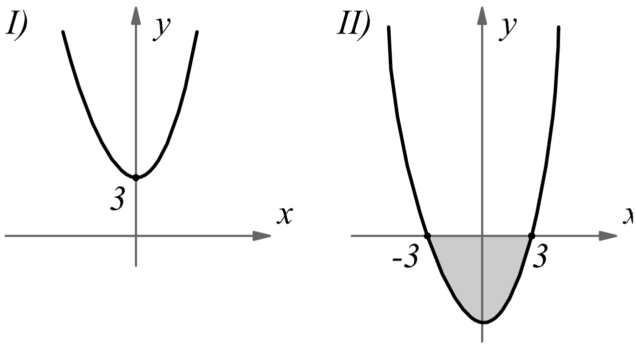
In tal caso la soluzione è l'<u>unione</u> delle due soluzioni $S = S_1 \cup S_2$

$$R\ \left(x < -\frac{8}{3} \quad \vee \quad x > 2\right)$$

Esercizio no.3:soluzione

$|3-x^2|>6$ è del tipo $|f(x)|>k \;\rightarrow\; f(x)<-k \;\vee\; f(x)>k$

$$\begin{matrix} I) \\ II) \end{matrix}\begin{cases} 3-x^2>6 \\ 3-x^2<-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+3<0 \\ x^2-9<0 \end{cases} \quad \begin{cases} impos s. \\ -3<x<3 \end{cases}$$



L'<u>unione</u> fra le due soluzioni risulta essere:

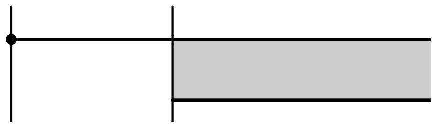
$R\,(-3<x<3)$

Esercizio no.4:soluzione

$|x-1|+3x>7$ ricordando che

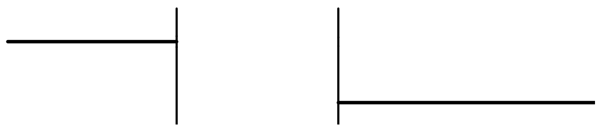
$$\begin{cases} |x-1|=x-1 \;\; per \;\; x-1\geq 0 \;\rightarrow\; x\geq 1 \\ |x-1|=1-x \;\; per \;\; x-1<0 \;\rightarrow\; x<1 \end{cases}$$

$$I)\begin{cases} x\geq 1 \\ x-1+3x>7 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1 \\ 4x>8 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 1 \\ x>2 \end{cases}$$



verificata per $\boxed{x>2}$

$$II)\begin{cases} x<1 \\ 1-x+3x>7 \end{cases} \quad \begin{cases} x<1 \\ 2x>6 \end{cases} \quad \begin{cases} x<1 \\ x>3 \end{cases}$$



mai verificata; in definitiva la soluzione è $R\,(x>2)$

Esercizio no.5:soluzione

$|x-1|>1$ è del tipo $|f(x)|<k \;\rightarrow\; -k<f(x)<k$

$$\begin{cases} x-1>1 \\ x-1<-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ x<0 \end{cases}$$

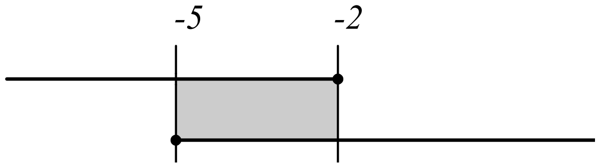
La soluzione è l'<u>unione</u> delle due soluzioni precedenti: $S=S_1\cup S_2$

$R\;(x<0 \;\vee\; x>2)$

Esercizio no.6:soluzione

$|2x+7| \leq 3$ ricollegabile alla forma $|f(x)| < k \quad \rightarrow \quad -k < f(x) < k$

$$\begin{cases} 2x+7 \leq 3 \\ 2x+7 \geq -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq -2 \\ x \geq -\dfrac{10}{2} = -5 \end{cases}$$ in questo caso $S = S_1 \cap S_2$



$R(-5 < x < -2)$

Esercizio no.7:soluzione

$\dfrac{1}{|x|} > \dfrac{2}{3}$ si ha $3 > 2|x| \quad \rightarrow \quad |x| < \dfrac{3}{2}$

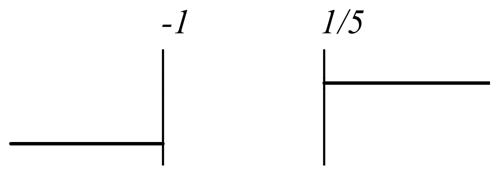
ricollegabile alla forma $|f(x)| < k \quad \rightarrow \quad -k < f(x) < k$

$$-\frac{3}{2} < x < \frac{3}{2} \quad con\ x \neq 0$$

Esercizio no.8:soluzione

$|5x+2| > 3$ è del tipo $|f(x)| > k \rightarrow f(x) < -k \quad \vee \quad f(x) > k \qquad S = S_1 \cup S_2$

$$\begin{cases} 5x+2 > 3 \\ 5x+2 < -3 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x > 1 \\ 5x < -5 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1/5 \\ x < -1 \end{cases}$$

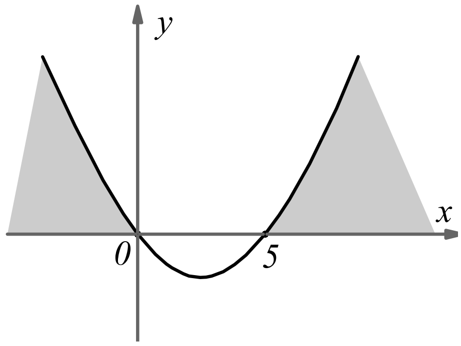


dato che deve essere $S = S_1 \cup S_2$ si ha: $R\left(x < -1 \quad \vee \quad x > \dfrac{1}{5} \right)$

Esercizio no.9:soluzione

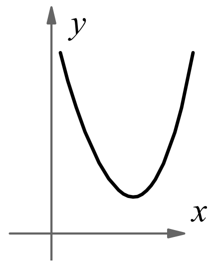
$|x^2-5x+6|>6$ è del tipo $|f(x)|>k \;\rightarrow\; f(x)<-k \;\vee\; f(x)>k \quad S=S_1\cup S_2$

$$\begin{matrix} I) \\ II) \end{matrix}\begin{cases} x^2-5x+6>6 \\ x^2-5x+6<-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2-5x>0 \\ x^2-5x+12<0 \end{cases}$$



la I) si può scrivere $x(x-5)>0$ è una parabola con radici $x=0$ ed $x=5$.

Essa è verificata per $x<0 \;\vee\; x>5$



La II) $x^2-5x+12<0$ ha un $\Delta=b^2-4ac=25-48<0$ non ha soluzioni.

Si tratta di una disequazione impossibile.

quindi per la $S=S_1\cup S_2$ avremo $R\left(x<0 \;\vee\; x>5\right)$.

Esercizio no.10:soluzione

$2x+3|x|-4\geq 0$

$$\begin{cases} x\geq 0 \\ 2x+3x-4\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x\geq 0 \\ 5x-4\geq 0 \end{cases} \rightarrow \quad x\geq 4/5$$

le soluzioni del I° sistema sono simultaneamente verificate per $x\geq 4/5$

$$\begin{cases} x<0 \\ 2x-3x-4\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ -x-4\geq 0 \end{cases} \rightarrow \quad x\leq -4$$

le soluzioni del secondo sistema non sono mai simultaneamente verificate.
unendo i risultati: $x\leq -4 \;\vee\; x\geq 4/5$

$$R\left(x\leq -4 \;\vee\; x\geq \frac{4}{5}\right)$$

Esercizio no.11:soluzione

$$|x-2|+x-5<0$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x-2+x-5<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x<7 \end{cases} \rightarrow \quad x<7/2$$

$$\begin{cases} x<2 \\ -x+2+x-5<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<2 \\ 0<3 \end{cases} \rightarrow \quad (imposs.)$$

il primo sistema è verificato per $x<\frac{7}{2}$ il secondo mai; unendo i risultati: $R\left(x<\frac{7}{2}\right)$

Esercizio no.12:soluzione

$$|x-2|<3-x$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x-2<3-x \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x<5 \end{cases} \rightarrow \quad x<5/2$$

$$\begin{cases} x<2 \\ -x+2<3-x \end{cases} \quad \begin{cases} x<2 \\ 0<1 \end{cases} \rightarrow \quad (imposs.)$$

il primo sistema è verificato per $x<\frac{5}{2}$ il secondo mai; unendo i risultati: $R\left(x<\frac{5}{2}\right)$

Esercizio no.13:soluzione

$$|2x+3|<2x-1$$

$$\begin{cases} x \geq -3/2 \\ 2x+3<2x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -3/2 \\ 3<1 \end{cases} \rightarrow \quad (imposs.)$$

$$\begin{cases} x<-3/2 \\ -2x-3<2x-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x<-3/2 \\ -2<4x \end{cases} \rightarrow \quad x>-1/2 \quad (imposs.)$$

I due sistemi sono impossibili: soluzione impossibile: *R (imposs.)*.

Esercizio no.14:soluzione

$|3x-4| \geq 2x+5$

$\begin{cases} x \geq 4/3 \\ 3x-4 \geq 2x+5 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 4/3 \\ x \geq 9 \end{cases}$

le soluzioni del I° sistema sono simultaneamente verificate per $x \geq 9$

$\begin{cases} x < 4/3 \\ 4-3x \geq 2x+5 \end{cases} \quad \begin{cases} x < 4/3 \\ -1 \geq 5x \quad \rightarrow \quad x \leq -1/5 \end{cases}$

le soluzioni del II° sistema sono simultaneamente verificate per $x \leq -1/5$
unendo i risultati:

$$R\left(x \leq -\frac{1}{5} \quad \vee \quad x \geq 9 \right)$$

Esercizio no.15:soluzione

$|3x+1|-3(x+5) > 2$

$\begin{cases} x \geq -1/3 \\ 3x+1-3x-15 > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -1/3 \\ -14 > 2 \quad (imposs.) \end{cases}$

Il I° sistema non ha soluzione

$\begin{cases} x < -1/3 \\ -3x-1-3x-15 > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1/3 \\ -6x > 18 \quad \rightarrow \quad -x > 3 \quad \rightarrow \quad x < -3 \end{cases}$

le soluzioni del II° sistema sono simultaneamente verificate per $x < -3$
unendo i risultati:

$$R\left(x < -3\right)$$

Esercizio no.16:soluzione

$$\left|\frac{x}{2}-3\right|>2x-\frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} x\ge 6 \\ \frac{x}{2}-3>2x-\frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 6 \\ x-6>4x-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 6 \\ -1>3x \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 6 \\ -1>x \end{cases} \quad (impossibile)$$

Il I° sistema non ha soluzione

$$\begin{cases} x<6 \\ 3-\frac{x}{2}>2x-\frac{5}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x<6 \\ 6-x>4x-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x<6 \\ 11>5x \end{cases} \quad \begin{cases} x<6 \\ \frac{11}{5}>x \end{cases}$$

le soluzioni del II° sistema sono simultaneamente verificate per $x<11/5$
unendo i risultati: $R\left(x<\frac{11}{5}\right)$

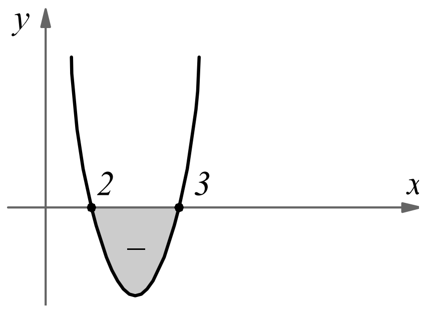
Esercizio no.17:soluzione

$$|x|>x^2-4x+6$$

$$\begin{cases} x\ge 0 \\ x>x^2-4x+6 \end{cases} \quad \begin{cases} x\ge 0 \\ 0>x^2-5x+6 \end{cases}$$

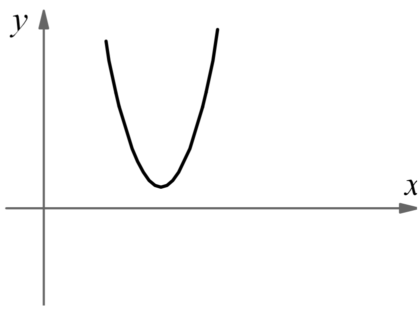
l'eq. di 2°grado è riconducibile ad una parabola con concavità rivolta verso l'alto e prevede le radici:

$$x_{1/2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} 6/2=3 \\ 4/2=2 \end{cases}$$



le soluzioni del I° sistema sono simultaneamente verificate per $2<x<3$

$$\begin{cases} x<0 \\ -x>x^2-4x+6 \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ 0>x^2-3x+6 \end{cases}$$



l'eq. di 2°grado è riconducibile ad una parabola con concavità rivolta verso l'alto ma notiamo che il Δ è:
$b^2-4ac=9-24<0$ questo sistema è impossibile; cioè la parabola non interseca mai l'asse delle ascisse e si mantiene sempre positiva.
Riunendo le soluzioni: $R\ (2<x<3)$

Esercizio no.18:soluzione

$$\frac{|x|-2}{3}+\frac{1}{2}>1-\frac{|x|-1}{6}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \dfrac{x-2}{3}+\dfrac{1}{2}>1-\dfrac{x-1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x-4+3>6-x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ 3x>8 \end{cases} \rightarrow \quad x>8/3$$

le soluzioni del I° sistema sono simultaneamente verificate per $x>8/3$

$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{-x-2}{3}+\dfrac{1}{2}>1-\dfrac{-x-1}{6} \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ -2x-4+3>6+x+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ -8>3x \end{cases} \rightarrow \quad x<-8/3$$

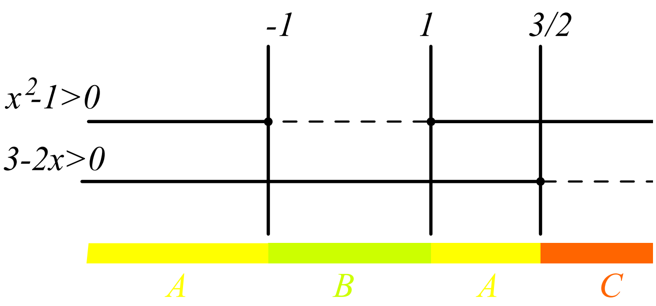
le soluzioni del II° sistema sono simultaneamente verificate per $x<-8/3$

riunendo le soluzioni:

$$R\left(x<-\frac{8}{3} \quad \vee \quad x>\frac{8}{3}\right)$$

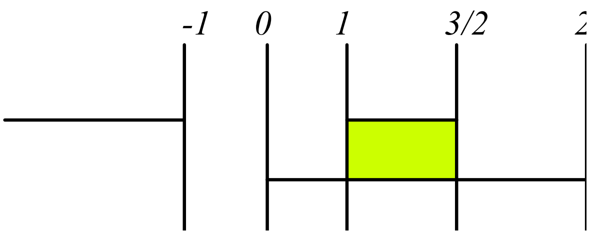
Esercizio no.19:soluzione

$|x^2-1|<2-|3-2x|$ Studiando le eventualità che si possono verificare:



caso A) $x \leq -1 \ \vee \ 1 \leq x \leq 3/2$

$$\begin{cases} x \leq -1 \ \vee \ 1 \leq x \leq 3/2 \\ x^2-1<2-3+2x \end{cases} \rightarrow \quad x^2-2x<0 \quad \begin{cases} x \leq -1 \ \vee \ 1 \leq x \leq 3/2 \\ 0<x<2 \end{cases}$$

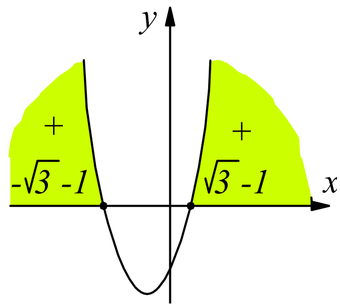


è verificata per $1 \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

caso B) $-1 < x < 1$

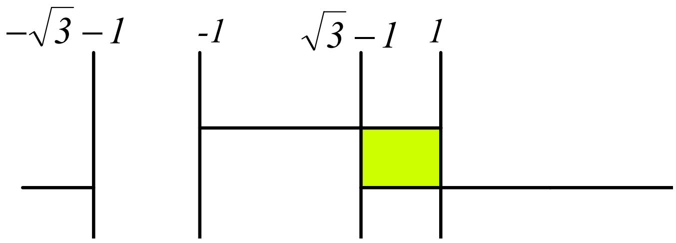
$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ 1 - x^2 < 2 - 3 + 2x \quad \rightarrow \quad x^2 + 2x - 2 > 0 \end{cases}$$

l’equazione trovata prevede le radici



$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} \sqrt{3} - 1 \\ -1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

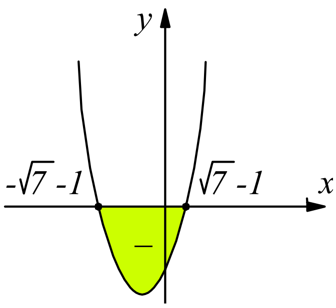
Verificata per $x < -\sqrt{3} - 1 \vee \ x > \sqrt{3} - 1$



Le due disequazioni sono congiuntamente verificate nell’intervallo:

$$\sqrt{3} - 1 < x < 1$$

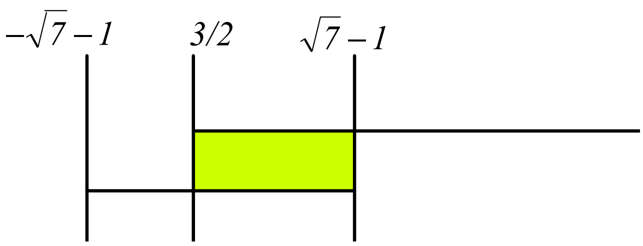
caso C) $x > \dfrac{3}{2}$ avremo: $\begin{cases} x > 3/2 \\ x^2 - 1 < 2 + 3 - 2x \end{cases}$ $\begin{cases} x > 3/2 \\ x^2 + 2x - 6 < 0 \end{cases}$



l’equazione di II° grado trovata prevede radici:

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+24}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{78}}{2} = \begin{cases} \sqrt{7} - 1 \\ -1 - \sqrt{7} \end{cases}$$

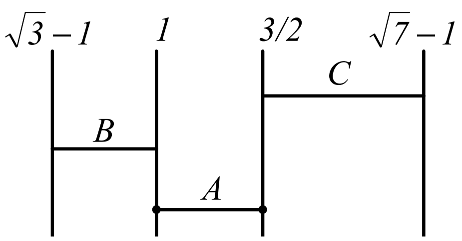
Verificata per : $-\sqrt{7} - 1 < x < \sqrt{7} - 1$



le due disequazioni sono

congiuntamente verificate per

$$\frac{3}{2} < x < \sqrt{7} - 1$$

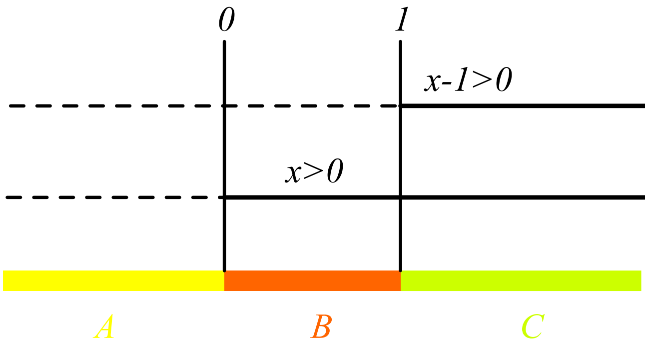


La soluzione complessiva è la riunione delle soluzioni:

$$\sqrt{3} - 1 < x < \sqrt{7} - 1$$

Esercizio no.20:soluzione

$$\frac{x+|x-1|}{1-|x|}<\frac{1}{3}$$



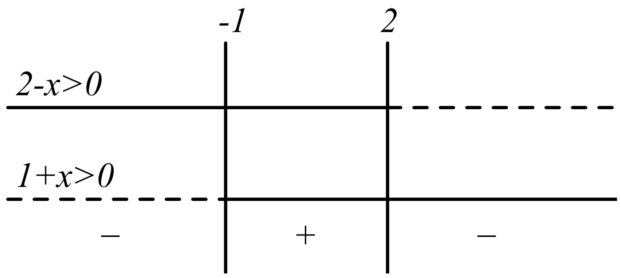
Come si vede dal grafico ci sono tre casi distinti.

caso A) $x<0$

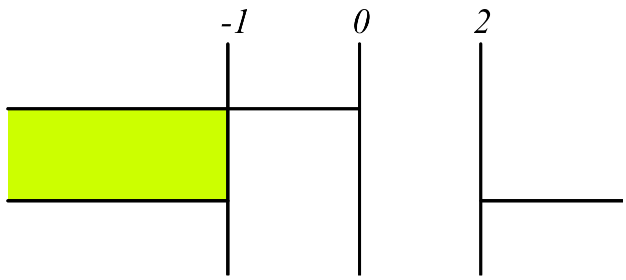
$$\begin{cases} x<0 \\ \dfrac{x-x+1}{1+x}<\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{3}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{3-1-x}{3(1+x)}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} x<0 \\ \dfrac{2-x}{3(1+x)}<0 \end{cases}$$

la seconda disequazione è verificata per

$x<-1 \ \vee \ x>2$



il sistema è verificato per $x<-1$

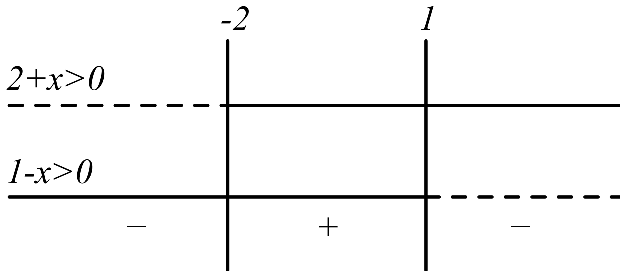


caso B) $0\le x<1$

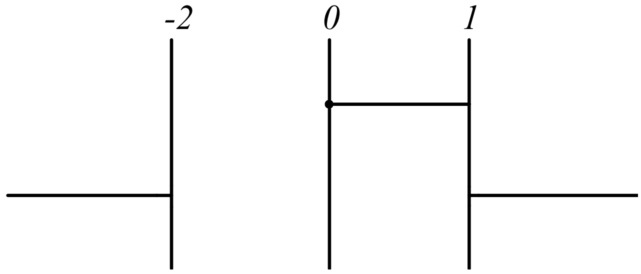
$$\begin{cases} 0\le x<1 \\ \dfrac{x-x+1}{1-x}<\dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{1-x}-\dfrac{1}{3}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0\le x<1 \\ \dfrac{3-1+x}{3(1-x)}<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0\le x<1 \\ \dfrac{2+x}{3(1-x)}<0 \end{cases}$$

studiando la seconda disequazione; essa sarà verificata per:

$x < -2 \quad \vee \quad x > 1$



il sistema non è mai verificato

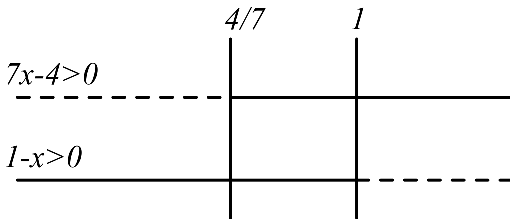


caso C) $x \geq 1$

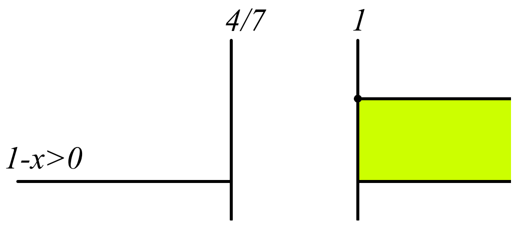
$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{x + x - 1}{1 - x} < \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{2x - 1}{1 - x} - \dfrac{1}{3} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{6x - 3 - 1 + x}{3(1 - x)} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ \dfrac{7x - 4}{3(1 - x)} < 0 \end{cases}$$

studiando la seconda disequazione; essa sarà verificata per:

$x < 4/7 \quad \vee \quad x > 1$



il sistema è verificato per $x > 1$



La soluzione complessiva è la riunione delle soluzioni per i tre casi, quindi: $x < -1 \quad \vee \quad x > 1$