Modellistica di sistemi meccanici

» **Leggi fondamentali per la meccanica longitudinale**

> Il punto fondamentale per ricavare un modello di un sistema meccanico in moto longitudinale è la legge di Newton:

$$F = m\frac{dv}{dt}$$

dove F (N) è la risultate delle forze agenti sulla massa m (kg), v (m/s) è la velocità della massa e dv/dt è l’accelerazione.

> Un’automobile di massa 1500 kg accelera da 0 a 100 km/h in 6 s. Determinare la forza media applicata all’automobile.

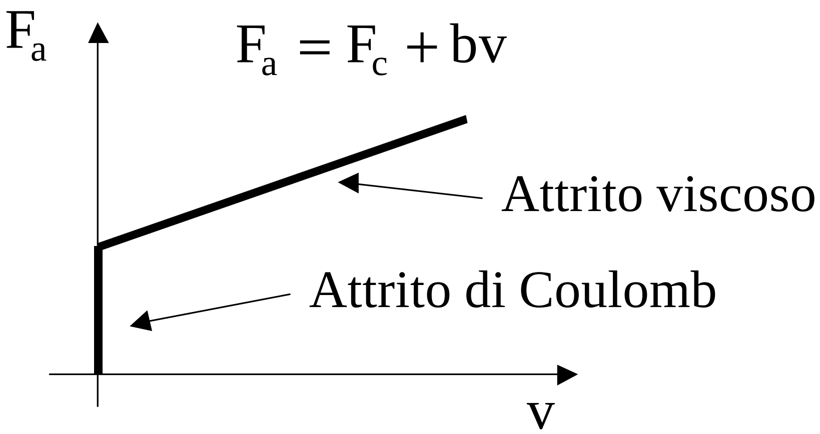
> Un’automobile necessita di una forza media di 8000N per accelerare da 0 a 100 km/h in 6 s. Determinare la massa dell’automobile.

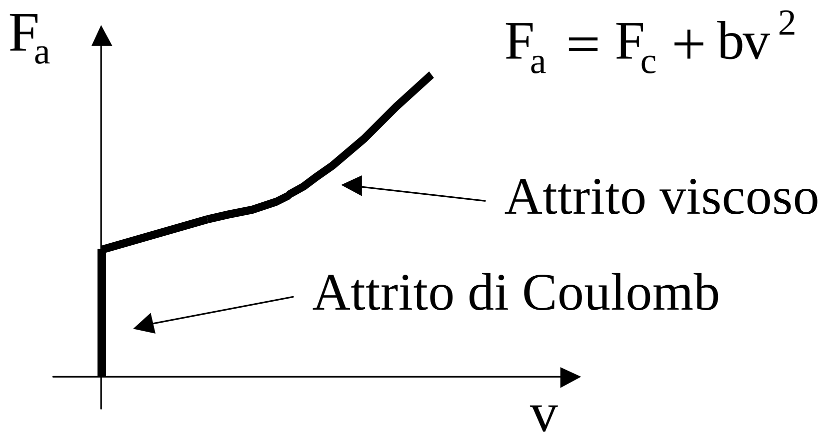
Forza di attrito e resistenza meccanica

> Anche detta attrito, **s**i definisce come la forza necessaria a causare un aumento della velocità di 1 m/s

$$R_m = b = \frac{\Delta F}{\Delta v}, \quad N \cdot s / m$$

> La resistenza meccanica che produce una forza proporzionale (o dipendente) dalla velocità si dice attrito viscoso. Altrimenti si parla di attrito Coulombiano





> In base ai dati riportati ed assumendo un attrito viscoso lineare, determinare la forza di attrito

$$F_1 = 7.1\ N, \quad v_1 = 10.5\ m/s$$

$$F_2 = 9.6\ N, \quad v_2 = 15.75\ m/s$$

Forza elastica e capacità meccanica

> Anche detta (inverso della) costante elastica, si definisce come lo spostamento necessario ad incrementare di una unità la forza elastica

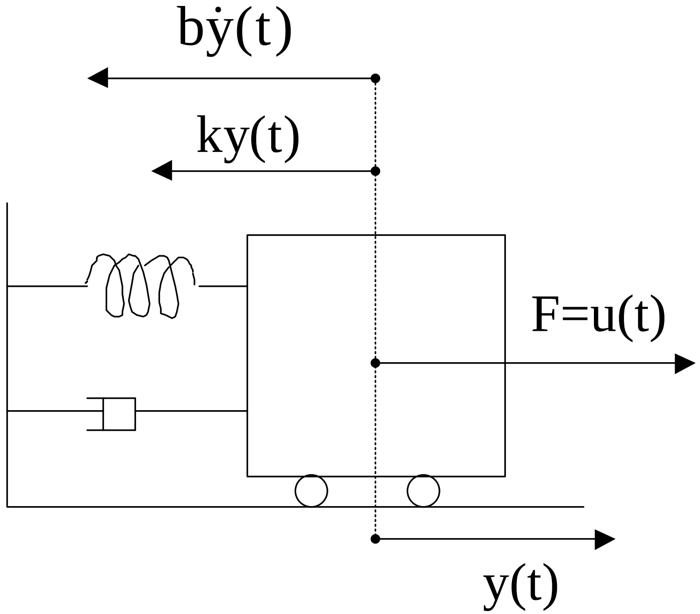
$$C_m = \frac{1}{k} = \frac{\Delta x}{\Delta F}, \quad m/N$$

> Determinare la costante elastica di una molla che a seguito di una forza applicata di 100N si deforma di 30 cm.

> Un possibile andamento nonlineare della forza elastica è del tipo

$$F_e = F_d + k_1 x + k_2 x^3$$

» **Modello di un sistema massa-molla**

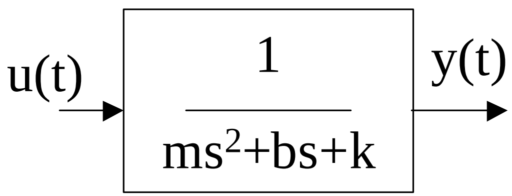


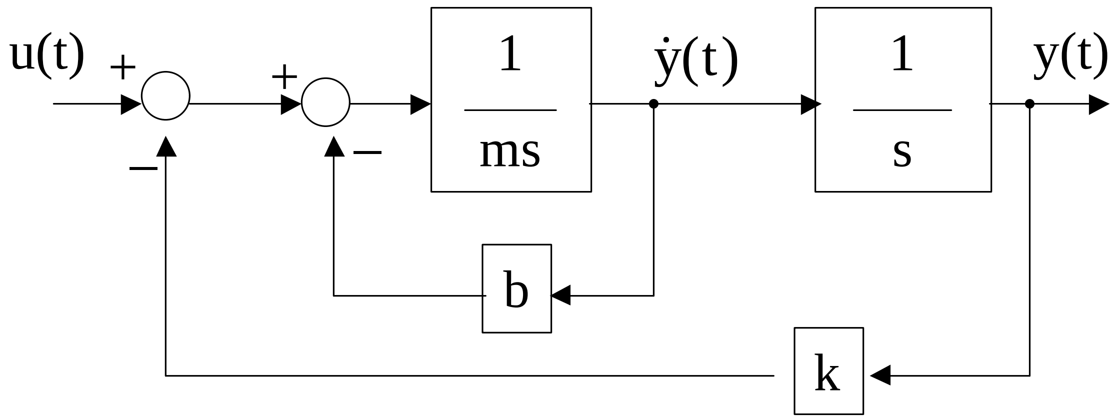
> La somma delle forze agenti sulla massa è pari alla massa per l'accelerazione:

$$u(t) - ky(t) - b\dot{y}(t) = m\ddot{y}(t)$$

> La funzione di trasferimento:

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$





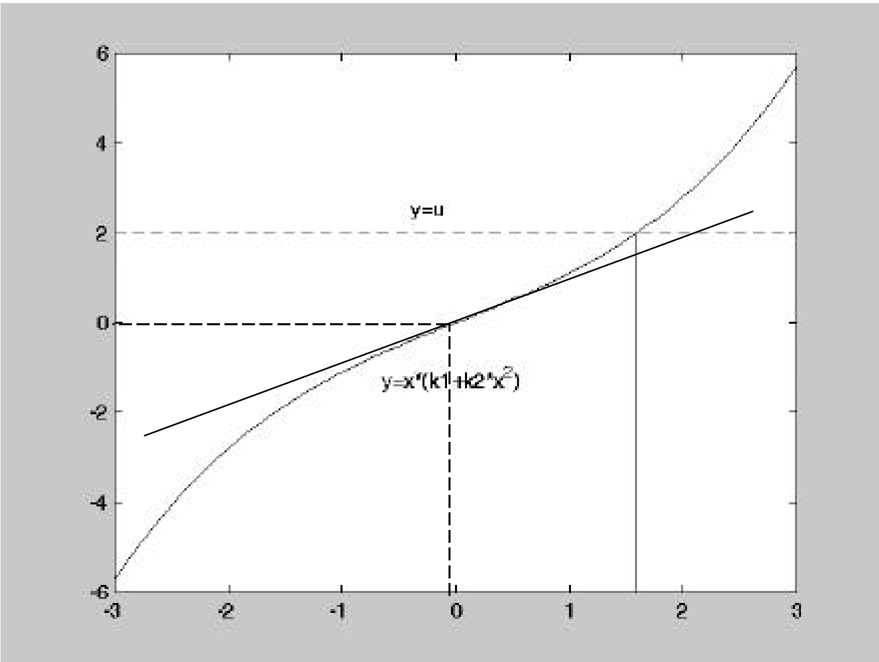
Modellistica di sistemi meccanici

» **Modello di un sistema massa-molla con caratteristica nonlineare della molla**

$$u(t) - k_1 y(t) - k_2 y^3(t) - b\dot{y}(t) = m\ddot{y}(t)$$

> Punto di equilibrio: $\{u(t) = \bar{u},\ \dot{y}(t) = 0,\ \ddot{y}(t) = 0\} \Rightarrow \bar{y}(k_1 + k_2\bar{y}^2) = \bar{u}$

> Dimensionamento dei parametri: m=1 kg, y=-3:.1:3 m, essendo mg=10 N possiamo assumere $k_1 y_{max}$=3 N e quindi k_1=1 N/m, k_2=0.1 N/m.



> Possiamo risolvere l'equazione nonlineare per via grafica

> Il modello linearizzato diventa

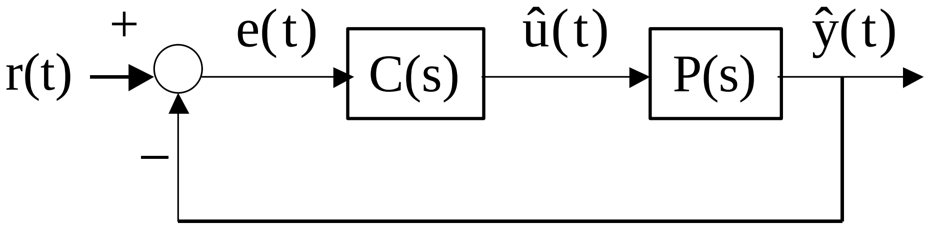
$$\hat{u}(t) - (k_1 + 3k_2\bar{y}^2)\hat{y}(t) - b\dot{\hat{y}}(t) = m\ddot{\hat{y}}(t)$$

$$P(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k_1 + 3k_2\bar{y}^2}$$

Modellistica di sistemi meccanici

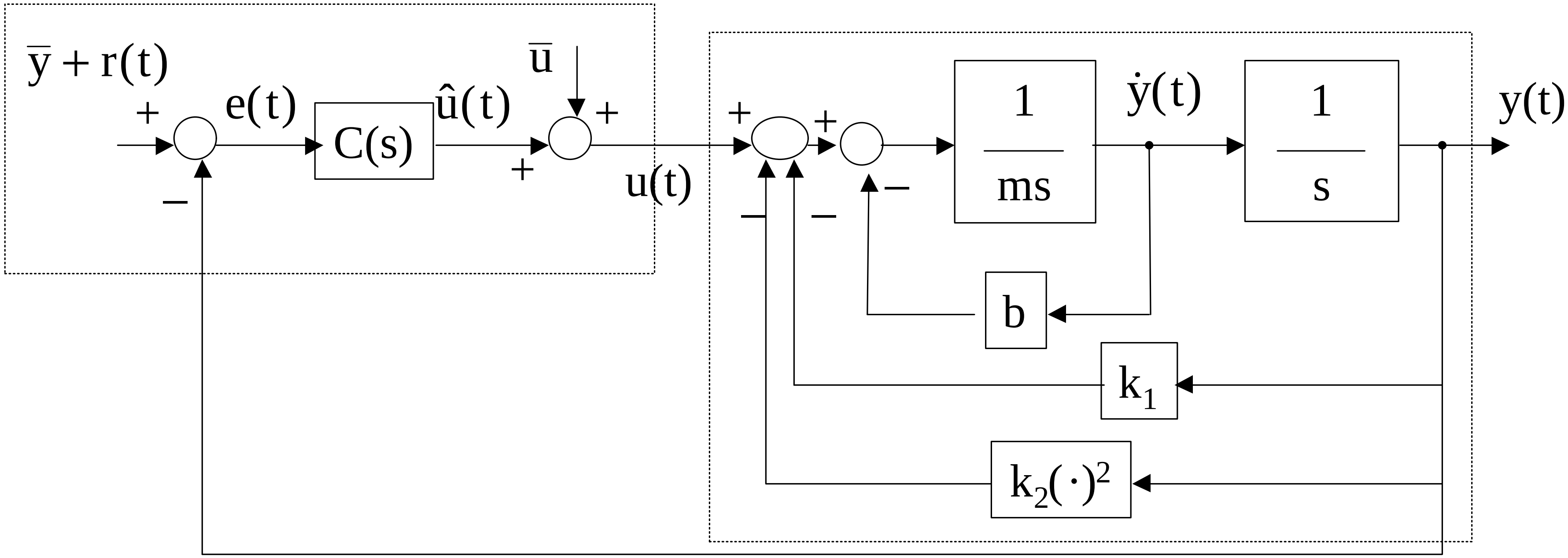
» **Sistema massa-molla con molla nonlineare**

> Il modello linearizzato può essere impiegato per progettare un controllore con le tecniche utilizzate per i sistemi lineari



$$P(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k_1 + 3k_2\bar{y}^2}$$

> La simulazione va poi verificata col modello nonlineare di partenza:



» **Leggi fondamentali per la meccanica rotazionale**

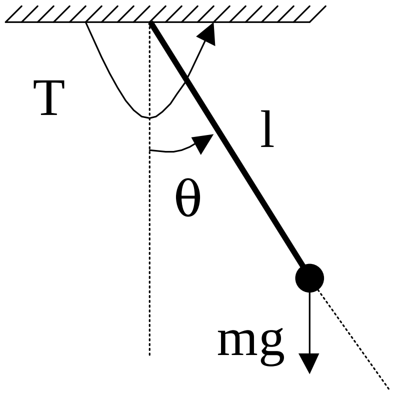
> Il punto fondamentale per ricavare un modello di un sistema meccanico in moto rotazionale è ancora la legge di Newton da utilizzarsi nella forma:

$$T = J\dot{\omega}$$

dove T (Torque, Nm) è la risultate delle coppie agenti sull'inerzia $[J]=kg\ m^2$ e la derivata della velocità $[\omega]=rad/s$ è l'accelerazione angolare (rad/s^2)

Modellistica di sistemi meccanici

» **Modello di un pendolo**



> Il modello è nonlineare e va quindi linearizzato nell'intorno di un punto di equilibrio (si ricordi che per un sistema nonlineare il punto di equilibrio può non essere unico)

$$J\ddot{\theta}(t) = T(t) - mgl\,\sin(\theta(t)) \qquad \ddot{\theta}(t) = 0 \Rightarrow \bar{\theta} = \sin^{-1}\left(\frac{\bar{T}}{mgl}\right)$$

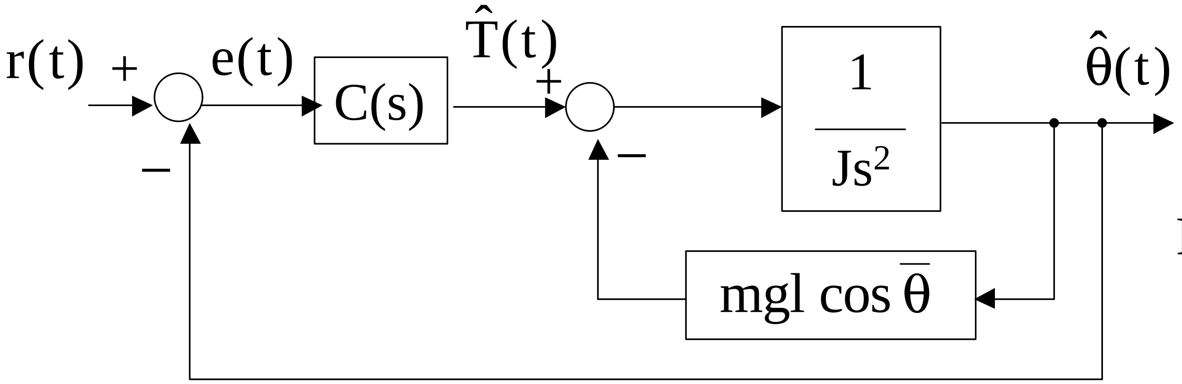
$$\left\{\theta(t) = \bar{\theta} + \hat{\theta}(t),\ T(t) = \bar{T} + \hat{T}(t)\right\} \quad \Rightarrow \quad J\ddot{\hat{\theta}}(t) = \hat{T}(t) - (mgl\,\cos\bar{\theta})\,\hat{\theta}(t)$$

$$P(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{T}(s)} = \frac{1}{Js^2 + mgl\cos\bar{\theta}_1}$$

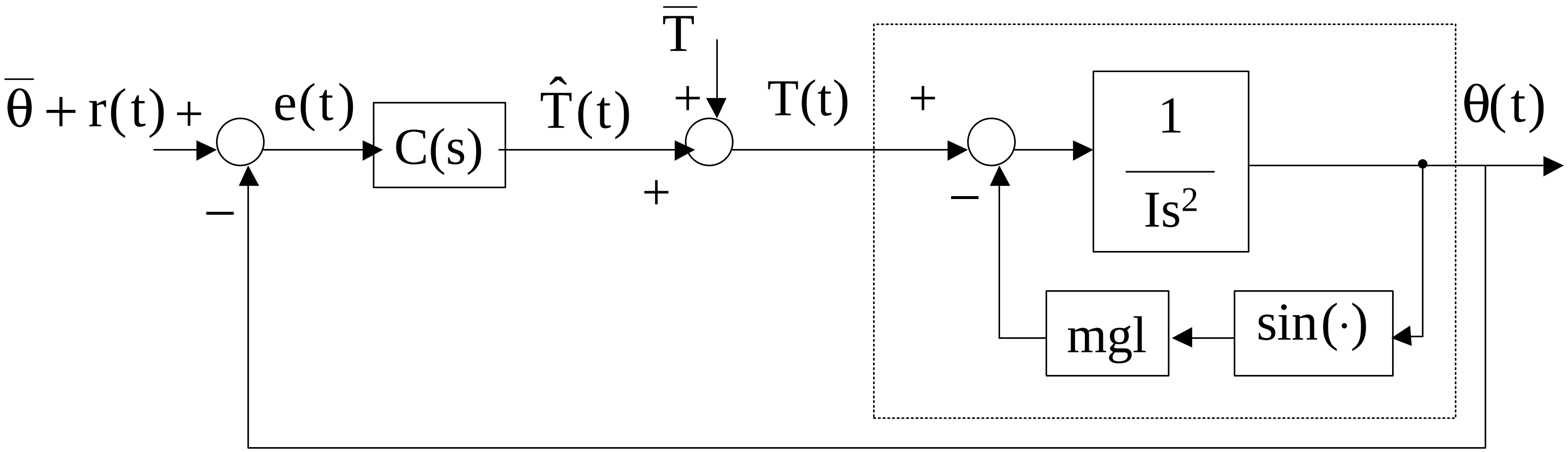
> Dimensionamento dei parametri

> Modello in presenza di attrito

» **Modello di un pendolo**

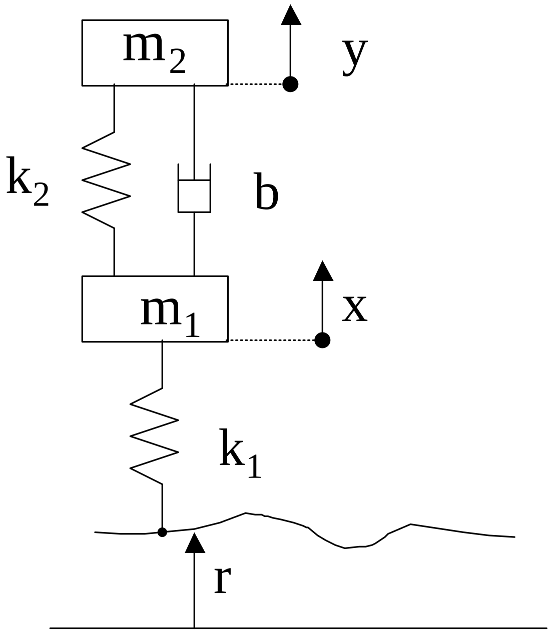


$$P(s) = \frac{\hat{\theta}(s)}{\hat{T}(s)} = \frac{1}{Js^2 + mgl\cos\bar{\theta}_1}$$



Modellistica di sistemi meccanici: altri esempi

» **Modello della sospensione**



> La somma delle forze agenti su ciascuna massa è nulla:

$$b(\dot{y}-\dot{x})+k_2(y-x)-k_1(x-r)=m_1\ddot{x}$$

$$-b(\dot{y}-\dot{x})-k_2(y-x)=m_2\ddot{y}$$

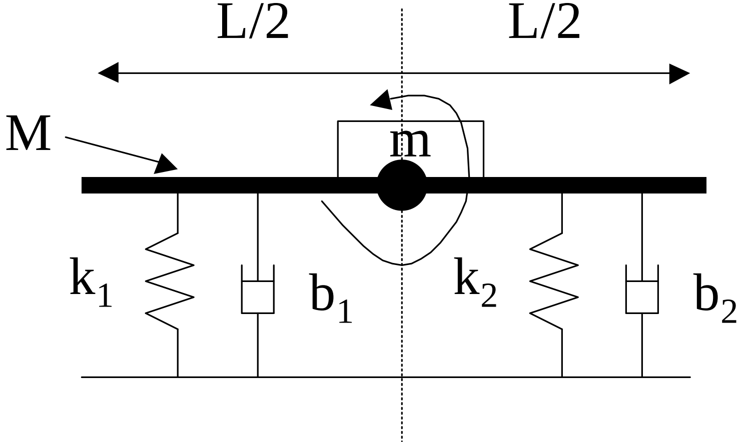
> Le forze di gravità sono state trascurate in quanto operano in maniera uguale ed opposta su ciascuna molla

> Si tratta di un modello alle variazioni

> Scelte come variabili di stato la posizione e la velocità delle masse, si ricavi la corrispondente rappresentazione nello spazio di stato, gli schemi a blocchi e la funzione di trasferimento complessiva.

Modellistica di sistemi meccanici : altri esempi

» **Modello di una piattaforma oscillante**

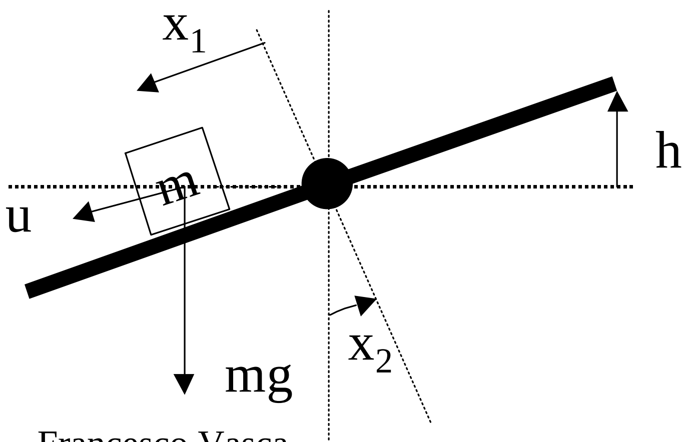


> La massa m può scivolare sulla piattaforma di massa M

> L'uscita è la differenza delle altezze degli estremi della piattaforma

> Il controllo agisce applicando una forza u alla massa m, in direzione parallela alla piattaforma

$$h = \frac{L}{2}\sin x_2, \quad y = 2h = L\sin x_2, \quad J = \frac{M}{12}L^2 + m x_1^2$$

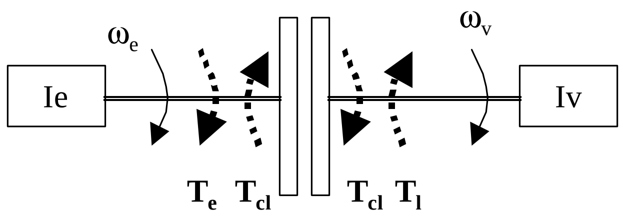


$$m\ddot{x}_1 = u - B\dot{x}_1 + mg\sin x_2$$

$$J\ddot{x}_2 = x_1 mg\cos x_2 - 2\frac{L}{2}bh - 2\frac{L}{2}b\dot{h}$$

Modellistica di sistemi meccanici : altri esempi

» **Modello della frizione automobilistica**



engine speed

engine torque

$$J_e\dot{\omega}_e = T_e - b_e\omega_e - T_c$$

clutch torque: $T_{cl} = kF_n sign(w_e - w_v)$

$$J_v\dot{\omega}_v = T_c - b_v\omega_v - T_L$$

load torque

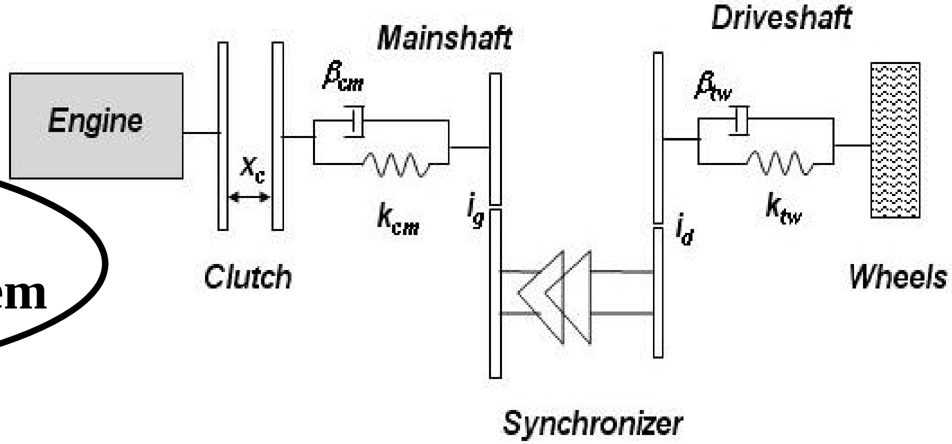
clutch disk speed
(representative of the vehicle speed)

> Scelte come variabili di stato la velocità del motore e la differenza tra la velocità del motore e quella del disco di frizione, ricavare la corrispondente rappresentazione nello spazio di stato e gli schemi a blocchi

> Ricavare le funzioni di trasferimento del sistema

Dynamic models of the driveline

- 6th-order model (detailed)



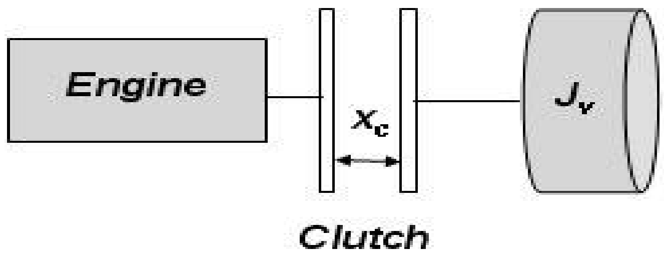
Model used for validation and simulations of the closed loop system

$$z^T = (\omega_e, \omega_c, \theta_c - \theta_m, \omega_m, \theta_m/(i_g i_d) - \theta_w, \omega_w)$$

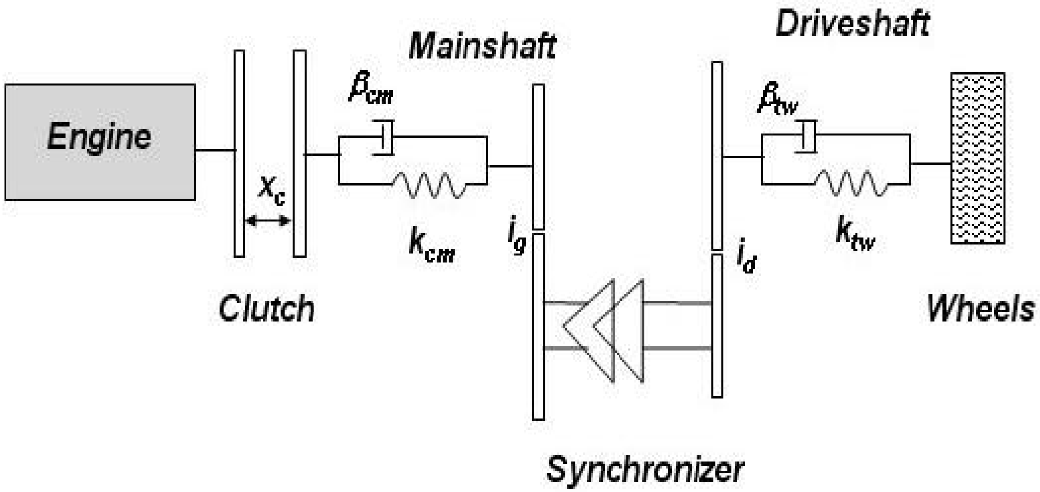
- With the assumption $\omega_c = \omega_m = i_g i_d \omega_w$ a simplified 2nd-order model can be obtained

$$z^T = (\omega_e, \omega_c)$$

Model used for the controller design



6^{th} order hybrid model of the driveline



"Forcing" torque

$$J_e \dot{\omega}_e = T_e - T_c$$

"Load" torque

Engine

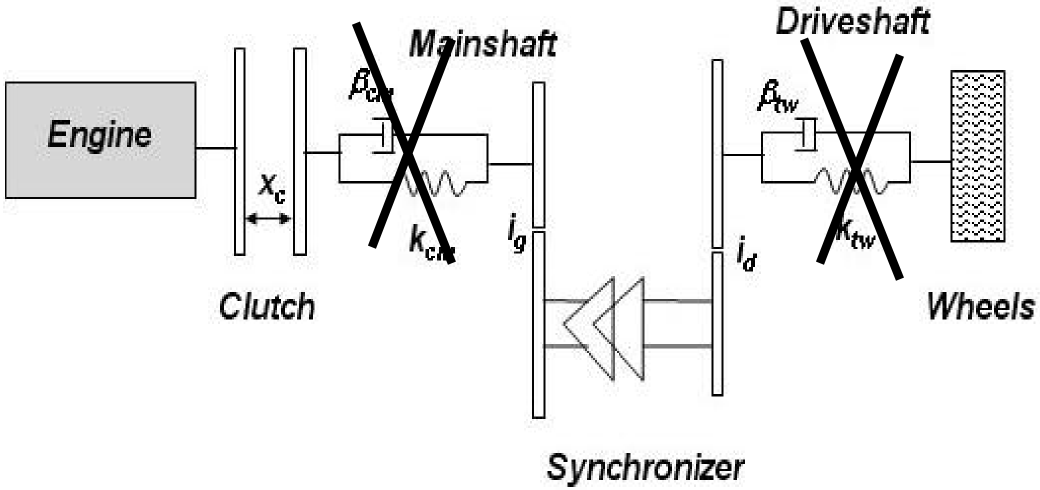
T : $1/(i_g i_d)$

ω : $(i_g i_d)$

J : $1/(i_g i_d)^2$

Wheels

6^{th} order slipping model of the driveline



"Forcing" torque

$$J_e \dot{\omega}_e = \underline{\overline{T_e}} - \underline{T_c}$$

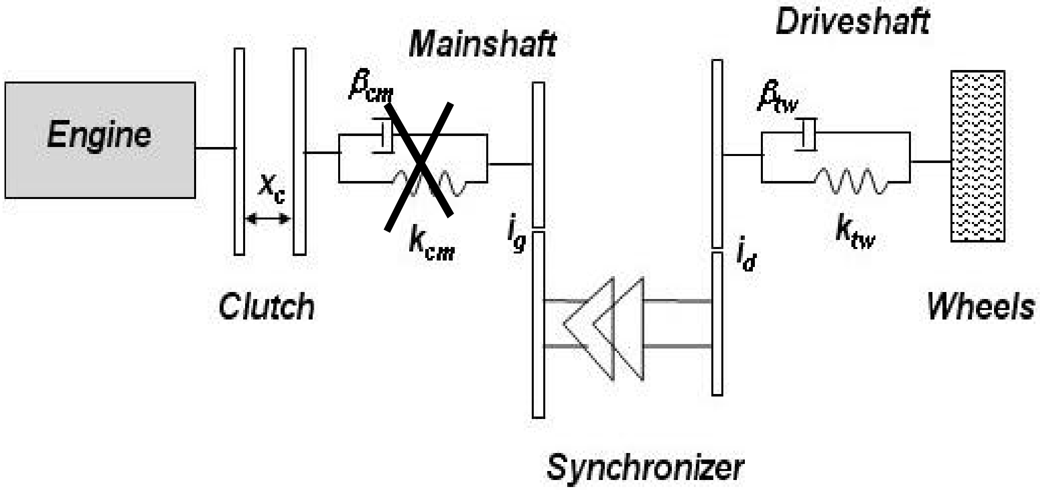
"Load" torque

$$J_c \dot{\omega}_c = T_c - k_{cm}(\theta_c - \theta_m) - \beta_{cm}(\omega_c - \omega_m)$$

$$J_{eq}(i_g, i_d)\dot{\omega}_m = k_{cm}(\theta_c - \theta_m) + \beta_{cm}(\omega_c - \omega_m) - \frac{1}{i_g i_d}\left[k_{tw}(\theta_m/(i_g i_d) - \theta_w) + \beta_{tw}(\omega_m/(i_g i_d) - \omega_w)\right]$$

$$J_w \dot{\omega}_w = k_{tw}(\theta_m/(i_g i_d) - \theta_w) + \beta_{tw}(\omega_m/(i_g i_d) - \omega_w) - T_{load}(\omega_w)$$

Reduced order model: rigid mainshaft



$$\omega_c = \omega_m$$

$$\theta_c = \theta_m + \theta_0$$

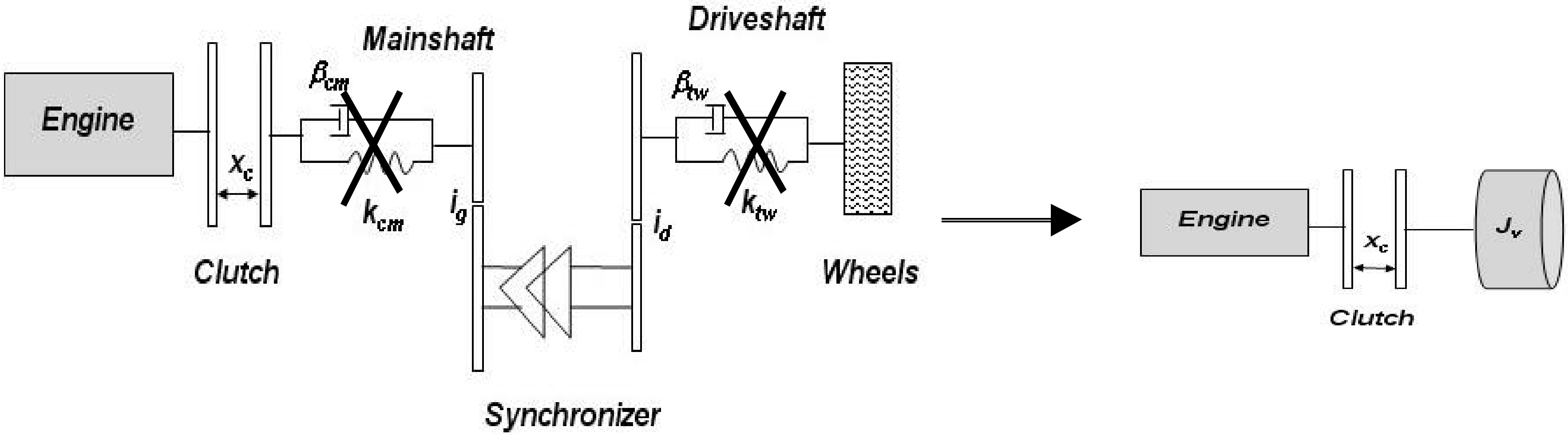
$$J_e \dot{\omega}_e = T_e - T_c$$

$$(J_c + J_{eq}(i_g, i_d))\,\dot{\omega}_c = T_c - \frac{1}{i_g i_d}\left[k_{tw}\Delta\theta_{cw} + \beta_{tw}(\omega_c/(i_g i_d) - \omega_w)\right]$$

$$J_w \dot{\omega}_w = k_{tw}\Delta\theta_{cw} + \beta_{tw}(\omega_c/(i_g i_d) - \omega_w) - T_{load}(\omega_w)$$

$$\Delta\dot{\theta}_{cw} = \omega_c/(i_g i_d) - \omega_w$$

Reduced order model: rigid driveshaft



$$J_e \omega_e = T_e - T_c$$

By assuming $\omega_c = \omega_m = i_g i_d \omega_w$, from the previous reduced order model it is possible to obtain

$$J_v(i_g, i_d)\,\dot{\omega}_c = T_c - T_L(i_g, i_d, \omega_c)$$

with $J_v(i_g,i_d) = J_c + J_{eq}(i_g,i_d) + \dfrac{J_w}{i_g^2 i_d^2}$ $\quad \beta_v(i_g,i_d) = \dfrac{\beta_w}{i_g^2 i_d^2}$ $\quad T_L(i_g,i_d) = \dfrac{T_{load}}{i_g i_d}$

Load torque model

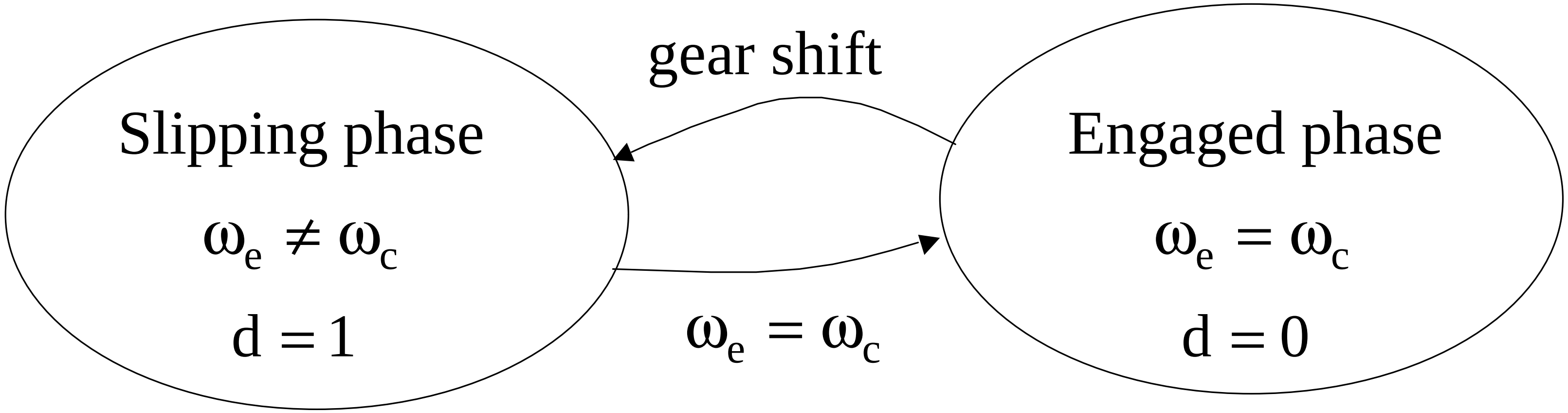
$$T_L(i_g, i_d) = \frac{T_{load}(\omega_w)}{i_g i_d} = \frac{r}{i_g i_d}(f_0 + f_1 v + f_2 v^2)$$

$$T_L(i_g, i_d) = \frac{r}{i_g i_d} f_0 + \frac{3.6 r^2}{(i_g i_d)^2} f_1 \omega_c + f_2 \frac{(3.6)^2 r^3}{(i_g i_d)^3} \omega_c^2$$

$$T_L(i_g, i_d) = \beta_v(i_g, i_d)\omega_c + \tilde{T}_L(i_g, i_d, \omega_c^2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_e \dot{\omega}_e &= T_e - T_c \\ J_v(i_g, i_d)\,\dot{\omega}_c &= T_c - \beta_v(i_g, i_d)\omega_c - \tilde{T}_L(i_g, i_d, \omega_c^2) \end{aligned}}$$

Dry clutch hybrid model



$$J_e \dot{\omega}_e = T_e - T_c \qquad (J_e + J_v)\dot{\omega}_e = T_e - \beta_v \omega_e - T_L$$

$$J_v \dot{\omega}_c = T_c - \beta_v \omega_c - T_L \qquad z = \begin{bmatrix} \omega_e & \omega_c \end{bmatrix}^T$$

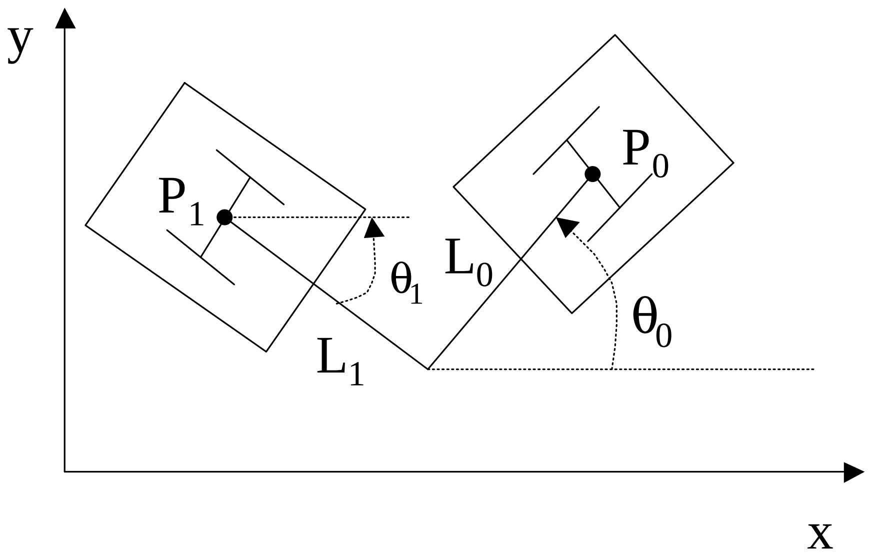
$$\dot{z} = [A_{sl} d + A_{eng}(1-d)]z + [B_{sl} d + B_{eng}(1-d)]u + \Gamma T_L$$

$$A_{sl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta_v / J_v \end{bmatrix} \qquad A_{eng} = \begin{bmatrix} -\beta_v /(J_e + J_v) & 0 \\ 0 & -\beta_v /(J_e + J_v) \end{bmatrix}$$

$$B_{sl} = \begin{bmatrix} 1/J_e & -1/J_v \\ 0 & 1/J_v \end{bmatrix} \qquad B_{eng} = \begin{bmatrix} 1/(J_e + J_v) & 0 \\ 0 & 1/(J_e + J_v) \end{bmatrix}$$

Modellistica di sistemi meccanici: altri esempi

» **Modello di un veicolo con due unità**



> Le coordinate dei punti P_0 e P_1 sono esprimibili in funzione degli angoli e delle lunghezze degli alberi:

$$x_0 = x_1 + L_1 \cos\theta_1 + L_0 \cos\theta_0$$

$$y_0 = y_1 - L_1 \sin\theta_1 + L_0 \sin\theta_0$$

> Si può ipotizzare un moto rettilineo uniforme per entrambi i carrelli:

$$\dot{x}_i = v_i \cos\theta_i, \quad \dot{y}_i = v_i \sin\theta_i$$

$$v_1 = v_0 \cos(\theta_0 + \theta_1) + L_0 \dot{\theta}_0 \sin(\theta_0 + \theta_1)$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{v_1 \sin(\theta_0 + \theta_1) - L_0(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_1)}{L_0 + L_1 \cos(\theta_0 + \theta_1)}$$