

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA

Michele Basso, Luigi Chisci e Paola Falugi

3 novembre 2006



# Indice

<b>1</b>	<b>Modellistica</b>	<b>7</b>
1.1	Introduzione . . . . .	7
1.2	Sistemi elettrici . . . . .	8
1.3	Sistemi meccanici . . . . .	20
1.4	Motore in corrente continua . . . . .	27
1.5	Sistemi termici . . . . .	32
1.6	Sistemi idraulici . . . . .	35
1.7	Conclusioni . . . . .	41



# Capitolo 1

## Modellistica

### 1.1 Introduzione

La costruzione di un modello matematico di un sistema reale rappresenta il primo passo verso la soluzione di molti problemi in vari settori dell'ingegneria ed anche in ambiti non ingegneristici quali, ad esempio, economia, sociologia, biologia, etc.. Tale costruzione costituisce un punto cruciale nel garantire che le tecniche di analisi e di sintesi proprie dell'automatica, basate sul modello, diano risultati soddisfacenti sul sistema effettivo. A tale proposito, un buon modello deve fornire un adeguato compromesso fra aderenza alla realtà e semplicità descrittiva, in quanto la prima garantisce una più stretta concordanza fra il comportamento del sistema e quello del modello, mentre la seconda facilita le procedure di analisi e di sintesi. La modellizzazione di un sistema reale viene solitamente effettuata ricorrendo sia alle leggi della fisica o di altre scienze (*modellistica*), laddove disponibili, che a metodi basati sull'analisi e l'elaborazione di dati sperimentali (*identificazione*). Premettendo che le problematiche di identificazione vengono di norma trattate in corsi specialistici di automatica e che, data la estrema varietà di possibili sistemi reali di interesse, una rassegna esaustiva delle problematiche di modellistica risulta impossibile, questo capitolo è dedicato alla modellistica di alcune classi di sistemi fisici più frequentemente ricorrenti nelle applicazioni ingegneristiche (sistemi elettrici, meccanici, idraulici e termici). L'attenzione sarà prevalentemente rivolta a sistemi lineari, tempo-invarianti, a parametri concentrati, costituiti dalla combinazione di alcuni componenti elementari che tengono conto di fenomeni di dissipazione e di accumulo di energia. In particolare, per ciascuna classe di sistemi, si esaminerà in dettaglio la scelta delle variabili di stato e la conseguente determinazione del modello di stato. Inoltre, si illustrerà un procedimento per il calcolo della funzione di trasferimento (modello ingresso-uscita) che si basa sulla definizione

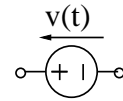
di una opportuna *impedenza generalizzata* per i vari componenti. Da questi sviluppi risulterà evidente come vi siano delle analogie fra componenti di natura diversa (ad esempio un resistore elettrico ed un ammortizzatore meccanico) e come tali analogie consentano una rappresentazione circuitale comune di sistemi elettrici, meccanici, idraulici, termici o più in generale di sistemi costituiti dalla combinazione di parti elettriche/meccaniche/idrauliche/termiche. Attraverso alcuni esempi, si metterà in evidenza come una modellazione più accurata del sistema oppure la rimozione di alcune ipotesi semplificative oppure la presenza di componenti più complessi conduca facilmente ad un modello non lineare.

## 1.2 Sistemi elettrici

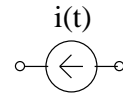
Questo paragrafo è dedicato alla modellistica a parametri concentrati dei sistemi elettrici. I modelli (circuiti) a parametri concentrati sono costituiti dalla interconnessione di alcuni componenti ideali privi di dimensioni geometriche e caratterizzati da opportuni legami tra le grandezze elettriche (tensione e corrente) ad essi applicati. In particolare si considerano circuiti *lineari*, cioè tali che le relazioni costitutive degli elementi circuitali sono lineari, e *permanenti* (o *tempo-invarianti*), cioè tali che i coefficienti di tali relazioni costitutive lineari non dipendono dal tempo. In primo luogo, l'attenzione sarà rivolta a circuiti *passivi*, ovvero circuiti che non possono creare energia ma solo dissiparla o immagazzinarla. I circuiti in oggetto (a parametri concentrati, lineari, permanenti, passivi) sono costituiti dalla interconnessione dei seguenti componenti ideali

- *Resistore* - La resistenza  $R$  (misurata in *ohm*) di un resistore è la costante di proporzionalità che lega la corrente  $i$  che attraversa un conduttore con la caduta di potenziale  $v$  ai suoi capi (legge di Ohm).
- *Induttore* - L'induttanza  $L$  (misurata in *henry*) è la costante di proporzionalità che lega la caduta di tensione ai suoi capi con il tasso di variazione della corrente  $i$  da cui è percorso.
- *Condensatore* - La capacità  $C$  (misurata in *farad*) è la costante di proporzionalità che lega la corrente  $i$  che percorre il condensatore con il tasso di variazione della caduta di potenziale  $v$  ai suoi capi.

- *Generatore indipendente di tensione* - Il generatore indipendente di tensione, il cui simbolo è riportato in figura a destra, fornisce una tensione che è una funzione assegnata del tempo mentre la corrente è non nota e dipende dal circuito a cui è connesso.



- *Generatore indipendente di corrente* - Il generatore indipendente di corrente, il cui simbolo è riportato in figura a destra, fornisce una corrente che è una funzione assegnata del tempo mentre la tensione è non nota e dipende dal circuito a cui è connesso.



	Simbolo circuitale	Tempo	Tempo	Laplace
Resistore		$v(t) = Ri(t)$	$i(t) = \frac{v(t)}{R}$	$V(s) = RI(s)$
Induttore		$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$	$V(s) = sLI(s)$
Condensatore		$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$	$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$	$V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$

**Tabella 1.1** - Relazioni costitutive

I simboli circuitali di tali componenti e le relative relazioni costitutive sono riportate nella tabella 1.2. Nel seguito si farà riferimento a resistore, induttore, condensatore come componenti  $R$ ,  $L$ ,  $C$  ed ai circuiti considerati, costituiti dalla connessione di tali componenti e di generatori indipendenti, come circuiti *RLC passivi*. È opportuno fare alcune considerazioni generali sui componenti appena introdotti.

- *Generatori indipendenti* - I generatori indipendenti consentono di rappresentare *ingressi esogeni*, di tensione o di corrente, al sistema elettrico generati ad esempio da batterie, alimentatori, rete di distribuzione dell'energia, generatori di segnali o sorgenti di energia di vario genere.

- *Componenti ideali e componenti reali* - I componenti ideali introdotti rappresentano delle buone approssimazioni dei rispettivi componenti reali. In realtà un componente reale può essere modellato da un circuito che contiene, oltre al componente ideale corrispondente, altri componenti ideali. Ad esempio un resistore reale è caratterizzato, oltre che dalla sua resistenza, da parametri parassiti (induttanza e capacità) che sono di norma trascurabili alle basse frequenze, ma entrano in gioco a frequenze sufficientemente elevate.
- *Componenti con e senza memoria* - Mentre il componente R è caratterizzato da una relazione di proporzionalità algebrica fra corrente e tensione, i componenti L e C hanno una relazione costitutiva corrente-tensione di tipo integro-differenziale. Questo comporta una differenza sostanziale fra il componente R ed i componenti L, C. La relazione costitutiva dell'induttore implica infatti:

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(r) dr$$

da cui si evince che per determinare l'andamento della corrente dell'induttore a partire da un certo istante iniziale  $t_0$  non è sufficiente conoscere l'andamento della tensione  $v(\cdot)$  a partire da quell'istante ma occorre conoscere anche la corrente iniziale  $i(t_0)$ . Analogamente, per un condensatore:

$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(r) dr$$

cioè occorre assegnare anche la tensione iniziale  $v(t_0)$ , oltre all'andamento della corrente  $i(t)$  per  $t \geq t_0$ , per poter determinare l'andamento futuro della tensione  $v(t), t > t_0$ . In altri termini per i componenti L e C ci si deve ricordare di una certa condizione iniziale diversamente dal componente R in cui sussiste un legame puramente statico (senza memoria)  $v(t) = Ri(t)$ . Per questo motivo l'induttore ed il condensatore sono detti componenti *con memoria* o *dinamici* ed il resistore è un componente *senza memoria* o *statico*.

Ora si illustra come procedere nella determinazione di un modello di stato (vedi paragrafo 1.8) di un circuito RLC. In primo luogo si definisce il vettore di ingresso  $u$  come il vettore delle grandezze elettriche (tensioni e/o correnti) impresse dai generatori indipendenti presenti nel circuito. Si definisce inoltre il vettore di uscita  $y$  come il vettore delle grandezze elettriche di interesse. A questo punto occorre individuare un vettore di variabili di stato  $x$  del circuito tale che la conoscenza dello stato iniziale  $x(t_0)$ , unitamente alla conoscenza di



$u(t)$  per  $t \geq t_0$ , consenta la determinazione dell'andamento temporale di ogni grandezza elettrica del circuito per  $t \geq t_0$ . Dalle considerazioni sopra esposte sulla memoria dei componenti risulta evidente che, a tale scopo, lo stato del circuito deve necessariamente tener memoria delle correnti di tutti gli induttori e delle tensioni di tutti i condensatori presenti nel circuito stesso. D'altro canto le procedure di analisi dei circuiti RLC riportate nei testi di teoria dei circuiti evidenziano come una qualsiasi grandezza elettrica del circuito sia esprimibile come combinazione lineare di tre gruppi di variabili:

- tensioni/correnti dei generatori indipendenti di tensione/corrente (ingressi);
- correnti degli induttori;
- tensioni dei condensatori.

Pertanto, indicati con  $i_L$  il vettore delle correnti di tutti gli induttori presenti nel circuito e con  $v_C$  il vettore delle tensioni di tutti i condensatori, il vettore così definito

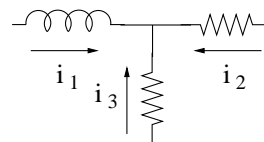
$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

fornisce tutta l'informazione sufficiente, oltre che necessaria, sul passato del sistema e pertanto costituisce una scelta legittima per lo stato di un circuito RLC. Ovviamente esistono altre (infinite) scelte possibili; la particolare scelta operata in (1.2.1) prende il nome di *stato canonico del circuito RLC*.

Individuato il vettore di stato, si procede alla determinazione delle equazioni di stato utilizzando le relazioni costitutive dei componenti in tabella 1.2 e le leggi fisiche di conservazione della carica e di conservazione del campo elettrostatico che regolano il comportamento dei fenomeni elettrici. Queste ultime, nel caso di circuiti elettrici a parametri concentrati, si traducono nelle ben note *leggi di Kirchhoff* sotto riportate.

- *1<sup>a</sup> Legge di Kirchhoff (legge delle correnti)* - La somma algebrica delle correnti confluenti in un nodo (punto di collegamento fra più componenti del circuito) deve essere nulla:

$$\sum_j i_j(t) = 0 \quad (1.2.2)$$

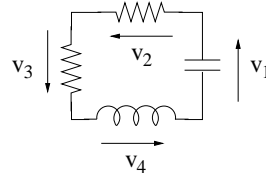


- *2<sup>a</sup> Legge di Kirchhoff (legge delle tensioni)* - La somma algebrica delle

tensioni in un percorso chiuso (maglia) del circuito deve essere nulla

$$\sum_j v_j(t) = 0$$

(1.2.3)



In alternativa al modello di stato, si può adottare un modello ingresso-uscita e descrivere il circuito attraverso le funzioni di trasferimento dai vari ingressi alle uscite di interesse. Si indichi con  $u$  l'ingresso scalare considerato (tensione/corrente di un generatore di tensione/corrente) e con  $y$  la grandezza elettrica scalare di interesse, allora la funzione di trasferimento  $G(s)$  (da  $u$  a  $y$ ) è definita come il rapporto fra le rispettive trasformate di Laplace:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (1.2.4)$$

assumendo condizioni iniziali nulle. Per il calcolo delle funzioni di trasferimento, è conveniente introdurre l'*impedenza generalizzata*  $Z(s)$  di un componente R, L o C come rapporto fra la trasformata di Laplace della tensione e la trasformata di Laplace della corrente del componente, sempre assumendo condizioni iniziali nulle, cioè

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)} \implies V(s) = Z(s)I(s) \quad (1.2.5)$$

Dalle relazioni costitutive in tabella 1.2 e dalle proprietà della trasformata di Laplace in Appendice ??, è immediato constatare che

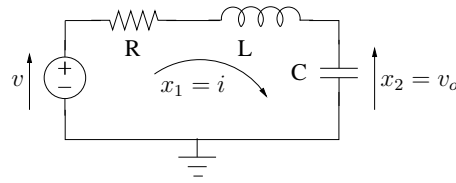
$$Z(s) = \begin{cases} R, & \text{per un resistore} \\ sL, & \text{per un induttore} \\ \frac{1}{sC}, & \text{per un condensatore} \end{cases} \quad (1.2.6)$$

Per il calcolo della funzione di trasferimento si può quindi procedere nel seguente modo:

1. si utilizzano le leggi di Kirchhoff;
2. si utilizza, per ogni componente RLC, la relazione costitutiva generalizzata  $V(s) = Z(s)I(s)$ ;
3. mediante soluzione per sostituzione di un sistema di equazioni algebriche lineari si cerca di ricondursi ad una relazione della forma

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

da cui si deduce immediatamente la funzione di trasferimento desiderata.



**Figura 1.1** - Circuito serie RLC

Allo scopo di esemplificare i procedimenti sopra esposti per la determinazione di modelli di stato e ingresso-uscita di circuiti elettrici, si considerano di seguito alcuni esempi. Per semplicità di notazione, le variabili (di stato, di ingresso e di uscita) verranno indicate con lettere minuscole, omettendo la dipendenza temporale, e le loro trasformate di Laplace con le corrispondenti lettere maiuscole, omettendo la dipendenza da  $s$ .

**Esempio 1.1** - Si consideri il circuito serie RLC di figura 1.1. Si determinino le equazioni di stato del sistema e la funzione di trasferimento da  $v$  a  $v_o$ .

Poiché nel circuito di figura 1.1 sono presenti un induttore ed un condensatore, si considera un vettore di stato di dimensione due. Si possono scegliere come variabili di stato la corrente  $i$  che attraversa l'induttore e la tensione  $v_o$  ai capi del condensatore, cioè

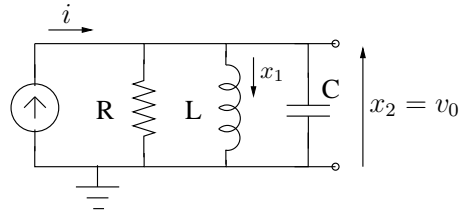
$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ v_o \end{bmatrix} \quad (1.2.7)$$

Le equazioni che descrivono la dinamica del circuito si ottengono applicando le leggi di Kirchhoff e le relazioni costitutive di tabella 1.2

$$\begin{aligned} Rx_1 + L\dot{x}_1 + x_2 - u &= 0 && \text{equazione di equilibrio alla maglia} \\ C\dot{x}_2 - x_1 &= 0 && \text{equazione di equilibrio al nodo} \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

dove l'ingresso  $u$  è la tensione ai capi del generatore indipendente, cioè  $u = v$ . Osservando che, nel nostro caso,  $y = v_o$  è l'uscita si possono scrivere le equazioni di stato semplicemente riorganizzando le equazioni (1.2.8)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -Rx_1/L - x_2/L + u/L \\ x_1/C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= [0, 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$



**Figura 1.2** - Circuito parallelo RLC

È possibile ricavare agevolmente la funzione di trasferimento utilizzando le impedenze generalizzate congiuntamente alle leggi di Kirchhoff e scrivendo le equazioni che descrivono il sistema direttamente nel dominio di Laplace.

$$\begin{aligned} U &= \left( R + Ls + \frac{1}{sC} \right) X_1 \\ Y &= \frac{1}{sC} X_1 \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

La funzione di trasferimento (1.2.4) è ottenibile dalle equazioni (1.2.10) esprimendo  $Y$  in funzione di  $U$ .

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (1.2.11)$$

■

**Esempio 1.2** - Si consideri il circuito parallelo RLC di figura 1.2. Si determinino le equazioni di stato del sistema e la funzione di trasferimento da  $i$  a  $v_o$ .

Nel circuito di figura 1.2 sono presenti un induttore ed un condensatore e quindi si considera la dimensione dello stato pari a 2. Si scelgono come variabili di stato la corrente dell'induttore  $x_1 = i_L$  e la tensione ai capi del condensatore  $x_2 = v_o$ . Applicando l'equilibrio delle correnti al nodo e le relazioni costitutive, si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2 + \frac{1}{C}u \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

dove  $u$  è l'ingresso del sistema uguale alla corrente  $i$  erogata dal generatore e  $y = v_o$  è l'uscita del sistema. Le equazioni (1.2.12) riscritte in forma matriciale

sono

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/RC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/C \end{bmatrix} u \\ y &= [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Il calcolo della funzione di trasferimento può essere effettuato applicando l'operatore trasformata di Laplace alle equazioni (1.2.12) e procedendo per sostituzione nel modo qui di seguito illustrato. Le equazioni (1.2.12) nel dominio di Laplace, con condizioni iniziali nulle, sono

$$\begin{aligned} sX_1 &= \frac{1}{L}X_2 \\ sX_2 &= -\frac{1}{C}X_1 - \frac{1}{RC}X_2 + \frac{1}{C}U \\ Y &= X_2 \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

Quindi si sostituisce  $X_1 = \frac{1}{Ls}X_2$ , ricavato dalla prima equazione, nella seconda ottenendo

$$\left( s + \frac{1}{RC} + \frac{1}{LCs} \right) X_2 = \frac{1}{C} U \quad (1.2.15)$$

Dopo semplici manipolazioni algebriche si ottiene la funzione di trasferimento

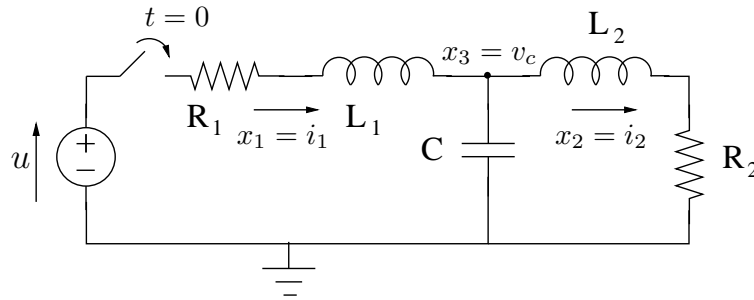
$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{X_2}{U} = \frac{\frac{1}{C}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} = \frac{RLs}{RLCs^2 + Ls + R} \quad (1.2.16)$$

■

**Esempio 1.3** - Si consideri il circuito più complesso di figura 1.3. Si determinino le equazioni di stato del sistema e la funzione di trasferimento da  $u$  a  $i_2$ .

Nel circuito di figura 1.3 sono presenti due induttori ed un condensatore. Quindi si scelgono come variabili di stato  $x_1 = i_1$ , la corrente dell'induttore  $L_1$ ,  $x_2 = i_2$ , la corrente dell'induttore  $L_2$  e  $x_3 = v_c$ , la tensione ai capi del condensatore. Le equazioni del sistema si ottengono mediante due equazioni di equilibrio alla maglia ed una al nodo

$$\begin{aligned} R_1x_1 + L_1\dot{x}_1 + x_3 &= u \\ -x_3 + L_2\dot{x}_2 + R_2x_2 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + C\dot{x}_3 &= 0 \\ y &= x_2 \end{aligned} \quad (1.2.17)$$



**Figura 1.3** - Circuito elettrico dell'esempio 2.3

Le equazioni di stato sono quindi

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.2.18)$$

$$y = [0, 1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La funzione di trasferimento può essere calcolata applicando la trasformata di Laplace alle equazioni (1.2.17) e esprimendo  $Y(s)$  in funzione di  $U(s)$  tramite una procedura di sostituzione.

$$G(s) = \frac{1}{L_1 L_2 C s^3 + (L_1 R_2 + L_2 R_2) C s^2 + (R_1 R_2 C + L_1 + L_2) s + R_1 + R_2} \quad (1.2.19)$$

Per modellare efficacemente sistemi reali, come per esempio transistori e circuiti analogici di amplificazione e di trattamento del segnale, è indispensabile l'uso di componenti attivi che possano essere introdotti in modo semplice nella tecnica di modellistica fin qui discussa. I componenti ideali attivi lineari più comunemente usati sono i generatori comandati e gli amplificatori operazionali ideali

- I *generatori comandati* consentono di modellare con semplicità componenti attivi presenti in un circuito e sono caratterizzati dal fatto che la grandezza impressa (tensione o corrente) è proporzionale tramite una costante che prende il nome di parametro di controllo ad un'altra grandezza fisica (per esempio una velocità, una tensione, una corrente ecc.) applicata al loro ingresso

$$\begin{aligned} v_a &= v_b \\ i_a &= i_b \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

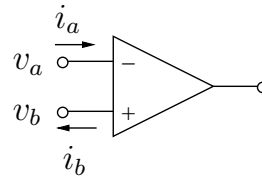


Figura 1.4 - Amplificatore ideale

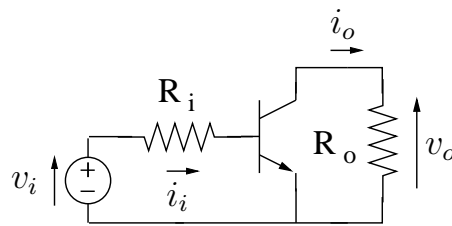


Figura 1.5 - Circuito attivo

- L'amplificatore operazionale ideale, illustrato in figura 1.4, è un elemento ideale attivo caratterizzato dalle relazioni costitutive (1.2.20)

Si considera di seguito un esempio di modellistica di circuito RLC attivo.

**Esempio 1.4** - Dato il circuito di figura 1.5 si determinino le equazioni di stato del sistema e la funzione di trasferimento da  $v_i$  a  $v_o$ . Si modelli il transistor mediante il circuito equivalente di Giacoleto di figura 1.6 con i seguenti valori dei parametri:

$$\begin{aligned} R_{bb'} &= 50\Omega, & R_{b'e} &= 8.75\text{K}\Omega, & R_o &= 10\text{K}\Omega, & g_m &= 40\text{mV/A}, & C_{b'c} &= 3\text{pF}, \\ R_i &= 100\Omega, & C_{be} &= C_{bc} = C_{ce} &= 1\text{pF}, & R_{b'c} &= R_{ce} &= 10\Omega, & C_{b'e} &= 60\text{pF} \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Il circuito in esame ha cinque condensatori ma le tensioni ai capi di  $C_{bc}$  e  $C_{b'e}$  sono una combinazione lineare delle tensioni  $v_1$ ,  $v$  e  $v_2$  e quindi linearmente dipendenti. Scegliendo come variabili di stato  $x_1 = v$ ,  $x_2 = v_1$ ,  $x_3 = v_2$  e come

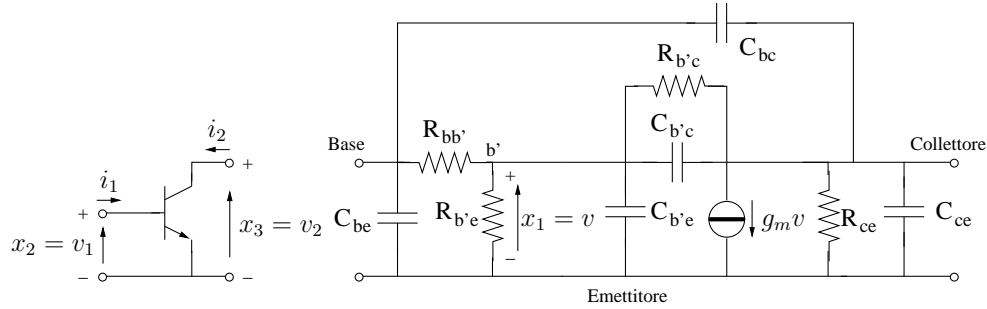


Figura 1.6 - Circuito equivalente di Giacoleto di un transistore bipolare

ingresso  $u = v_i$  si ottiene il seguente modello dinamico

$$\begin{cases} \frac{u - x_2}{R_i} = C_{be}\dot{x}_2 + \frac{x_2 - x_1}{R_{bb'}} + C_{bc}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) \\ \frac{x_2 - x_1}{R_{bb'}} = \frac{x_1}{R_{b'e}} + \frac{x_1 - x_3}{R_{b'c}} + C_{b'c}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + C_{b'e}\dot{x}_1 \\ C_{b'c}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + \frac{x_1 - x_3}{R_{b'c}} = g_m x_1 + \frac{x_3}{R_{ce}} + C_{bc}(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + C_{ce}\dot{x}_3 + \frac{x_3}{R_o} \end{cases} \quad (1.2.22)$$

che, riorganizzando i termini, può essere riscritto nella seguente forma più compatta

$$\begin{aligned} (C_{be} + C_{bc})\dot{x}_2 - C_{bc}\dot{x}_3 &= -\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_{bb'}}\right)x_2 + \frac{1}{R_{bb'}}x_1 + \frac{1}{R_i}u \\ (C_{b'c} + C_{b'e})\dot{x}_1 - C_{b'c}\dot{x}_3 &= -\left(\frac{1}{R_{bb'}} + \frac{1}{R_{b'e}} + \frac{1}{R_{b'c}}\right)x_1 + \frac{1}{R_{bb'}}x_2 + \frac{1}{R_{b'c}}x_3 \\ (C_{ce} + C_{b'c} + C_{bc})\dot{x}_3 - C_{b'c}\dot{x}_1 - C_{bc}\dot{x}_2 &= \left(\frac{1}{R_{b'c}} - g_m\right)x_1 - \left(\frac{1}{R_{b'c}} + \frac{1}{R_{ce}} + \frac{1}{R_o}\right)x_3 \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Effettuando la sostituzione dei valori dei parametri si ottiene la seguente rappresentazione di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -1.204 \cdot 10^9 x_1 + 1.639 \cdot 10^8 x_2 - 5.475 \cdot 10^8 x_3 + 5.465 \cdot 10^7 u \\ \dot{x}_2 &= 1.738 \cdot 10^{10} x_1 - 1.661 \cdot 10^{10} x_2 - 2.242 \cdot 10^{10} x_3 + 5.574 \cdot 10^9 u \\ \dot{x}_3 &= 1.475 \cdot 10^{10} x_1 - 3.224 \cdot 10^9 x_2 - 4.483 \cdot 10^{10} x_3 + 1.148 \cdot 10^9 u \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

La funzione di trasferimento può essere ottenuta dopo qualche calcolo utilizzando una delle tecniche discusse in precedenza tenendo conto che  $y = v_o =$



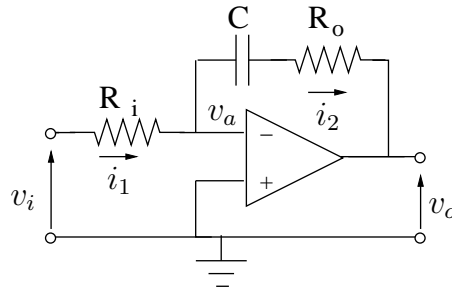


Figura 1.7 - Circuito attivo

$v_2 = x_3$  è l'uscita

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{1.148 \cdot 10^9 s^2 + 3.281 \cdot 10^{18} s + 2.186 \cdot 10^{28}}{s^3 + 6.265 \cdot 10^{10} s^2 + 7.517 \cdot 10^{20} s + 8.397 \cdot 10^{29}} \quad (1.2.25)$$

■

**Esempio 1.5** - Si consideri il circuito di figura 1.7 relativo ad un sistema integro proporzionale (PI) e si determini la funzione di trasferimento da  $v_i$  a  $v_o$ .

Utilizzando le relazioni costitutive dell'amplificatore operazionale ideale e le impedenze generalizzate, si ricavano le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} V_i - V_a &= R_i I_1 \\ V_a &= 0 \\ V_o + \left( R_o + \frac{1}{sC} \right) I_2 &= V_o + \left( R_o + \frac{1}{sC} \right) I_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

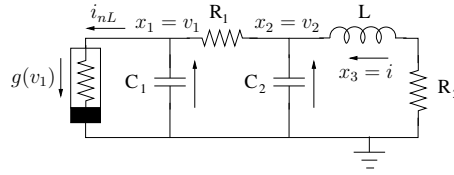
Ricavando dalla prima equazione  $I_1 = \frac{V_i}{R_i}$  e sostituendola nella seconda si ottiene la funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{V_o}{V_i} = - \left( \frac{R_o}{R_i} + \frac{1}{R_i C s} \right) \quad (1.2.27)$$

■

È opportuno fare alcune riflessioni sui limiti di validità dei modelli circuitali, lineari e a parametri concentrati, fin qui trattati. Essi forniscono una descrizione sufficientemente accurata del circuito fisico quando:

- sono trascurabili fenomeni di propagazione elettromagnetica;



**Figura 1.8** - Circuito di Chua

- il comportamento dei singoli componenti è ben descritto dalle relazioni caratteristiche lineari introdotte.

Quando, viceversa, queste ipotesi non sono soddisfatte si procede, nella determinazione del modello, ad includere i fenomeni trascurati. L'esempio seguente mostra l'inclusione di non linearità nel modello di un circuito reale.

**Esempio 1.6** - Si consideri il circuito di Chua riportato in figura 1.8 dove è presente un elemento non lineare con una caratteristica ingresso-tensione  $i_{nL} = g(v_1) = g_1 v_1 + 0.5 g_2 (|v_1 + 1| - |v_1 - 1|)$  dove  $g_1$  e  $g_2$  sono parametri assegnati. Si scrivano le equazioni di stato del sistema.

Si possono scegliere come variabili di stato le tensioni ai capi dei condensatori e la corrente che percorre l'induttore ( $x_1 = v_1$ ,  $x_2 = v_2$ ,  $x_3 = i$ ). Applicando le leggi di Kirchoff si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} C_1 \dot{x}_1 &= \frac{x_2 - x_1}{R_1} - g(x_1) \\ C_2 \dot{x}_2 &= \frac{x_1 - x_2}{R_1} + x_3 \\ L \dot{x}_3 &= -x_2 - R_2 x_3 \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

da cui è immediato ricavare le equazioni di stato  $\dot{x} = f(x, u)$  in forma standard.

■

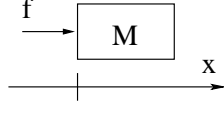
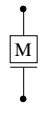
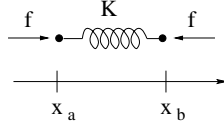

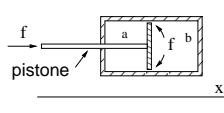
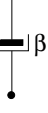
### 1.3 Sistemi meccanici

In questo paragrafo verranno presi in esame modelli meccanici lineari di traslazione e di rotazione considerando sistemi di riferimento inerziali. Un sistema meccanico passivo a traslazione lineare è composto da tre componenti principali.

- *Massa* - Per la seconda legge del moto di Newton, la forza applicata ad una massa  $M$  dà luogo ad una accelerazione  $a$  legata alla forza dalla relazione  $f = Ma$

- *Molla* - Quando una molla viene estesa oppure compressa, si sviluppa una forza proporzionale alla sua rigidezza  $k$  e allo spostamento totale dalla posizione di equilibrio.
- *Smorzatore* - Uno smorzatore è un componente che fornisce uno smorzamento del moto del sistema meccanico in esame mediante l'azione di una forza di attrito viscoso.

Ai fini dell'analisi si assume che i componenti contengano soltanto elementi "puri", cioè si assume che la molla sia una molla ideale con massa zero e che non dissipasi energia durante la compressione o l'estensione. I simboli di tali componenti ideali e le relative relazioni costitutive sono riportate nella tabella 1.3. Per scrivere le equazioni della dinamica dei sistemi meccanici si applica

Elemento fisico	Relazione costitutiva	Simbolo rete meccanica
<p>Corpo rigido con massa prevalente</p> 	$f = M\ddot{x}$	
<p>Molla con elasticità prevalente</p> 	$f_e = -k(x_b - x_a) = -f$	
<p>Smorzatore con attrito viscoso prevalente</p> 	$f_\beta = -\beta(\dot{x}_b - \dot{x}_a)$	

**Tabella 1.2** - Relazioni costitutive dei sistemi meccanici di traslazione

la legge fondamentale del moto che afferma che la risultante di tutte le forze deve essere uguale a zero. In altre parole la somma delle forze applicate deve essere uguale alla somma delle forze di reazione. Le equazioni di un sistema possono essere ottenute facendo riferimento alla rete meccanica ad esso associata, la quale è composta dai simboli circuitali riportati in tabella 1.3. La rete meccanica viene disegnata secondo il seguente formalismo

- Si connettono fra di loro i terminali degli elementi che hanno la stessa posizione; un nodo corrisponde ad una specifica posizione.

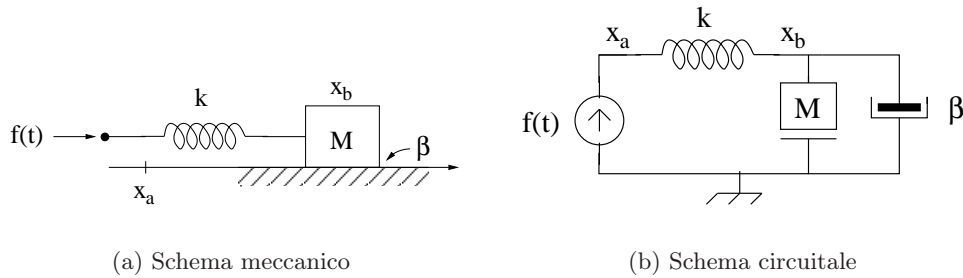
- Il nodo di riferimento in ogni situazione è dato dalla posizione di equilibrio statico. Questo comporta che componenti rigidamente connessi vengono collegati a massa.

Una volta disegnata la rete meccanica si determinano le equazioni del sistema imponendo l'equilibrio delle forze ad ogni nodo. Le equazioni sono simili alle equazioni al nodo di un circuito elettrico interpretando la forza come analogo della corrente e la velocità analogo della tensione. Pertanto una forza applicata dall'esterno è equivalente ad un generatore di corrente. Infine, per determinare un modello di stato del sistema occorre definire il vettore di stato. Una scelta canonica delle variabili di stato, in analogia con i sistemi elettrici, è quella di considerare le velocità di traslazione delle masse e le forze elastiche poiché l'energia del sistema (rispettivamente energia cinetica e energia elastica) è esprimibile in funzione di tali quantità. L'analisi dei sistemi meccanici possiede tuttavia una peculiarità rispetto all'analisi degli analoghi sistemi elettrici e cioè il fatto che spesso in un sistema meccanico ha interesse studiare l'andamento delle posizioni delle masse presenti. Tali posizioni (integrali della velocità) corrispondono, secondo l'analogia elettro-meccanica a quantità fisiche (integrali delle tensioni dei condensatori) che, solitamente, non hanno interesse nell'analisi dei circuiti elettrici. D'altro canto, la scelta dello stato derivante dall'analogia con i circuiti elettrici, non permette sempre di esprimere tutte le posizioni delle masse in funzione delle variabili di stato e di ingresso. Quindi, per una modellazione più completa del sistema meccanico, che consenta di descrivere anche l'andamento delle posizioni di tutte le parti del sistema, si suggerisce di scegliere come variabili di stato le posizioni e le velocità di tutte le masse presenti nel sistema.

Allo scopo di illustrare il procedimento precedentemente descritto per la determinazione di modelli meccanici di traslazione si considerano di seguito alcuni esempi.

**Esempio 1.7** - *Si consideri il sistema di figura 1.9(a) inizialmente a riposo a cui è applicata una forza  $f(t)$  all'estremo della molla di posizione  $x_a$ . Tale forza viene trasmessa, attraverso la molla, alla massa di posizione  $x_b$ . Si determinino le equazioni di stato del sistema e la funzione di trasferimento nel caso in cui l'uscita  $y$  del sistema sia  $x_a$ .*

Per disegnare la rete meccanica corrispondente al sistema in figura 1.9(a) si individuano per prima cosa i nodi della rete: si hanno due nodi dati dalle posizioni  $x_a$  e  $x_b$  e un nodo di riferimento corrispondente alla condizione di riposo. Quindi gli elementi circuitali vengono collegati tra questi nodi. Per esempio un estremo della molla ha posizione  $x_a$  e l'altro ha posizione  $x_b$  e



**Figura 1.9** - Sistema meccanico dell'esempio 1.7

quindi la molla va posizionata tra questi due nodi. La rete meccanica completa è riportata in figura 1.9(b). Le equazioni dinamiche del sistema quindi si ottengono considerando l'equilibrio delle forze ai nodi  $x_a$  e  $x_b$

$$\begin{aligned} f + k(x_b - x_a) &= 0 \\ M\ddot{x}_b &= -\beta(\dot{x}_b - 0) - k(x_b - x_a) = 0 \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

che possono essere riscritte nella seguente forma

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_b + \beta\dot{x}_b &= f \\ x_a &= x_b + \frac{f}{k} \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Si osservi che esiste un legame statico tra  $x_a$  e  $x_b$  e che nelle equazioni è presente la derivata seconda di  $x_b$ . Si può quindi definire il seguente vettore di stato di dimensione due

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b \\ \dot{x}_b \end{bmatrix}. \quad (1.3.3)$$

Inoltre l'ingresso è  $u = f$  e l'uscita desiderata è  $y = x_a$ . Pertanto, si ottengono le seguenti equazioni di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{\beta}{M}x_2 + \frac{1}{M}u \\ y = x_a = x_1 + \frac{u}{k} \end{cases} \quad (1.3.4)$$

La funzione di trasferimento si ricava immediatamente applicando l'operatore trasformata di Laplace, per condizioni iniziali nulle, alle equazioni (1.3.1)

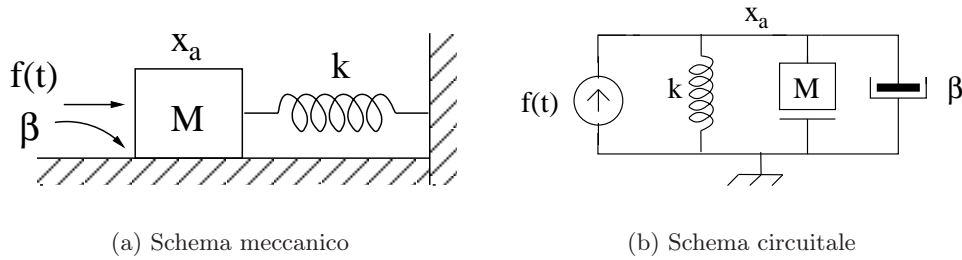
$$(Ms^2 + \beta s)X_1 = U \Rightarrow X_1 = \frac{U}{Ms^2 + \beta s} \Rightarrow Y = \frac{U}{Ms^2 + \beta s} + \frac{U}{k} \quad (1.3.5)$$

da cui

$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{\frac{M}{k}s^2 + \frac{\beta}{k}s + 1}{Ms^2 + \beta s} = \frac{\frac{1}{k}s^2 + \frac{\beta}{kM}s + \frac{1}{M}}{s\left(s + \frac{\beta}{M}\right)} \quad (1.3.6)$$

■

**Esempio 1.8** - Si consideri il sistema di figura 1.10(a) inizialmente a riposo a cui è applicata una forza  $f(t)$  alla massa  $M$  di posizione  $x_a$ . Si determinino le equazioni di stato del sistema.



**Figura 1.10** - Sistema meccanico dell'esempio 1.8

La rete meccanica corrispondente al sistema in figura 1.10(a) è costituita dal nodo di riferimento e dal nodo associato alla posizione  $x_a$ . La rete meccanica completa è riportata in figura 1.10(b). Applicando l'equilibrio delle forze al nodo  $x_a$  si ottiene la seguente equazione

$$f + M(0 - \ddot{x}_a) + \beta(0 - \dot{x}_a) + k(0 - x_a) = 0 \quad (1.3.7)$$

In modo analogo all'esempio precedente si sceglie il vettore di stato

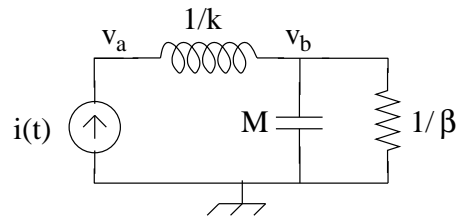
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_a \\ \dot{x}_a \end{bmatrix}. \quad (1.3.8)$$

e si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -\beta/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u \quad (1.3.9)$$

■

Si osservi come due sistemi che possiedono un circuito simile siano descritti da equazioni differenziali della stessa forma. Inoltre il circuito meccanico risulta molto simile ad un circuito elettrico e le equazioni di entrambi si ottengono

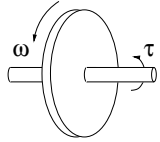

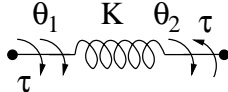

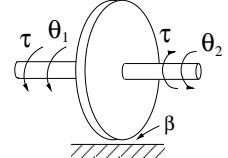



**Figura 1.11** - Circuito elettrico associato all'esempio 1.7

tramite delle equazioni di equilibrio ai nodi. Questa osservazione consente di stabilire una analogia tra circuiti elettrici e circuiti meccanici associando ogni forza ad una corrente, ogni velocità ad una tensione, ogni massa ad una capacità, ogni molla di costante elastica  $k$  ad un induttore di induttanza  $1/k$ , ogni smorzamento ad una conduttanza. Tali analogie sono sintetizzate in tabella 1.4. Per illustrare meglio questa analogia si riprende l'esempio 1.7. Il circuito elettrico analogo alla rete meccanica 1.9(b) è riportato in figura 1.11.

Le equazioni che caratterizzano i sistemi rotazionali sono simili a quelle dei sistemi di traslazione. Nei sistemi di rotazione si utilizzano le equazioni dei momenti delle forze. Analogamente al caso traslazionale, si impone che la somma dei momenti delle forze applicata in un punto sia uguale alla somma dei momenti delle forze di reazione. I tre componenti fondamentali di un sistema meccanico rotazionale passivo sono l'inerzia, l'attrito viscoso e l'elasticità di torsione; la loro caratterizzazione è riportata in tabella 1.3. Si osserva che in questo caso la posizione, la velocità e l'accelerazione sono grandezze angolari. Quindi, ad esempio, il momento di una forza applicato ad un corpo con momento di inerzia  $J$  produce una accelerazione angolare. Anche in questo caso la scelta delle variabili di stato derivante dall'analogia con i circuiti elettrici include le velocità angolari delle masse e le torsioni delle molle, quantità utilizzate per esprimere rispettivamente l'energia cinetica e quella elastica. Come osservato in precedenza per i sistemi meccanici in traslazione, tale scelta non consente sempre di esprimere tutte le posizioni angolari in funzione di stato e ingresso; a tale proposito una scelta più appropriata è quella di considerare posizioni e velocità angolari di tutte le masse rotanti presenti nel sistema. Per i sistemi rotazionali è possibile ottenere un circuito elettrico equivalente nella stessa maniera di quelli traslazionali.

**Esempio 1.9** - *Si consideri il sistema rappresentato in figura costituito da due dischi caratterizzati da un attrito viscoso fra di loro e fra di loro e il telaio su cui poggiano. Si determinino le equazioni di stato del sistema.*

Elemento fisico	Relazione costitutiva	Simbolo rete meccanica
Corpo rigido con inerzia prevalente 	$\tau = J\dot{\omega} = J\ddot{\theta}$	
Molla con elasticità di torsione prevalente 	$\tau_e = -k(\theta_2 - \theta_1)$	
Smorzatore con attrito viscoso prevalente 	$\tau_\beta = -\beta(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$	

**Tabella 1.3** - Relazioni costitutive dei sistemi meccanici di rotazione

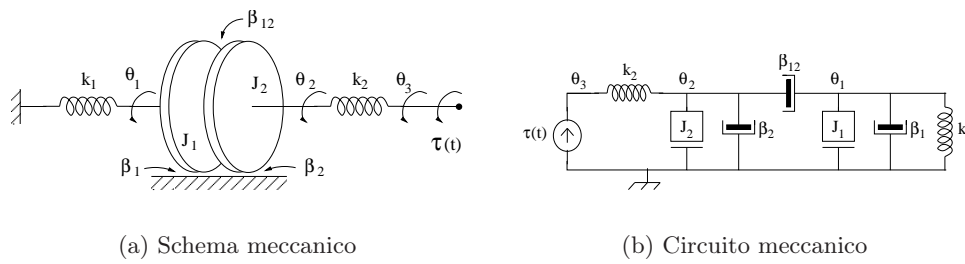
La rete meccanica associata al sistema di figura 1.12(a) si costruisce, similmente al caso traslazionale, collegando i terminali degli elementi che hanno lo stesso spostamento angolare. Il sistema in esame presenta tre nodi individuati dalle posizioni  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  e un nodo di riferimento. La rete meccanica completa è mostrata in figura 1.12(b). Le equazioni si scrivono direttamente imponendo che, in ogni nodo, la somma dei momenti angolari sia nulla

$$\begin{aligned}
 \tau &= k_2(\theta_3 - \theta_2) \\
 J_1\ddot{\theta}_1 &= -k_1\theta_1 - \beta_1\dot{\theta}_1 - \beta_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\
 J_2\ddot{\theta}_2 &= -k_2(\theta_2 - \theta_3) - \beta_2\dot{\theta}_2 - \beta_{12}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)
 \end{aligned}
 \tag{1.3.10}$$

Effettuando la seguente scelta del vettore di stato

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}
 \tag{1.3.11}$$





**Figura 1.12** - Sistema meccanico dell'esempio 1.9

si ottiene il modello di stato qui riportato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{J_1} & -\frac{\beta_1 + \beta_{12}}{J_1} & 0 & \frac{\beta_{12}}{J_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\beta_{12}}{J_2} & 0 & -\frac{\beta_2 + \beta_{12}}{J_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_2} \end{bmatrix} u \quad (1.3.12)$$

dove l'ingresso  $u$  è la coppia  $\tau$  applicata dall'esterno. ■

## 1.4 Motore in corrente continua

Il motore in corrente continua (motore cc) è uno degli attuatori elettromeccanici più comunemente impiegati nei sistemi di controllo della movimentazione. In questo paragrafo si vuole determinare un modello matematico del motore cc sfruttando le nozioni di modellistica di sistemi elettrici e meccanici introdotte nei due paragrafi precedenti.

Nella figura 1.13(a) è mostrato uno schema costruttivo del motore cc che consiste di una parte fissa detta *statore* e di una parte rotante detta *rotore*. Lo statore è solitamente dotato di un elettromagnete alimentato in corrente continua (*circuito di campo o di eccitazione*) che genera un campo magnetico stazionario. Il rotore è avvolto da spire conduttrici percorse da corrente (*circuito di armatura*) che, immerse nel campo magnetico, vengono sottoposte ad una forza meccanica  $F(t) = BLi_a(t)$  dove  $B$  è la componente perpendicolare alle spire del campo magnetico,  $L$  la lunghezza del conduttore e  $i_a(t)$  la corrente di armatura. Il momento risultante causa la rotazione del rotore.

Per effetto dell'induzione elettromagnetica, viene generata nel circuito di

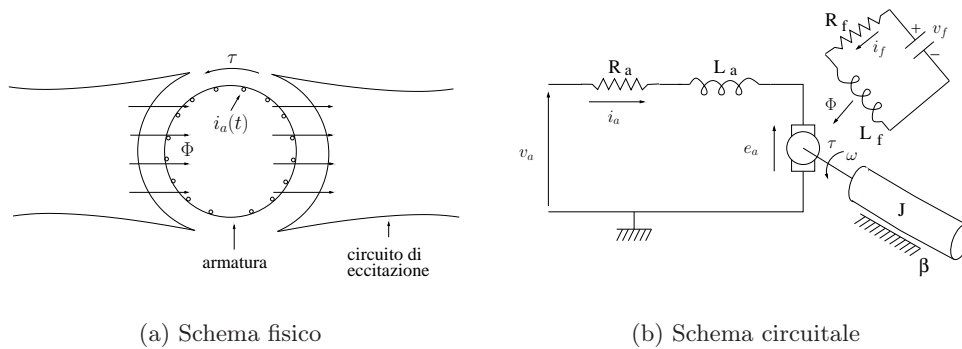


Figura 1.13 - Motore elettrico in continua

armatura una tensione

$$e_a(t) = k_b \omega(t), \quad (1.4.1)$$

detta *forza elettromotrice indotta*, proporzionale alla velocità angolare  $\omega$  del rotore. Il momento esercitato dal motore è proporzionale al prodotto del flusso di induzione magnetica  $\phi$  e della corrente di armatura  $i_a$

$$\tau(t) = k i_a(t) \phi(t) \quad (1.4.2)$$

Volendo operare un controllo di tipo lineare si presentano quindi due possibilità

1. Fissare  $\phi(t)$  e variare  $i_a(t) \implies$  **Controllo di armatura**
2. Fissare  $i_a(t)$  e variare  $\phi(t) \implies$  **Controllo di campo**

## Controllo di armatura

Fissato  $\phi(t)$  ad un valore costante, ad esempio alimentando il circuito di campo con una pila, vale la seguente relazione

$$\tau(t) = k_T i_a(t). \quad (1.4.3)$$

Si osservi che, in assenza di perdite, la potenza elettromagnetica si trasforma integralmente in potenza meccanica

$$e_a i_a = \tau \omega = k_T i_a \omega \implies e_a = k_T \omega \quad (1.4.4)$$

e quindi risulta  $k_b = k_T$ . In generale, per la presenza di possibili perdite, si avrà  $e_a i_a \geq \tau \omega$  e quindi  $k_b \geq k_T$ .

Lo schema circuitale del motore cc è illustrato in fig. 1.13(b). Applicando la legge di Kirchhoff delle tensioni al circuito di armatura, si ottiene l'equazione differenziale

$$v_a - L_a \frac{di_a}{dt} - R_a i_a - e_a = 0. \quad (1.4.5)$$

Applicando la legge di Newton per i corpi rigidi in rotazione alla parte meccanica del motore, si determina il legame fra la coppia  $\tau$  e le variabili di moto (posizione angolare  $\theta$  e velocità angolare  $\omega$ ) del rotore

$$\begin{cases} J\dot{\omega} = \tau - \tau_r - \beta\omega \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.4.6)$$

dove:  $\beta$  (coefficiente di attrito viscoso) e  $J$  (momento di inerzia) sono i parametri meccanici del motore;  $\beta\omega(t)$  e  $\tau_r(t)$  sono coppie resistenti dovute rispettivamente all'attrito volvente, ipotizzato di tipo viscoso, ed al carico meccanico del motore. Si noti che quest'ultima rappresenta un ingresso non manipolabile, a differenza dell'altro ingresso  $v_a$ , e quindi può essere interpretata come un disturbo. Combinando (1.4.5)-(1.4.6) e utilizzando le relazioni (1.4.1) e (1.4.3), si ottiene il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} = -R_a i_a - k_b \omega + v_a \\ J\dot{\omega} = k_T i_a - \beta\omega - \tau_r \\ \dot{\theta} = \omega \end{cases} \quad (1.4.7)$$

Le equazioni (1.4.7) descrivono completamente il sistema. Le costanti  $k_b$ ,  $k_T$ ,  $J$ ,  $\beta$  sono caratteristiche del motore e possono essere dedotte dalla documentazione tecnica (*Data Sheet*) oppure ricavate da misurazioni sperimentali. Per rappresentare le equazioni (1.4.7) sotto forma di modello di stato, occorre scegliere le variabili di stato. Seguendo le indicazioni generali riguardanti la scelta delle variabili di stato nei sistemi elettrici ed in quelli meccanici, riportate nei precedenti due paragrafi, si possono scegliere:

- la corrente di armatura  $i_a$  per la parte elettrica;
- posizione e velocità angolare,  $\theta$  e  $\omega$ , per la parte meccanica.

Gli ingressi sono: l'ingresso manipolabile  $v_a$  (tensione di armatura) ed il disturbo  $\tau_r$  (coppia resistente dovuta al carico meccanico). Infine l'uscita di interesse è, per esempio, la posizione angolare  $\theta$  oppure la velocità angolare  $\omega$  a seconda che l'obiettivo sia il *controllo di posizione* o il *controllo di velocità*. Quindi, si definiscono

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix}, \quad u = v_a, \quad d = \tau_r \quad (1.4.8)$$

Utilizzando le equazioni differenziali (1.4.7), dividendo le equazioni per i fattori che moltiplicano le derivate a sinistra ( $J$  e  $L_a$ ), e infine effettuando la sostituzione con le variabili di stato si ottiene

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -k_b/L_a & 0 \\ k_T/J & -\beta/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/J \\ 0 \end{bmatrix} d \quad (1.4.9)$$

$$\begin{aligned} y &= [0, 1, 0] x && \text{controllo di velocità} \\ y &= [0, 0, 1] x && \text{controllo di posizione} \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Alternativamente, in termini di rappresentazione ingresso-uscita, il modello del motore cc può essere espresso nella forma

$$Y(s) = G_u(s)U(s) + G_d(s)D(s) \quad (1.4.11)$$

dove  $G_u(s)$  è la funzione di trasferimento dall'ingresso di controllo  $u$  (tensione di armatura) e  $G_d(s)$  la funzione di trasferimento dall'ingresso di disturbo  $d$  (coppia resistente  $\tau_r$ ). Adesso si procede alla determinazione della funzione di trasferimento sfruttando le equazioni (1.4.7). È possibile calcolare la funzione di trasferimento applicando direttamente la trasformata di Laplace alle equazioni (1.4.7) (considerando condizioni iniziali nulle) e le definizioni (1.4.8)

$$\begin{aligned} L_a s X_1 &= -R_a X_1 - k_b X_2 + U \\ J s X_2 &= k_T X_1 - \beta X_2 - D \\ s X_3 &= X_2 \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

Per determinare la funzione di trasferimento da  $U = V_a(s)$  ad  $Y = \Omega(s)$  si applica il principio di sovrapposizione degli effetti imponendo  $D(s) = 0$ . Dalla seconda equazione di (1.4.12) si ottiene

$$X_2 = \frac{k_T}{J s + \beta} X_1 \quad (1.4.13)$$

e sostituendo  $X_2$  nella prima si ricava

$$X_1 = \frac{J s + \beta}{(L_a s + R_a)(J s + \beta) + k_b k_T} U \quad (1.4.14)$$

da cui, riutilizzando la (1.4.13), si ha

$$X_2 = \frac{k_T}{(L_a s + R_a)(J s + \beta) + k_b k_T} U \quad (1.4.15)$$

Analogamente si ricava la funzione di trasferimento da  $D$  ad  $Y = \Omega(s)$  imponendo  $U = V_a(s) = 0$ ; si ha

$$X_2 = -\frac{L_a s + R_a}{(L_a s + R_a)(J s + \beta) + k_b k_T} D \quad (1.4.16)$$

Pertanto le due funzioni di trasferimento in (1.4.11) risultano:

$$\begin{aligned} G_u(s) &= \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{\frac{k_T}{J L_a}}{\left(s + \frac{\beta}{J}\right) \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{k_b k_T}{J L_a}} \\ G_d(s) &= \frac{X_2(s)}{D(s)} = -\frac{\frac{1}{J} \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)}{\left(s + \frac{\beta}{J}\right) \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{k_b k_T}{J L_a}} \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

Si noti come la matrice di transizione dello stato  $A$  in (1.4.9) abbia polinomio caratteristico:

$$a(s) = s \left[ \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) \left(s + \frac{\beta}{J}\right) + \frac{k_b k_T}{J L_a} \right]$$

per cui nelle funzioni di trasferimento relative all'uscita  $y = \omega$  si è verificata la cancellazione dell'autovalore in  $s = 0$ . Questo è dovuto al fatto che il legame fra velocità angolare ed ingresso non è influenzato dalla posizione angolare  $\theta$ . Viceversa se si considera come uscita la posizione angolare,  $y = \theta$ , poiché  $\Theta = \frac{1}{s}\Omega$ , le funzioni di trasferimento risultano

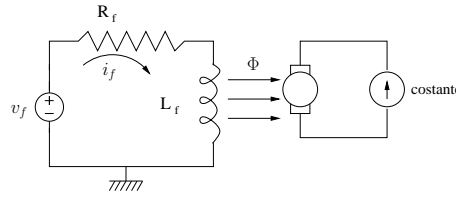
$$\begin{aligned} \frac{X_3(s)}{U(s)} &= \frac{\frac{k_T}{J L_a}}{s \left[ \left(s + \frac{\beta}{J}\right) \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{k_b k_T}{J L_a} \right]} \\ \frac{X_3(s)}{D(s)} &= -\frac{\frac{1}{J} \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right)}{s \left[ \left(s + \frac{\beta}{J}\right) \left(s + \frac{R_a}{L_a}\right) + \frac{k_b k_T}{J L_a} \right]} \end{aligned} \quad (1.4.18)$$

## Controllo di campo

Per il controllo di campo si fissa la corrente di armatura  $i_a(t)$  ad un valore costante per ogni istante temporale e si agisce sul flusso  $\phi(t)$  variando la corrente  $i_f$  nel circuito di campo (figura 1.14). Pertanto in questo caso si deve considerare l'equazione di equilibrio elettrico del circuito di campo e la coppia fornita al motore sarà proporzionale alla corrente di campo, cioè

$$\tau = k_f i_f \quad (1.4.19)$$

Le equazioni di equilibrio elettrico e meccanico forniscono:



**Figura 1.14** - Schema di un motore a controllo di campo

$$\begin{aligned} L_f \frac{di_f}{dt} &= v_f - R_f i_f \\ J \frac{d\omega}{dt} &= k_f i_f - \beta \omega - \tau_r \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Si procede al calcolo delle funzioni di trasferimento tra  $y = \omega$  e gli ingressi  $d = \tau_r$  e  $u = v_f$  applicando direttamente la trasformata di Laplace alle equazioni (1.4.20) e considerando condizioni iniziali nulle. Per ricavare la funzione di trasferimento da  $u$  ad  $y$  si applica il principio di sovrapposizione degli effetti e si considera  $d = 0$ . Dalla seconda equazione si ottiene

$$Y = \Omega = \frac{k_f}{Js + \beta} I_f \quad (1.4.21)$$

Ricavando  $I_f$  in funzione di  $U$  dalla prima e sostituendolo in (1.4.21) si ottiene la prima funzione di trasferimento

$$Y = \frac{k_f}{(Js + \beta)(L_f s + R_f)} U \quad (1.4.22)$$

Analogamente si procede per ricavare la funzione di trasferimento da  $d$  a  $y$

$$Y = -\frac{1}{Js + \beta} D \quad (1.4.23)$$

L'uscita totale per il principio di sovrapposizione degli effetti sarà data dalla somma dei contributi in (1.4.22) e (1.4.23)

$$Y = \frac{\frac{k_f}{JL_f}}{\left(s + \frac{\beta}{J}\right)\left(s + \frac{R_f}{L_f}\right)} U - \frac{\frac{1}{J}}{s + \frac{\beta}{J}} D \quad (1.4.24)$$

## 1.5 Sistemi termici

Lo studio dei sistemi termici fa riferimento alla descrizione di variazioni di temperatura in ambienti complessi sulla base di trasferimenti di calore da un

corpo ad un altro. I modelli di tali sistemi si basano sulle leggi della termodinamica e del trasferimento di calore e, in generale, sono descritti da equazioni differenziali alle derivate parziali. Solo nella situazione in cui la temperatura possa essere considerata spazialmente costante il sistema viene rappresentato da equazioni differenziali ordinarie (modello a parametri concentrati). Tale approssimazione risulta applicabile nel caso in cui si stiano modellando sistemi di piccole dimensioni e/o fluidi perfettamente mescolati. Di seguito si assumerà tale ipotesi verificata in modo che si possano modellizzare i sistemi termici utilizzando i seguenti due componenti

- *Capacità termica* - La capacità termica descrive la capacità di un oggetto di immagazzinare calore ed è definita dal prodotto tra la massa  $M$  del corpo ed il suo calore specifico  $c_s$

$$C = Mc_s \quad (1.5.1)$$

Il calore specifico caratterizza le proprietà termiche del corpo e viene determinato sperimentalmente. La capacità termica mette in relazione la variazione di temperatura con la quantità di calore immagazzinato. Più precisamente, il calore immagazzinato da un corpo di capacità termica  $C$  a fronte di una variazione di temperatura di tale corpo da  $T_1$  a  $T_2$  è dato da  $Q = C(T_2 - T_1)$ . Applicando il principio di conservazione dell'energia per una trasformazione isocora (a volume costante) si ha

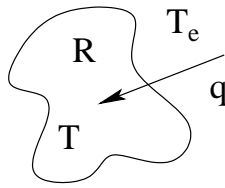
$$q = \dot{Q} = C\dot{T} = \dot{U} \quad (1.5.2)$$

dove  $q$  è la portata di calore o potenza termica e  $U$  è l'energia interna.

- *Resistenza termica* - La resistenza termica (figura 1.15) descrive la velocità con cui il calore si trasmette tra due corpi a temperatura diversa; la portata di calore fornita da un corpo a temperatura  $T$  da un corpo a temperatura  $T_e$  risulta:

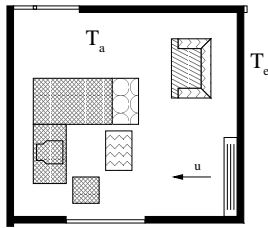
$$q = \frac{1}{R}(T_e - T) \quad (1.5.3)$$

In conclusione per scrivere le equazioni della dinamica dei sistemi termici è sufficiente utilizzare il principio di conservazione dell'energia il quale afferma che il calore fornito al sistema è uguale al calore immagazzinato più quello sottratto. Una scelta canonica delle variabili di stato, per un sistema termico, è costituita dalle temperature in gioco nel sistema in esame, poiché attraverso di esse si può esprimere l'energia interna del sistema. Anche per i sistemi termici è possibile stabilire un'analogia con i circuiti elettrici considerando la temperatura analoga alla tensione e la portata di calore analoga alla corrente (vedi tabella 1.4).



$q$ : Potenza termica scambiata  
 $\Delta T = T_e - T$ : Variazione di temperatura  
 $R$ : Resistenza termica

**Figura 1.15** - Il calore scambiato è proporzionale alla differenza di temperatura fra due corpi



$u$  = Potenza elettrica dissipata  
 $R_{ae}$  : Resistenza termica verso l'esterno  
 $R_{ra}$  : Resistenza termica verso l'ambiente  
 $C_a$  : Capacità termica dell'ambiente  
 $C_r$  : Capacità termica del radiatore  
 $T_a$  : Temperatura dell'ambiente da riscaldare  
 $T_r$  : Temperatura del radiatore  
 $T_e$  : Temperatura esterna

**Figura 1.16** - Esempio di sistema termico

**Esempio 1.10** - Si consideri il sistema termico di figura 1.16 dove un'ambiente è riscaldato tramite un radiatore elettrico che dissipa una potenza elettrica  $u$ . La capacità termica di tale radiatore è  $C_r$  e la sua resistenza termica verso l'ambiente  $R_{ra}$ . Si assuma che l'ambiente ha una capacità termica  $C_a$  e una resistenza termica verso l'esterno  $R_{ae}$ . Determinare un modello che descriva la dinamica della differenza di temperatura fra ambiente ed esterno,  $y$ , in funzione della potenza termica,  $u$ , fornita al radiatore.

Le equazioni che descrivono la dinamica del sistema si ottengono applicando il principio di conservazione dell'energia e prendendo in considerazione le interazioni tra radiatore-ambiente e ambiente-esterno

$$\begin{cases} C_a \dot{T}_a = -\frac{T_a - T_r}{R_{ra}} - \frac{T_a - T_e}{R_{ae}} \\ C_r \dot{T}_r = -\frac{T_r - T_a}{R_{ra}} + u \\ y = T_a - T_e \end{cases} \quad (1.5.4)$$

Scegliendo le temperature dell'ambiente e del radiatore come variabili di stato ( $x_1 = T_a$ ,  $x_2 = T_r$ ) e considerando  $d = T_e$ , si giunge alla seguente rappresen-



tazione di stato

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{R_{ra} + R_{ae}}{C_a R_{ra} R_{ae}} & \frac{1}{C_a R_{ra}} \\ \frac{1}{C_r R_{ra}} & -\frac{1}{C_r R_{ra}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_a R_{ae}} \\ \frac{1}{C_r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \\ y &= [1, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0, -1] \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

La rappresentazione ingresso-uscita  $Y(s) = G_u(s)U(s) + G_d(s)D(s)$  può essere determinata applicando l'operatore di Laplace alle equazioni (1.5.5) e procedendo per sostituzioni successive; in questo modo si ottiene

$$G(s) = [G_u(s), G_d(s)] = \frac{[R_{ae}C_r, -R_{ae}s(R_{ra}C_aC_rs + C_a + C_r)]}{R_{ra}R_{ae}C_aC_rs^2 + (R_{ae}C_a + C_rR_{ra} + R_{ae}C_r)s + 1} \quad (1.5.6)$$

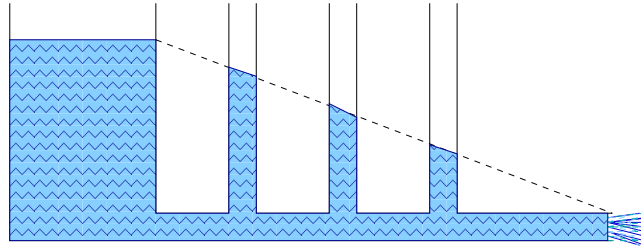
## 1.6 Sistemi idraulici

Lo studio dei fluidi in movimento è, in generale, assai complicato sia dal punto di vista fisico che matematico. Nei sistemi trattati in questo paragrafo si considerano fluidi incomprimibili e in condizioni di moto stazionario irrotazionale cioè laminare. Il moto di un liquido viene detto laminare quando in ogni punto del liquido la velocità si mantiene costantemente parallela ad una direzione fissa e i diversi strati adiacenti si muovono senza mescolarsi. Di seguito si analizzeranno sistemi fluidi che comprendono serbatoi e cisterne collegati tramite tubi, raccordi e valvole. Tutti questi elementi possono essere descritti in prima approssimazione utilizzando i seguenti elementi costitutivi: la resistenza idraulica, la capacità idraulica e l'inertanza. Le equazioni della dinamica che descrivono il comportamento dei sistemi idraulici si ricavano applicando il principio di conservazione della massa.

Prima di procedere nella descrizione degli elementi costitutivi sopra elencati è utile richiamare il teorema di Bernoulli che lega tra di loro la velocità, la pressione e la quota nei punti di una linea di flusso di un fluido incomprimibile, non viscoso ed in moto laminare, mediante la relazione:

$$\frac{p}{\rho g} + h + \frac{v^2}{2g} = \text{costante} \quad (1.6.1)$$

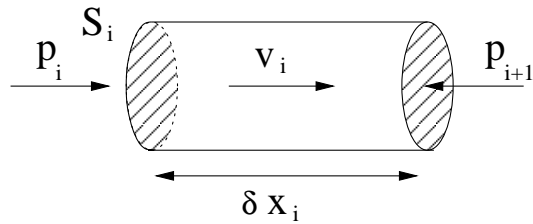
dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $g$  l'accelerazione di gravità,  $p$  la pressione,  $h$  la quota e  $v$  la velocità. Tale relazione si ottiene tramite un bilancio di energia e ci dice che, in condizioni di regime, la somma della pressione, dell'energia



**Figura 1.17** - Sistema idraulico con vasi comunicanti

potenziale per unità di volume e dell'energia cinetica per unità di volume è costante in tutti i punti di un tubo di flusso. La quantità  $\frac{p}{\rho g}$  ha le dimensioni di una lunghezza e viene chiamata altezza piezometrica: essa rappresenta l'altezza che deve avere una colonna del fluido in questione per esercitare alla base la pressione  $p$ . La quantità  $\frac{v^2}{2g}$  viene chiamata altezza cinetica e rappresenta la quota massima raggiunta da un corpo lanciato verticalmente verso l'alto con velocità di modulo  $v$ . Si ricordi che le conclusioni di Bernoulli vanno modificate con alcune correzioni empiriche nel caso di presenza di consistenti fenomeni viscosi che si riscontrano in fluidi in moto entro tubi di sezioni abbastanza piccole. Infatti in tali situazioni parte dell'energia viene dissipata in calore. I sistemi idraulici considerati sono dunque costituiti dai seguenti tre componenti elementari

- *Resistenza idraulica* - Un liquido reale può considerarsi incomprimibile con buona approssimazione, ma presenta una certa viscosità cioè delle forze di attrito interno che possono avere effetti notevoli sul moto. Infatti si consideri un liquido in moto in condizioni di regime lungo un tubo cilindrico orizzontale: se il liquido fosse perfetto la pressione avrebbe lo stesso valore in tutte le sezioni, invece nel caso di un liquido reale vi è sempre una differenza di pressione, chiamata *perdita di carico* come si può verificare facilmente eseguendo un esperimento con il sistema riprodotto in figura 1.17 dove nei vasi comunicanti del dispositivo considerato il liquido non raggiunge la stessa quota perché nel liquido reale che scorre nel condotto orizzontale si verifica una perdita di carico. Nel caso di condizioni di moto laminare di un fluido all'interno di un tubo cilindrico di raggio  $r$  si osserva che il fluido a contatto della parete aderisce a questa e rimane praticamente in quiete, mentre la velocità aumenta spostandoci dalla periferia verso l'asse del cilindro dove la velocità è massima. Applicando le leggi di Newton, nel caso il fluido scorra all'interno di un tubo



$S_i$ : sezione della condotta  
 $\delta x_i$ : lunghezza del tratto della condotta  
 $m_i = \rho S_i \delta x_i$ : massa del liquido  
 $v_i = q/S_i$ : velocità del fluido nella condotta

**Figura 1.18** - Schematizzazione di un tratto di condotta

a sezione circolare di raggio  $r$  piccolo, in condizioni di regime si ottiene la legge di Poiseuille

$$q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\beta \ell} \quad (1.6.2)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di viscosità del fluido,  $\ell$  è la lunghezza della condotta,  $q$  è la portata volumetrica e  $\Delta p$  è la differenza di pressione agli estremi del tubo. Per cui si ha una relazione di proporzionalità diretta tra  $\Delta p$  e  $q$ , cioè

$$q = \frac{\Delta p}{R} \quad (1.6.3)$$

dove  $R$  viene detta resistenza idraulica e la sua dimensione per il sistema MKS è  $[R] = \frac{Kg}{s m^4}$ .

- *Inerzia idraulica (inerzia)* - Quando un fluido scorre all'interno di condotte lunghe e di sezione piccola si osservano fenomeni di inerzia delle masse liquide in movimento. Se si varia la differenza di pressione ai capi della condotta, questa non si ripercuote in un'istantanea variazione di flusso. Questo fenomeno può essere modellato andando a scrivere le equazioni di equilibrio dinamico del tratto di condotta schematizzato in figura 1.18

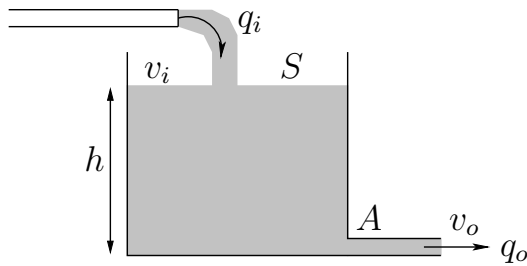
$$m_i \dot{v}_i = S_i (p_i - p_{i+1}) \quad (1.6.4)$$

In questo caso si noti come la relazione di proporzionalità sia tra la differenza di pressione applicata agli estremi della condotta e la derivata della portata

$$(p_i - p_{i+1}) = \frac{m_i}{S_i^2} \dot{q} = \frac{\rho \delta x_i}{S_i} \dot{q} = L \dot{q} \quad (1.6.5)$$

$L$  è la costante di proporzionalità e viene detta inerzia. La sua dimensione secondo il sistema MKS è  $[L] = \frac{Kg}{m^4}$ .

- *Capacità idraulica* - Un serbatoio idraulico immagazzina un volume di fluido al suo interno dato dall'integrale nel tempo della portata di liquido



$S$ : sezione trasversale del serbatoio  
 $h$ : altezza del livello del liquido  
 $q_i$ : portata in ingresso al serbatoio  
 $q_o$ : portata in uscita al serbatoio  
 $h$ : altezza del liquido nel serbatoio  
 $A$ : sezione dell'uscita dal serbatoio  
 $v_1$ : velocità del fluido sulla superficie  
 $v_2$ : velocità del fluido in uscita dal serbatoio

**Figura 1.19** - Schema di un serbatoio

in ingresso. Essenzialmente si tratta di scrivere la legge di conservazione della massa. Si consideri ad esempio il serbatoio di figura 1.19 in cui il liquido sia omogeneo e incomprimibile. La legge di conservazione della massa fornisce

$$S\Delta h = q_i\Delta t - q_o\Delta t \quad (1.6.6)$$

dove  $\Delta h$  è la variazione di livello del liquido nell'intervallo temporale  $\Delta t$ . Differenziando l'equazione (1.6.6) rispetto al tempo si ottiene

$$S\dot{h} = q_i - q_o \quad (1.6.7)$$

L'equazione (1.6.7) può essere espressa anche in termini della pressione presente sul fondo del serbatoio. Infatti, dall'equazione di Bernoulli, considerando le velocità sul pelo dell'acqua e sul fondo del serbatoio praticamente nulle, si ha

$$p = \rho gh \quad (1.6.8)$$

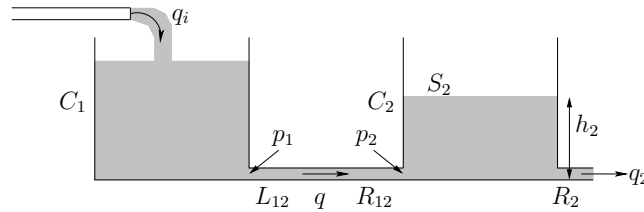
Differenziando rispetto al tempo l'equazione (1.6.8) si ottiene

$$\dot{p} = \rho g\dot{h} \quad (1.6.9)$$

Quindi l'equazione (1.6.7) può essere riscritta in funzione della pressione

$$\frac{S}{\rho g}\dot{p} = q_i - q_o \quad (1.6.10)$$

La costante di proporzionalità  $C = \frac{S}{\rho g}$  viene chiamata capacità idraulica. Quindi la capacità idraulica  $C$  correla il fronte di pressione  $p$  sviluppatosi alla base del serbatoio con la portata netta  $q$  del flusso nel serbatoio tramite l'equazione  $q = C\dot{p}$ .



**Figura 1.20** - Sistema idraulico

Una scelta canonica delle variabili di stato, per un sistema idraulico, è quella che considera le pressioni nei vari serbatoi e le portate nelle condotte con inertanze, poiché queste sono le variabili utilizzate per esprimere l'energia del sistema. Si noti che in alternativa si possono scegliere i livelli  $h_i$  nei serbatoi al posto delle pressioni  $p_i$  essendo queste proporzionali fra loro secondo la relazione  $h_i = \frac{1}{\rho g} p_i = \frac{C_i}{S_i} p_i$  dove  $C_i$  è la capacità idraulica del serbatoio e  $S_i$  l'area della sezione trasversale del serbatoio.

**Esempio 1.11** - Si consideri il sistema idraulico in figura 1.20

- a) Determinare le equazioni di stato del sistema ( $x_1 = p_1$ ,  $x_2 = p_2$ ,  $x_3 = q$ ) considerando che  $L_f$  è l'inertanza,  $C_i$  sono le capacità idrauliche,  $R_i$  le resistenze idrauliche,  $p_i$  è la pressione alla sezione  $i$ -esima e  $q$  è la portata all'interno della condotta.
- b) Si determini la funzione di trasferimento del sistema da  $u = q_i$  a  $y = h_2$ .

Il modello matematico richiesto si deriva mediante l'applicazione delle condizioni di equilibrio dinamico ai vari componenti che costituiscono il sistema

$$\begin{cases} C_1 \dot{p}_1 = q_i - q \\ C_2 \dot{p}_2 = q - q_2 = q - \frac{p_2}{R_2} \\ L_{12} \dot{q} = -R_{12} q + p_1 - p_2 \\ y = h_2 = \frac{C_2}{A_2} p_2 \end{cases} \quad (1.6.11)$$

Dalle equazioni (1.6.11) si ottiene immediatamente la seguente rappresentazione di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L_{12}} & -\frac{1}{L_{12}} & -\frac{1}{L_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.6.12)$$

$$y = [0, \frac{C_2}{A_2}, 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]u$$

Procedendo in modo analogo agli esempi precedenti si ricava la seguente funzione di trasferimento

$$G = \frac{\frac{R_2 C_2}{A_2}}{L_f C_1 R_2 C_2 s^3 + (R_1 C_1 R_2 C_2 + L_f C_1) s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + 1} \quad (1.6.13)$$

Si osservi come sia possibile stabilire una analogia tra sistemi idraulici e circuiti elettrici considerando ogni portata analoga ad una corrente e ogni pressione analoga ad una tensione (vedi tabella 1.4).

Infine, tramite l'esempio di un semplice sistema idraulico, si considera il caso in cui vengono rimosse alcune ipotesi semplificative.

**Esempio 1.12** - *Si consideri il sistema idraulico di figura 1.19 e si scriva l'equazione della dinamica del livello del serbatoio assumendo che il liquido al suo interno sia incomprimibile.*

Sotto le ipotesi di omogeneità e incompressibilità del fluido è possibile utilizzare la legge di conservazione della massa (1.6.7). Questa equazione dipende da  $q_o$  che non è né una variabile di stato né un ingresso, per cui si deve esplicitare l'espressione di questa quantità in termini di  $h$ . Se si ipotizza di essere nelle condizioni di applicabilità del teorema di Bernoulli è possibile utilizzare le equazioni (1.6.1) scegliendo come prima superficie quella del pelo dell'acqua nel serbatoio e come seconda quella alla sua uscita. Assumendo  $p_1 = p_2$  e la velocità  $v_1$  sul pelo libero dell'acqua nulla, si ottiene la seguente relazione

$$h + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} \quad (1.6.14)$$

da cui si ricava  $v_2 = \sqrt{2gh}$  e quindi, tenendo conto della relazione  $q_o = Av_2$  fra portata e velocità,  $q_o = A\sqrt{2gh}$ . Sostituendo in (1.6.7) l'espressione di  $q_o$

trovata, si ottiene il modello del serbatoio:

$$\dot{h} = -\frac{A}{S}\sqrt{2gh} + \frac{q_i}{S} \quad (1.6.15)$$

Tale modello, del primo ordine, è non lineare e risulta facilmente integrabile nel caso in cui la portata  $q_i$  sia costante. Se le variabili del sistema distano di poco da una condizione di equilibrio (come si vedrà in dettaglio nei prossimi capitoli), definendo la portata  $q_{ie}$  di riferimento, il livello di equilibrio  $h_e$  corrispondente e le variazioni

$$\begin{aligned} \Delta q(t) &= q_i(t) - q_{ie} \\ \Delta h(t) &= h(t) - h_e \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

si può linearizzare il modello nell'intorno dell'equilibrio. Infatti, approssimando l'equazione differenziale del primo ordine in un intorno di  $q_{ie}$  e  $h_e$ , si ottiene il seguente modello linearizzato

$$\dot{\Delta h} = -\frac{A}{S}\sqrt{\frac{g}{2h_e}}\Delta h + \frac{\Delta q_i}{S} \quad (1.6.17)$$

Se la portata in ingresso  $q_i$  raggiunge il serbatoio dopo aver attraversato una condotta piuttosto lunga, il ritardo con cui l'acqua giunge al serbatoio non può essere assolutamente trascurato. Tale fenomeno può essere modellato in modo semplice. Si supponga che la lunghezza della condotta sia  $L$  e che l'area della sezione sia  $A_i$ . Allora il ritardo di trasporto con cui l'acqua arriva al serbatoio è  $T = A_i L / q_i$  e si ottiene così il seguente modello con ritardo

$$\dot{h}(t) = -\frac{A}{S}\sqrt{2gh(t)} + \frac{1}{S}q_u(t - T) \quad (1.6.18)$$

■

## 1.7 Conclusioni

In questo capitolo sono stati esposti i concetti fondamentali per la determinazione di semplici modelli matematici di sistemi elettrici, meccanici, idraulici e termici. In particolare, tramite l'utilizzo delle leggi fondamentali della fisica si è mostrato come sia possibile ricavare un modello di stato del sistema descritto mediante equazioni differenziali, lineari, a parametri concentrati. Da tale modello infine si è visto come determinare una descrizione ingresso-uscita del sistema calcolando la corrispondente funzione di trasferimento. Le tecniche utilizzate sono state illustrate tramite un'ampia casistica di elementi di base che si incontrano comunemente nei sistemi di controllo. Si è inoltre voluto evidenziare come esistano analogie fra modelli elettrici, meccanici, idraulici e

Elemento	Elettrico	Meccanico	Termico	Idraulico
Energia dissipata	Resistore $i = \frac{1}{R}v$	Smorzatore $f = \beta v$	Conduttore Termico $q = \frac{1}{R}\Delta T$	resistenza idraulica $q = \frac{1}{R}p$
Energia Immagazzinata	Condensatore $i = C\dot{v}$	Massa $f = M\dot{v}$	Condensatore termico $q = C\dot{T}$	Capacità idraulica $q = C\dot{p}$
	Induttore $i = \frac{1}{L} \int v dt$	Molla $f = K \int v dt$	Non esiste equivalente	Inertanza $q = \frac{1}{L} \int p dt$
	i=corrente  v=tensione R=resistenza  C=capacità  L=induttanza	f=forza  v=velocità $\beta$ =coeff. di attrito M=Massa  K=rigidezza molla	q=portata di calore T=temperatura R=resistenza termica C=capacità termica	q=portata  p=pressione R=resistenza idraulica C=capacità idraulica L=inertanza

**Tabella 1.4** - Analogie degli altri sistemi con i circuiti elettrici



termici che di fatto consentono di ricondurli l'uno all'altro. Infine, sempre attraverso alcuni esempi, si è mostrato come la presenza di componenti più complessi e/o la rimozione di alcune ipotesi semplificative conduca a modelli non lineari.