Fondamenti di AUTOMATICA

13-11-2013

Esercizio 1

$\dot{x}_1 = x_2$ $\qquad\qquad$ $x_{10} = 0$

$\dot{x}_2 = -10x_1 - 11x_2 + u$ $\qquad\qquad$ $x_{20} = 0$

$y = x_1 - x_2$

1- Calcolare la funzione di trasferimento (FdT)
2- Tracciare l'andamento qualitativo della risposta allo scalino.

Per calcolare la FdT applico il teorema di Laplace direttamente all'equazione di stato.

$sx_1 = x_2$ $\qquad\qquad$ $s^2x_1 = -10x_1 - 11sx_1 + u$

$sx_2 = -10x_1 - 11x_2 + u$ $\qquad\qquad$ $(s^2 + 11s + 10)x_1 = u$

$y = x_1 - x_2$ $\qquad\qquad$ $y = x_1(1 - s)$

$$\boxed{\boldsymbol{G(s) = \frac{y}{u} = \frac{1 - s}{s^2 + 11s + 10}}}$$

$Re(\lambda_{12}) < 0$ per Cartesio (tutti i coefficienti del denominatore hanno stesso segno) → sistema asintoticamente stabile.

Esiste uno Zero in $z = +1$ → non comporta problemi di stabilità. **Sistema a FASE NON MINIMA**.

Per tracciare qualitativamente la risposta allo scalino occorrono i seguenti valori:

- $y(0) \rightarrow \mathbf{T.V.I.}$ verifichiamo le ipotesi $\begin{cases} \text{grado relativo } r > 1 \\ G(s) \text{ reazionale} \rightarrow \frac{N(s)}{D(s)} \end{cases} \rightarrow y(0) = \lim_{s\to\infty} sG(s)\cdot\frac{1}{s} = 0$
- $y(\infty) \rightarrow T.V.F.$ ipotesi verificate prima, ve ne è una terza? → $y(\infty) = \lim_{s\to 0} sG(s)\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{10}$
- $\dot{y}(0)$ → la derivata nell'orgine serve per la pendenza dell'uscita.

$$\boxed{L[\dot{y}(t)] = sy(s) - y(0) = sy(s) = \frac{s(1-s)}{s^2 + 11s + 10}}$$

$$\boxed{\begin{gathered} Y(s) = G(s)\cdot U(s) \\ \dot{Y} = sY(s) = G(s)\cdot s\cdot U(s) \end{gathered}}$$

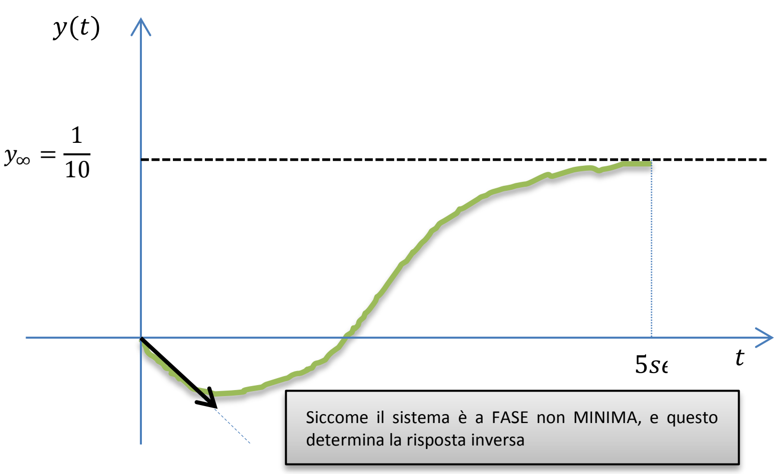
$\dot{y}(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot s\cdot G(s)\cdot\frac{1}{s} = s\cdot G(s) = -1$

- Tempo di assestamento →$\boldsymbol{T_{ass}} = \frac{5}{|Re(\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{dominante}})|}$

  $\lambda_{\text{dominante}}$ è il **polo dominante**[1]:
  quello più vicino all'asse immaginario.

  $\lambda_{12} = \frac{-11\pm\sqrt{11^2-40}}{2} = \begin{cases} \mathbf{-1} \\ -10 \end{cases}$

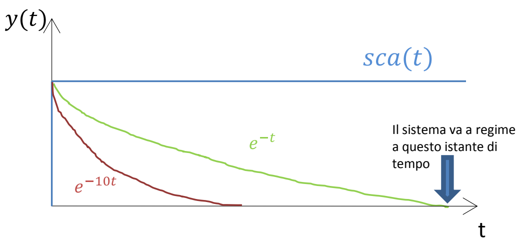
  Ricaviamo $T_{ass} = \frac{5}{|-1|} = 5\ sec.$



Es. $G(s) = \frac{1}{(s+10)(s+1)}$

$Y(s) = \frac{1}{s+10} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s} = \frac{A}{s+10} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s}$

$y(t) = Ae^{-10t} + Be^{-t} + sca(t)$



Esercizio 2 – Poli dominanti complessi coniugati

$$G(s) = \frac{100(s^2 + 6.75s + 20.25)}{(s^2 + 0.8s + 4)(s^2 + 8s + 25)(s + 10)}$$

Calcolare la <u>risposta allo scalino</u> (andamento analitico di $y(t) = \cdots$)

Bisogna ricondursi alla forma $\boldsymbol{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

Zeri:

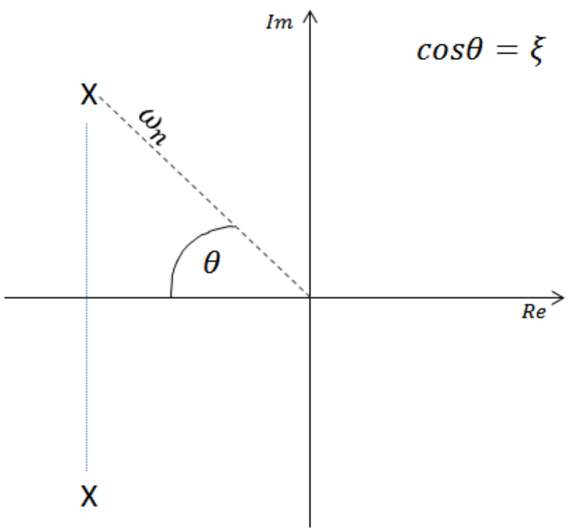
- $\omega_n^2 = 20.25 \to \omega_n = 4.5$
- $2\xi\omega_n = 6.75 \to \xi = \frac{6.75}{2\cdot 4.5} = 0.75 \to \ \theta = arcos(0.75) = 39°$

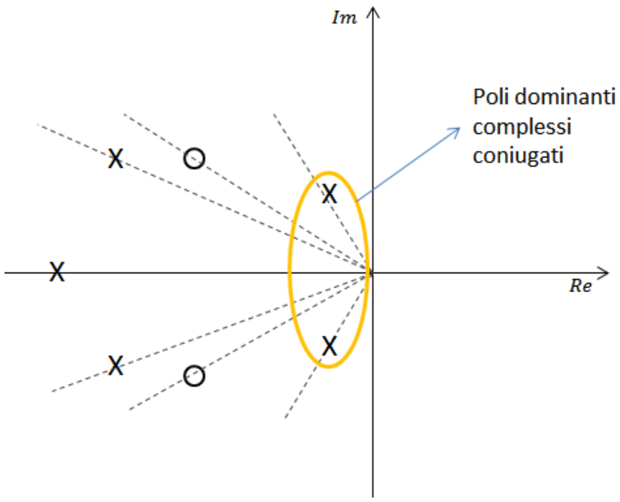
Poli:

- $\omega_n^2 = 4 \to \ \omega_n = 2$
- $2\xi\omega_n = 0.8 \to \xi = \frac{0.8}{2\cdot 2} = 0.2 \to \ \theta = arcos(0.2) = 78°$

- $\omega_n^2 = 25 \to \ \omega_n = 5$
- $2\xi\omega_n = 8 \to \xi = \frac{8}{2\cdot 5} = 0.8 \to \ \theta = arcos(0.8) = 37°$

Diagramma Poli-Zeri





Possiamo fare **l'approssimazione ai POLI DOMINANTI**.

$G_A(s) = G(s)$ con i soli poli dominanti

$G_A(s) = \frac{1}{s^2+0.8s+4}$

<u>siccome devo mantenere il **guadagno statico**, questa espressione va moltiplicata per gli altri termini noti</u>.

$$\mathbf{G_A(s) = \frac{1}{s^2+0.8s+4} \cdot \frac{100\cdot 20.25}{25\cdot 10} = \frac{8.1}{s^2+0.8s+4}}$$

Siccome devo calcolare la risposta allo scalino…

$$\boldsymbol{Y(s) = G_A(s)\cdot U(s)} = \frac{8.1}{s^2+0.8s+4}\cdot\frac{1}{s} = \frac{8.1}{s(s^2+0.8s+4)} \to \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+0.8s+4} = \frac{As^2+0.8As+4A+Bs^2+Cs}{s(s^2+0.8s+4)}$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 0.8A + C = 0 \\ 4A = 8.1 \end{cases} \to \begin{cases} A = 2.025 \\ B = -2.025 \\ C = -1.62 \end{cases}$$

Forma che conosciamo

Possiamo ora riscrivere Y(s) come:

$$Y(s) = \frac{2.025}{s} + \frac{-2.025s - 1.62}{s^2+0.8s+4}$$

Dobbiamo ricondurci, per il secondo termine, ad una delle due forme:

$$\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} \rightarrow e^{\sigma t}\sin(\omega t)$$

$$\frac{\boldsymbol{s-\sigma}}{\boldsymbol{(s-\sigma)^2+\omega^2}} = e^{\sigma t}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma = Re(\lambda_{cc}) \\ \omega = Im(\lambda_{cc}) \end{array}}$$

Quindi…

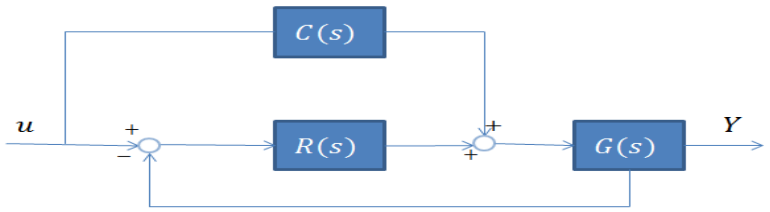
$$\lambda_{12} = \frac{0.8 \pm \sqrt{0.8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = -0.4 \pm 1.95i = \boldsymbol{\sigma \pm \omega_i}$$

$$Y(s) = \frac{2.025}{s} + \frac{-2.025 - 1.62}{(s+0.4)^2 + 1.95^2} = \frac{2.025}{s} - 2.025\frac{s+0.8}{(s+0.4)^2+3.84} =$$

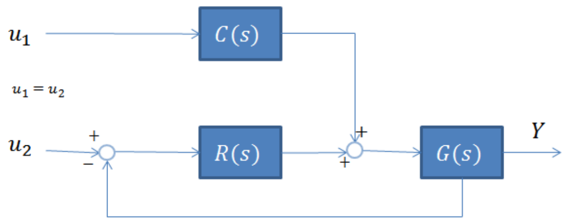
$$= \frac{2.025}{s} - 2.025\left[\frac{\boldsymbol{s+0.4}}{\boldsymbol{(s+0.4)^2+3.84}} + \frac{\boldsymbol{0.4 \cdot \frac{1.95}{0.4}}}{\boldsymbol{(s+0.4)^2+3.84}}\right] \cdot \frac{0.4}{1.95} =$$

$$\boldsymbol{y(t) = 2.025 \cdot sca(t) - 2.025 \cdot e^{-0.4t} \cdot \cos(1.95t) - 2.025 \cdot 0.4/1.95 \cdot e^{-0.4t} \cdot \sin(1.95t)}$$

Esercizio 3 - Schemi a Blocchi



Metodo 1



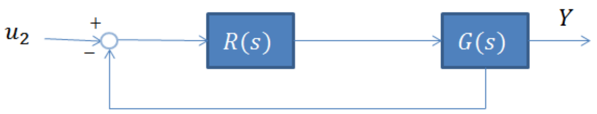
$$Y = Tyu \cdot U$$

$$Y_1 = Tyu_1 \cdot U_1$$

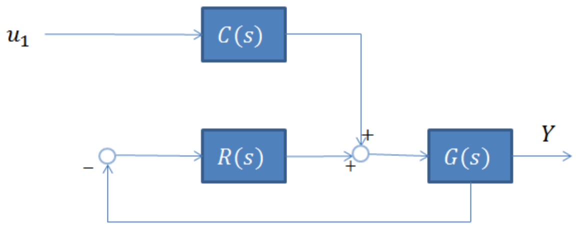
$$Y_2 = Tyu_2 \cdot U_2$$

$$Y = Y_1 + Y_2 = Tyu_1 \cdot U_1 + Tyu_2 \cdot U_2 = U(Tyu_1 + Tyu_2)$$

Posso usare la sovrapposizione degli effetti e spegnere prima u_1 e poi u_2



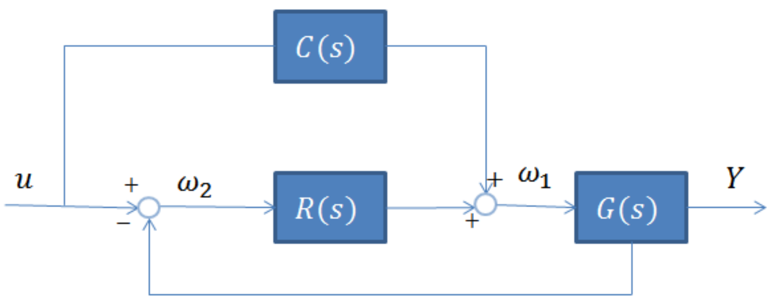
$$\boxed{Tyu_2 = \frac{R \cdot G}{1 + R \cdot G}}$$



$$\boxed{Tyu_1 = \frac{C \cdot G}{1 + R \cdot G}}$$

$$\boxed{Y = Tyu_1 + Tyu_2 \rightarrow G(s) = \frac{G(R + C)}{1 + RG}}$$

Metodo 2



$$Y = G \cdot \omega_1$$

$$\omega_1 = R \cdot \omega_2 + C \cdot u$$

$$\omega_2 = u - Y$$

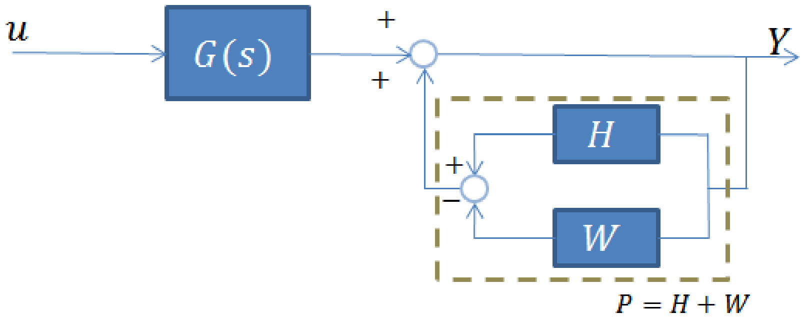
$$(1 + GR)Y = (GR + CG)u$$

$$Y = GRu - GRY + GCu$$

$$Y = GR \cdot (u - Y) + GCu$$

$$\omega_1 = R(u - Y) + Cu$$

Esercizio 4 - Schemi a Blocchi (stabilità del sistema complessivo)



$$H(s) = -\frac{1}{s+2}$$

$$W(s) = -\frac{1}{s+4}$$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + u$$

G: $\dot{x}_2 = -3x_2 + 3u$

$$y = x_2$$

$y = x_2$

$Sx_2 = -3x_2 + 3u$

$(s+3)x_2 = u$

$x_2 = \dfrac{3}{s+3}u$

$Y = \left[\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{s+3}}\right] \cdot u$

Il sistema è del secondo ordine, quindi deve avere due poli, ma nella FdT ne ha uno solo. C'è un **autovalore nascosto**.

$A = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, -2 è autovalore nascosto, non compare nella FdT.

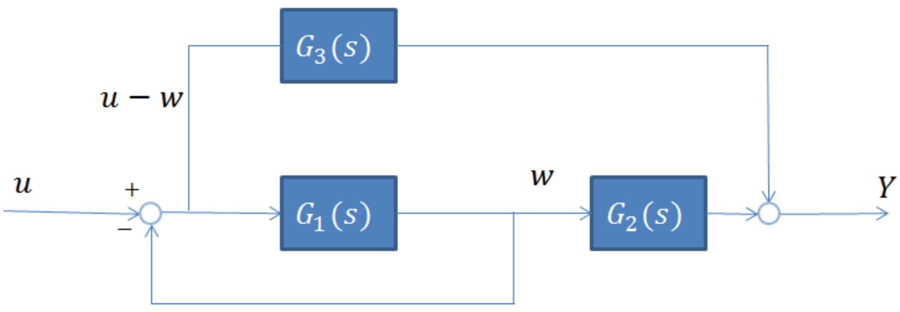
Se un autovalore nascosto ha parte reale >0 ($Re(\lambda) > 0$, determina l'INSTABILITA' del sistema.

FdT complessiva del sistema a blocchi.

$$Y = G \cdot \frac{1}{1-(H+W)} = \frac{3}{s+3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+4}} = \frac{3}{s+3} \cdot \frac{1}{\frac{(s+2)(s+4)+2s+6}{(s+2)(s+4)}} = \frac{3(s+2)(s+4)}{(\boldsymbol{s+3})[\boldsymbol{s^2+4s+14}]}$$

Siccome i coefficienti del polinomio hanno tutti lo stesso segno, sappiamo per Cartesio, che la parte reale dei poli della funzione di trasferimento complessiva, sono tutti negativi, il che determina l'asintotica stabilità del sistema complessivo.

Esercizio 5 - Schemi a Blocchi



$$G_1 = \frac{1}{s+3}$$

$$G_2 = \frac{s+4}{s+0.1}$$

$$G_3 = -\frac{1}{s+3}$$

$$u = e^{-2t} + 2$$

Calcolare la **FdT** e la risposta di regime.

$$Y = G_2 \cdot w + G_3(u - \boldsymbol{w})$$

$$w = G_1 \cdot (u - w) = G_1 U - G_1 w \rightarrow w = \frac{G_1}{1 + G_1} u$$

$$Y = G_2 \cdot \frac{G_1}{1+G_1} u + G_3 \left(u - \frac{G_1}{1+G_1} u \right) = u \cdot \left(\frac{G_2 G_1}{1+G_1} + G_3 - \frac{G_3 G_1}{1+G_1} \right) = u \cdot \left(\frac{G_2 G_1 + G_3(1+G_1) - G_3 G_1}{1+G_1} \right)$$

$$\boldsymbol{G(s)} = \frac{\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{u}} = \frac{G_2 G_1 + G_3(1+G_1) - G_3 G_1}{1+G_1} = \frac{\boldsymbol{G_2 G_1 + G_3}}{\boldsymbol{1 + G_1}}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1}{s+3} \cdot \frac{s+4}{s+0.1} - \frac{1}{s+3}}{1 + \frac{1}{s+3}} = \frac{\frac{s+4}{s+0.1} - 1}{s+3+1} = \frac{\frac{s+4-s-0.1}{s+0.1}}{s+4} = \frac{s+4-s-0.1}{(s+0.1)(s+4)} = \frac{3.9}{(s+0.1)(s+4)}$$

$$\boldsymbol{G(s)} = \frac{\boldsymbol{3.9}}{\boldsymbol{(s+0.1)(s+4)}}$$

E’ una FdT del secondo ordine, mentre il sistema originario è composto da 3 sistemi del primo ordine. E’ scomparso qualcosa.

- <u>G_2, G_3 non essendo in nessun anello hanno il polo che non cambia posizione</u>.
- G_1è l’unico blocco dentro ad un’anello e quindi può aver cambiato la posizione del suo polo, che infatti è diventato (s+4) da (s+3) che era.
- E’ scomparso il polo relativo a G_3. Quindi bisogna verificare che $Re(\lambda)_{G_3} < 0$ per la stabilità del sistema.

Per il calcolo della risposta di regime, scompongo l’ingresso nelle due componenti.

$$Y_R = Y_{R1} + Y_{R2}$$

$Y_{R1} = G \cdot l[e^{-2t}] \rightarrow G \cdot 0$[2]

$$Y_{R2} = G \cdot l[2]$$

$Y_\infty = Y_R = \boldsymbol{G(0)}$[3] $\cdot u = 9.75 \cdot 2 = 19.5$

---

[2] Infatti a regime, per $t \rightarrow \infty$, $e^{-2t} \rightarrow 0$

[3] $\boldsymbol{G(0)}$ è il guadagno statico del sistema, che si ottiene ponendo a zero il valore di S nella FdT