FONDAMENTI di AUTOMATICA

ESERCITAZIONE (7-11-13) – Ing. Stefano Botelli

NB in presenza di matrici 3x3 bisogna intuire che esiste un metodo risolutivo particolare perchè non verrà mai richiesto a lezione di ricavare il determinante di matrici di superiori a 2x2.

Esercizio 1→ **STABILITA'**: casi particolari

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 5 & -2 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

[1]La $\sum \lambda_i = \boldsymbol{tr(A)} \rightarrow \sum$valore sulla diagonale. Se $tr(A) \geq 0\ \exists i$: $Re(\lambda_i) > 0$ per cui il sistema è INSTABILE.

b) $A = \left[\begin{array}{cc:cc} \propto & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$

La matrice A è **TRIANGOLARE A BLOCCHI**[2] → $A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_i(A) = \lambda_i(A_1) \cup \lambda_i(A_4)$

$$\lambda_i(A_1) \rightarrow \begin{cases} \alpha \\ -2 \end{cases}$$

$$\lambda_i(A_4) \rightarrow \det(\lambda I - A_4) = 0 \rightarrow det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -3 \\ +2 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$
$$= (\lambda+1)(\lambda+4) - (-3)\cdot 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 4 + 6 = 0 \rightarrow \text{per Cartesio}^3 \text{ sappiamo } \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$$

Possiamo concludere che α è l'unico parametro che determina la stabilità del sistema: **se α<0 → sistema asintoticamente stabile**[4].

c) $A = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$ Autovalori → $\lambda_i \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -3 \end{cases}$

dagli autovalori non possiamo stabilire nulla sulla stabilità del sistema, infatti solamente se avessi 1 solo autovalore uguale a 0 (e gli altri minori di zero (parte reale)) il sistema sarebbe **semplicemente stabile**.
Nel caso di autovalori pari a zero in numero maggiore di uno bisogna calcolare la **molteplicità algebrica** e la **molteplicità geometrica**.
In questo particolare caso però posso ricondurmi ad una matrice triangolare a blocchi (vedi sopra).

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow e^{At} = \begin{bmatrix} e^{0t} & \alpha t e^{0t} \\ 0 & e^{0t} \end{bmatrix} \rightarrow X_L(t) = e^{At} \cdot x_0$

Se il sistema è SEMPLICEMENTE STABILE il MOVIMENTO LIBERO è FINITO. Quindi se ho qualche elemento della matrice e^{At} va a $\infty\ per\ t \rightarrow \infty$, anche $X_L(t) \rightarrow \infty$.

$\boldsymbol{\alpha t e^{0t}} \rightarrow \begin{cases} 0 \rightarrow \alpha = 0 \\ \infty \rightarrow \alpha \neq 0 \end{cases}$

- se $\boldsymbol{\alpha = 0} \rightarrow \mathbf{e^{At}} \rightarrow$ finito → sistema semplicemente stabile
- se $\boldsymbol{\alpha \neq 0} \rightarrow \mathbf{e^{At}} \rightarrow$ non finito → sistema instabile

---

[1] $tr(A)$ è la TRACCIA della matrice A: si definisce **traccia** di una matrice quadrata la somma di tutti gli elementi della sua diagonale principale.
[2] Una **matrice triangolare a blocchi** è una matrice quadrata che ha blocchi quadrati sulla diagonale e i cui blocchi sotto (o sopra) la diagonale principale contengono solo zeri
[3] Regola di CARTESIO o REGOLA dei SEGNI: se un'equazione di secondo grado, completa, ridotta a forma tipica, ha soluzioni:

- ad OGNI PERMANENZA corrisponde una SOLUZIONE NEGATIVA;
- ad OGNI VARIAZIONE corrisponde una SOLUZIONE POSITIVA.

Nel nostro caso ($\lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$) ci sono due permanenze di segno a cui corrispondono 2 soluzioni negative (in parte reale).
[4] Per il CRITERIO DEGLI AUTOVALORI.

Esercizio 2. **STABILITA'**

Dato il polinomio caratteristico: $\boldsymbol{\vartheta(\lambda) = \lambda^3 + (2+p)\lambda^2 + (1+2p)\lambda + (p+8)}$

Stabilire per quali valori di p il sistema è ASINTOTICAMENTE STABILE.

$\stackrel{def}{=}$**condizione necessaria**: tutti i coefficienti del polinomio caratteristico hanno stesso segno (per sistemi del 2° ordine la condizione è anche sufficiente).

Siccome $\boldsymbol{\lambda^3}$ ha coefficiente positivo (1), bisogna verificare che gli altri coefficienti siano tutti >0

$$\begin{cases} 2+p>0 & p>-2 \\ 1+2p>0 & p>-\frac{1}{2} \\ p+8>0 & p>-8 \end{cases}$$ condizione più stringente.

Siccome la condizione, dato il sistema di ordine 3 è solo necessaria, utilizziamo il **criterio di Routh**[5].

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+2p & \\ 2+p & p+8 & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \end{bmatrix} \quad \rightarrow \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \vdots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \vdots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \rightarrow l_i = -\frac{1}{k_1}\det\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix} = h_{1+i} - \frac{h_1 \cdot k_{i+1}}{k_1}$$

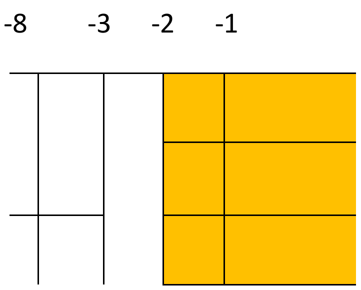
$$\alpha_1 = 1+2p - \frac{1\cdot(p+8)}{2+p} = \frac{(2+p)(1+2p)-p-8}{2+p} = \frac{2p^2+4p-6}{2+p}$$

$$\alpha_2 = 0 \rightarrow poichè\ manca\ la\ 3°\ colonna\ e\ quindi\ \det(\dots) = 0$$

$$\alpha_3 = p+8 - \frac{(2+p)\cdot 0}{\alpha_1} = p+8$$

Della tabella di Routh a noi interessa solo la prima colonna, devo verificare la presenza di 3 permanenze di segno.

Quindi bisogna verificare che $\begin{cases} 2+p>0 \\ \frac{2p^2+4p-6}{2+p} > 0 \rightarrow eq.2°grado \rightarrow p_{12} \rightarrow \begin{cases} -8 \\ -2 \end{cases} \\ p+8>0 \end{cases}$



Zona di accettabilità

$\boldsymbol{\vartheta(\lambda) = \lambda^3 + (2+p)\lambda^2}$

ASINTOTICAMENTE STABILE ↔ p>1

[5] Il **criterio di Routh-Hurwitz** in Il criterio di Routh-Hurwitz in algebra lineare determina il numero di radici a parte reale positiva e negativa di un polinomio, migliorando il criterio di Cartesio, a partire dai suoi coefficienti.

Tema d'esame 2012

Calcolare movimento dello stato e dell'uscita con $\boldsymbol{x_0 = 0, u(t) = e^{-t}, t \geq 0}$

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = -3x_2$$
$$y = x_1$$

$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ → triangolare: possiamo usare la **RISOLUZIONE IN CASCATA**.

$\dot{x}_2 = -3x_2$ applico Lagrange: → $\boldsymbol{x_2} = e^{-3t} \cdot x_{20} + \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau = \boldsymbol{0}$, t≥0

$A_2 = -3$

$B_2 = 0$

$x_{20} = 0$

$u(t) = e^{-t}$

$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2x_2 + u$

$A_1 = -2$

$B_1 = 1$ → perchè $(2x_2 + u) = w$ lo considero ingresso (coeff. = 1)

$x_{20} = 0$

$u(t) = w(t) = 2x_2 + u = u(t) = e^{-t}$ infatti $x_2 = 0$ (calcolato sopra).

applico **Lagrange**: → $\mathbf{x_1} = e^{-2t} \cdot x_{10} + \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau = e^{-2t}(e^t - 1) = e^{-t} - e^{-2t}$

il movimento dell'uscita: $y(t) = x_1(t) = e^{-t} - e^{-2t}$

Calcolare la FUNZIONE di TRASFERIMENTO del sistema

Si possono seguire due vie:

I. $\mathbf{G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1}B + D}$
II. **Applico Laplace alla funzione di stato**

I. $G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1}B + D$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -2 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)}$$

$$\mathbf{G(s)} = [1 \quad 0] \frac{\begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 = \frac{[1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)} = \frac{s+3}{(s+2)(s+3)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s+2}} \rightarrow \boldsymbol{FdT}$$

II. (metodo più semplice se il sistema è superiore a 2).
$SX_1(s) = -2X_1(s) + 2X_2(s) + U(s)$
$SX_2(s) = -3X_2(s)$
$Y(s) = X_1(s)$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \cdots = G(s)$$

$(S+3)X_2 = 0 \rightarrow X_2 = 0$
$(S+2)X_1 = U(s)$

Perciò possiamo ricavare la $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{X_1(s)}{(S+2)X_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s+2}} \rightarrow \mathbf{FdT}$

Di che tipo di sistema si tratta?

- **SISO** (una sola FdT)
- Grado relativo **r** = 1
- Strettamente proprio[6] (y non dipende da u).
- **POLI** del sistema → s = -2
- **Zeri** del sistema → ∄
- **Tipo** del sistema[7] → $g = 0$ (non ci sono ne POLI ne ZERI in s=0).

$$G(s) = \frac{\mu \prod(\dots)}{s^{g} \prod(\dots)}$$

---

[6] Se la FdT fosse stata $G(s) = \frac{1}{s+2} + 1$ il sistema sarebbe stato proprio (non strettamente).

[7] g è un numero intero, uguale, se positivo, al numero di poli in s=0, se negativo, al numero di zeri in s=0 (se è nullo non vi sono né poli né zeri in s=0). Se g=0, risulta inoltre:
$\boldsymbol{\mu} = \lim_{s \to 0} G(s) = -CA^{-1}B + D$ → **guadagno statico**: rapporto tra ingresso e uscita all'equilibrio.

Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare:

- $\boldsymbol{y(0)}$
- $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} y(t)}$

Teorema del Valore Iniziale[8] T.V.I.

Prima di applicare il teorema <u>bisogna verificare le ipotesi</u>:

$$hp \to \begin{cases} G(s) = \dfrac{N}{D} \to funzione\ razionale \\ grado\ D > grado\ N \end{cases} \to siccome\ G(s) = \frac{1}{s+2}\ le\ ipotesi\ sono\ verificate$$

il teorema dice che:

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s) \cdot U(s)$$

Occorre quindi conoscere $U(s) \to U(s) = l[u(t)] = l[e^{-t}]$[9] $= \frac{1}{s+1}$

$$\boldsymbol{y(0) = \lim_{s\to\infty} s \cdot G(s) \cdot U(s) = s \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} = 0}$$

Teorema del Valore Finale[10] T.V.F.

Prima di applicare il teorema <u>bisogna verificare le ipotesi</u>:

$$hp \to \begin{cases} G(s) = \dfrac{N}{D} \to funzione\ razionale \\ grado\ D > grado\ N \\ \nexists\ poli\ con\ Re(\lambda) > \mathbf{0} \end{cases} \to siccome\ G(s) = \frac{1}{s+2}\ e\ polo\ s = -2\ le\ ipotesi\ sono\ verificate$$

$$\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} y(t)} = \lim_{s\to0}[sG(s)U(s)] = \lim_{s\to0} s \cdot \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1} = \mathbf{0}$$

Possiamo fare una verifica, siccome siamo in possesso del movimento dell'uscita nel dominio del tempo, calcoliamo i valori per t=0 e t→∞.

$y(t) = \mathbf{e^{-t} - e^{-2t}}$

- $y(0) = 1 - 1 = 0$
- $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 - 0 = 0$

---

[8] Se $l[f(t)] = F(s) \to f(0^+) = \lim_{s\to\infty}[sF(s)]$

[9] In generale $l[e^{-\alpha t}] = \frac{1}{s+\alpha}$

[10] Se $l[f(t)] = F(s), e\ F(s)$ è razionale e ha poli tutti a parte reale negativa oppure nell'originedel piano complesso, allora $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to0}[sF(s)]$

Calcolare y(t) utilizzando l'antitrasformata di Laplace

$$\mathrm{G(s)} = \frac{\mathrm{Y(s)}}{\mathrm{U(s)}} \rightarrow Y(s) = G(s)U(s)$$

$y(t) = l^{-1}[Y(s)]$

$Y(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s+1}$ →trasformata dell'uscita

Metodo di antitrasformazione di Heaviside.

$$Y(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1} = \frac{[A(s+1)+B(s+2)]}{[(s+2)(s+1)]} = \frac{s(A+B)+A+2B}{(s+2)(s+1)} \rightarrow \begin{cases} A+B=0 \rightarrow A=-B \\ A+2B=1 \rightarrow B=1, A=-1 \end{cases}$$

$$Y(s) = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1}$$

Il passaggio è necessario perchè adesso conosco le antitrasformate di entrambi i termini.

$y(t) = -e^{-2t} + e^{-t}$

Esercizio 3

$\dot{x} = -2x + u$

$y = 3x$

$$\boxed{\begin{array}{c} u = sca(t) \\ x_0 = 0 \\ y(t) = ? \end{array}}$$

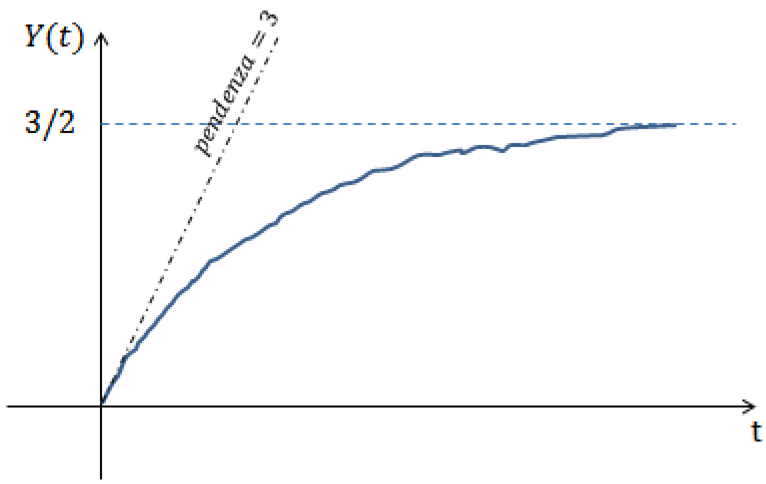
$$\boldsymbol{G(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = 3(s+2)^{-1} = \boldsymbol{\frac{3}{s+2}}$$

$y(s) = G(s)U(s)$[11] $= \frac{3}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{3}{s(s+2)}$

dobbiamo ricondurci alla forma: $\frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} \to \frac{A(s+2)+B(s)}{s(s+2)} \to \begin{cases} A + B = 0 \\ 2A = 3 \to A = \frac{3}{2}; B = -\frac{3}{2} \end{cases}$

quindi $y(s) = \frac{\frac{3}{2}}{s} - \frac{\frac{3}{2}}{s+2} \to y(t) = \frac{3}{2}sca(t) - \frac{3}{2}e^{-2t}$

tipica domanda d'esame: "tracciare il grafico della risposta allo scalino".



Occorre:

$$y(0) = \frac{3}{2}sca(0) - \frac{3}{2}e^{-2(0)} = 0$$

$$\dot{y}(0) = 0 + 3 = 3$$

$$y(\infty) = \lim_{t\to\infty} \frac{3}{2}sca(t) - \frac{3}{2}e^{-2t} = \frac{3}{2}$$

---

[11] $L[sca(t)] = \frac{1}{s}$

Esercizio 4

$$G(s) = \frac{3}{s+2}$$

$$u(t) = sca(t) - imp(t)$$

$$y(t) = ?$$

Per il **teorema della sovrapposizione degli effetti**, se $\boldsymbol{u(t) = u_1(t) + u_2(t) \rightarrow y(t) = y_1(t) + y_2(t)}$

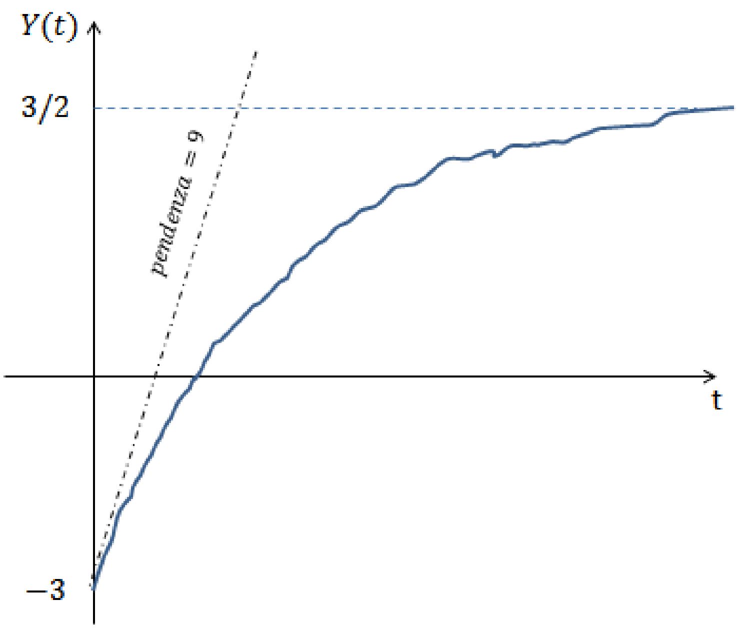
quindi posso procedere così:

$$y_2(s) = G(s)U_1(s) = \frac{3}{s+2} \cdot 1$$ [12]

$$y_2(t) = L^{-1}\left[\frac{3}{s+2}\right] = 3e^{-2t}$$

Quindi

$$y(t) = \tfrac{3}{2} sca(t)^{[13]} - \tfrac{3}{2} e^{-2t} + 3e^{-2t} = \tfrac{3}{2}(1 - e^{-2t}) + 3e^{-2t} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{9}{2} e^{-2t}$$



Occorre:

$$y(0) = \frac{3}{2} - \frac{9}{2} e^{-2(0)} = -3$$

$$\dot{y}(0) = 9$$

$$y(\infty) = \frac{3}{2}$$

NB: $\frac{3}{2}$ è il **guadagno statico del sistema**. L'impulso non fa altro che cambiare il punto di partenza.

---

[12] La trasformata dell'impulso è 1.

[13] Sca(t)=1 per t≥0