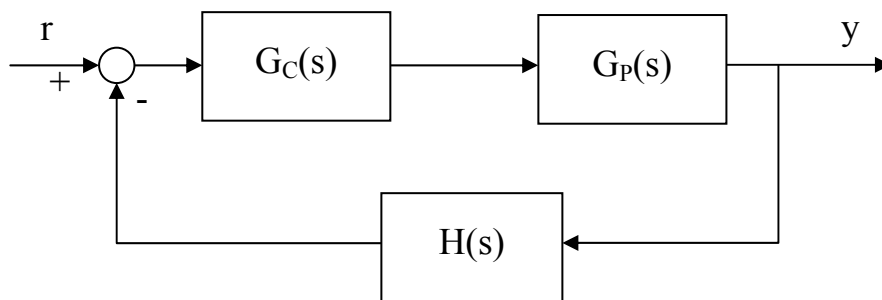


SPECIFICHE DI UN SISTEMA IN ANELLO CHIUSO

Consideriamo il classico esempio di compensazione in cascata riportato in figura, comprendente il plant o sistema controllato con funzione di trasferimento $G_P(s)$, il regolatore con funzione di trasferimento $G_C(s)$ e il trasduttore con funzione di trasferimento $H(s)$.



La realizzazione di un sistema di controllo siffatto, ossia il progetto del controllore $G_C(s)$, deve soddisfare alcuni requisiti sul sistema controllato: esso deve cioè consentire il raggiungimento di alcune specifiche riguardanti il suo comportamento dinamico. In particolare, tali specifiche possono caratterizzare sia il comportamento in transitorio che quello a regime del sistema.

Ovviamente, la stabilità asintotica è la prima specifica richiesta in anello chiuso ed è nel seguito data per scontata. Se infatti il sistema complessivo non è asintoticamente stabile, il progetto dell'anello di controllo è fallimentare e non ha senso studiare altre specifiche relative al comportamento del sistema.

La dinamica a regime del sistema in anello chiuso è essenzialmente caratterizzata dalla precisione del sistema controllato: con riferimento alla risposta ad ingressi canonici (gradino, rampa, rampa parabolica), perciò, generalmente la precisione richiesta è definita dalla costante di errore (di posizione, di velocità o di accelerazione) o, equivalentemente, dall'errore a regime (di posizione, di velocità o di accelerazione).

Ulteriori specifiche sul comportamento a regime riguardano la precisione in termini di sensibilità ai disturbi e alle variazioni parametriche.

Le specifiche sulla dinamica nel transitorio riguardano invece la stabilità relativa e la rapidità di risposta del sistema controllato. Tali specifiche possono essere espresse nel dominio del tempo o in quello della frequenza.

La rapidità del sistema nel dominio del tempo è specificata, oltre che dalla costante di tempo dei poli dominanti, essenzialmente dal tempo di assestamento, che, considerando un tipico sistema in anello chiuso del secondo ordine con poli complessi e coniugati (eventualmente dominanti) aventi coefficiente di smorzamento δ e pulsazione naturale ω_n , vale come è noto:

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n}, \quad t_{s2\%} = \frac{4}{\delta\omega_n}.$$

Ulteriori specifiche di rapidità nel dominio del tempo sono il tempo di picco, che per un sistema del secondo ordine è

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}$$

e il tempo di salita, che vale

$$t_r = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} = \frac{\pi - \arccos \delta}{\omega_n \sqrt{1-\delta^2}}.$$

Nel dominio della frequenza le specifiche più importanti sono la pulsazione naturale ω_n della coppia di poli complessi e coniugati dominanti o la pulsazione ω_B del polo dominante (pari all'inverso della costante di tempo o al valore del polo preso positivamente), a seconda che il sistema sia del secondo o del primo ordine. Infatti entrambe queste pulsazioni sono legate alla corrispondente costante di tempo τ del sistema, essendo nei due casi (si ricordi che il sistema presenta poli a fase minima):

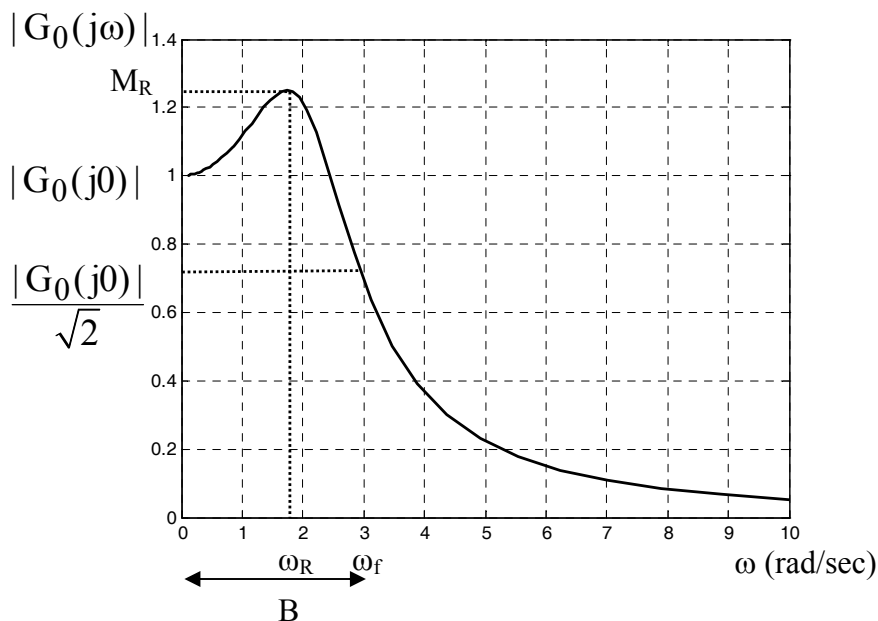
$$\tau = \frac{1}{\delta\omega_n}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_B}$$

e ne deriva che, perché un sistema sia rapido, ossia la sua costante di tempo dominante sia contenuta, la pulsazione di break deve essere sufficientemente elevata.

A tali specifiche si aggiunge la banda passante o larghezza di banda B. Consideriamo l'andamento tipico del modulo effettivo della funzione di risposta armonica di un sistema in retroazione $G_0(s)$, in genere analogo a quello di un sistema del secondo ordine, poiché è molto comune la presenza di due poli complessi e coniugati dominanti in anello chiuso.

Tale modulo $|G_0(j\omega)|$ presenta generalmente un massimo M_R , detto picco di risonanza, ad una pulsazione ω_R detta anch'essa di risonanza, ed è caratterizzato da una larghezza di banda $B=\omega_f$ che indica la pulsazione ω_f alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 dB (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$) al valore statico $G_0(0)$, ossia tale che:

$$|G_0(j\omega_f)| = \frac{|G_0(j0)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_f)|_{dB} = |G_0(j0)|_{dB} - 3dB.$$



La larghezza di banda di un sistema $B=\omega_f$, oltre a definire le capacità filtranti dello stesso, ossia le capacità di reiettare il rumore (che tipicamente comprende armoniche principalmente in alta frequenza), fornisce una indicazione qualitativa del tempo di salita t_r del sistema con riferimento alla risposta al gradino. Infatti si può verificare sperimentalmente che per un generico sistema in anello chiuso risulta:

$$B \cdot t_r \approx 0.4.$$

Ne consegue che ad una larghezza di banda maggiore corrisponde un minore tempo di salita, ossia una maggiore prontezza di risposta del sistema.

Osserviamo inoltre che in genere la banda passante di un sistema in retroazione (da 0 a ω_{f0}) è maggiore di quella del sistema in anello aperto (da 0 a ω_f), il che indica l'effetto benefico della retroazione in termini di prontezza di risposta del sistema.

Per quanto generalmente ad una larghezza di banda maggiore corrisponda un minore tempo di salita, si osserva comunque che non è consigliabile aumentare in modo spropositato la banda passante del sistema in anello chiuso, poiché così facendo si tende a ridurre la robustezza ai disturbi dello stesso. Infatti generalmente il rumore, ossia il disturbo che agisce sulle componenti del ramo di retroazione, ha delle componenti in frequenza che si attestano su valori elevati delle pulsazioni. Dunque le naturali caratteristiche passabasso di un sistema in retroazione, che tagliano cioè i segnali in alta frequenza per via del maggiore numero di poli rispetto agli zeri di sistema, possono favorire la capacità di reiezione ai disturbi del sistema. Si osserva inoltre che un aumento eccessivo della banda passante fa sì che non sia possibile trascurare le dinamiche in alta frequenza del sistema, ossia considerarne i soli poli dominanti.

Per tali motivi la larghezza di banda richiesta per il sistema in retroazione non deve essere mai troppo elevata.

Ulteriori specifiche correlate alla larghezza di banda e che quindi forniscono degli indici quantitativi della rapidità del sistema sono la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} , in cui il diagramma di Bode dei moduli della funzione di risposta armonica interseca la retta a 0 dB, e la pulsazione di crossover di fase ω_{CF} , in cui il diagramma di Bode degli argomenti interseca la retta a -180 gradi (si veda la successiva sezione sui margini di stabilità).

Come per la banda passante, anche le pulsazioni di crossover di guadagno e fase devono essere opportunamente elevate.

Come è stato già accennato, con riferimento alle specifiche sul transitorio relative alla stabilità, non si tratta di stabilire se il sistema sia stabile o no, poiché un requisito necessario e implicito del sistema in anello chiuso è proprio la sua asintotica stabilità, quanto piuttosto la misura di quanto soddisfacente sia il suo comportamento dinamico (stabilità relativa).

In altre parole, si tratta di valutare grandezze opportune che misurino quanto il sistema è lontano dalla instabilità, ovvero quantifichino la distanza dei poli dominanti in anello chiuso dall'asse immaginario. Considerando un tipico sistema in anello chiuso del secondo ordine con poli complessi e coniugati (eventualmente dominanti), nel dominio del tempo tali grandezze sono espresse dal coefficiente di smorzamento δ (valori tipici $0.28 \div 0.7$) e dalla massima sovraelongazione percentuale della risposta al gradino (valori tipici corrispondenti $5 \div 40\%$):

$$M_P = 100e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}}.$$

Infatti, se la massima sovraelongazione percentuale M_P assume un valore molto alto (il coefficiente di smorzamento δ è molto piccolo), le oscillazioni nella risposta indiciale sono eccessive in modulo e tendono a smorzarsi lentamente, dunque la stabilità relativa del sistema può essere insoddisfacente.

Nel dominio della frequenza le specifiche di stabilità relativa vengono espresse in termini di pulsazione e picco di risonanza. In particolare, nel caso di sistema con funzione di trasferimento $G_0(s)$ del secondo ordine con poli complessi e coniugati, è noto che la funzione $|G_0(j\omega)|_{dB}$ presenta un massimo, quando risulta $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$, nel punto

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}$$

In particolare, il valore del picco di risonanza è

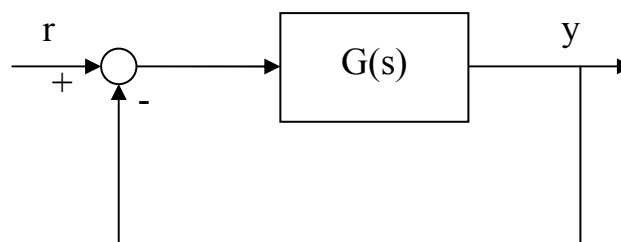
$$M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}, \quad M_R |_{dB} = -20 \log_{10} \left(2\delta\sqrt{1-\delta^2} \right).$$

Così come sono desiderabili una elevata larghezza di banda e una massima sovraelongazione percentuale contenuta, sono opportune una elevata pulsazione di risonanza e un picco di risonanza contenuto.

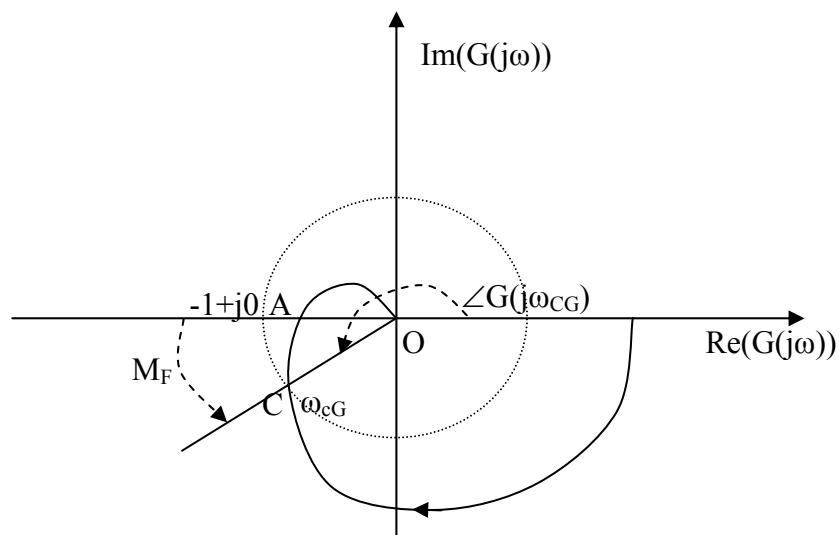
Due ulteriori specifiche di stabilità molto importanti sono i margini di stabilità, ossia il margine di guadagno (o margine di ampiezza) e il margine di fase, definiti nel seguito. Il margine di guadagno si esprime in dB ed ha valori tipici di $6 \div 12$ dB, mentre il margine di fase si esprime in gradi (o in radianti) con valori tipici di $30 \div 60$ gradi ($\pi/6 \div \pi/3$ radianti). Anche questi indici delle prestazioni del sistema devono essere il più possibile elevati per garantire la stabilità del sistema in anello chiuso in presenza di dinamiche trascurate o perturbazioni di qualsiasi genere, come ad esempio derive termiche o invecchiamento dei componenti.

MARGINI DI STABILITÀ

I margini di stabilità sono specifiche che vengono qui definite solo per sistemi con funzione di trasferimento di anello $G(s)$ aventi le seguenti caratteristiche: 1) assenza di poli in anello aperto nel semipiano destro (ossia con $P=0$, secondo la notazione introdotta con il criterio di Nyquist); 2) sistema strettamente proprio (ovvero $m < n$); 3) diagramma polare di Nyquist che interseca al massimo una sola volta il cerchio di raggio unitario; 4) diagramma polare di Nyquist che interseca al massimo una sola volta il semiasse reale negativo (oltre l'intersezione nell'origine per $\omega \rightarrow +\infty$); 5) modulo della funzione di risposta armonica di anello $|G(j\omega)|$ che è una funzione monotonicamente decrescente di ω .



Nonostante queste proprietà specifichino una classe assai particolare di funzioni di trasferimento, esse sono godute dalla maggior parte dei sistemi che si incontrano nei campi di applicazione tradizionale dei controlli automatici.



Un diagramma polare tipico di un sistema del genere è rappresentato in figura, dove è messo in evidenza il punto C di intersezione del diagramma con la circonferenza di raggio unitario. Evidentemente in tale punto si ha:

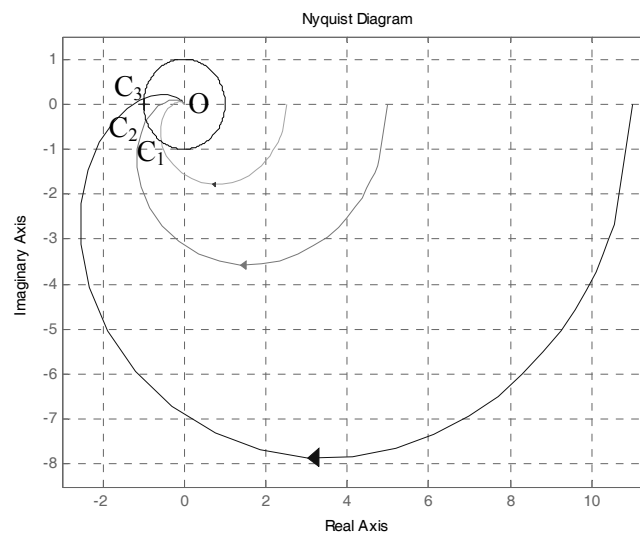
$$|G(j\omega_{CG})|=1, |G(j\omega_{CG})|_{dB}=0 \text{ dB}.$$

Dunque la pulsazione ω_{CG} è la pulsazione precedentemente definita detta di crossover del guadagno, nella quale il diagramma di Bode dei moduli interseca la retta a 0 dB.

Tenuto conto dell'ipotesi di stabilità in anello aperto fatta su $G(s)$, in base al criterio di Nyquist ridotto (si ha $P=0$ per ipotesi) il sistema in retroazione è asintoticamente stabile (ossia risulta $Z=0$) se e solo se, come avviene nel caso in figura, il diagramma non abbraccia il punto critico ($\vec{N}=0$), ovvero, detta $\angle G(j\omega_{CG})$ la fase del fasore individuato dal punto C e misurata nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ con le convenzioni introdotte con i diagrammi di Bode, risulta:

$$\angle G(j\omega_{CG}) > -\pi.$$

Se si suppone che sul ramo diretto in serie al plant con funzione di trasferimento $G(s)$ sia presente un amplificatore dal guadagno generico K , ne consegue che il sistema in questione è dunque condizionatamente stabile: si ha stabilità in anello chiuso solo per valori piccoli del guadagno, mentre se quest'ultimo supera un certo limite K_{cr} , per il quale il diagramma interseca il punto critico, allora il diagramma corrispondente per guadagni superiori a K_{cr} abbraccia il punto critico. In altre parole, per guadagni elevati l'intersezione del diagramma di Nyquist con la circonferenza unitaria si trova al di sopra dell'asse reale e si ha instabilità in catena chiusa.



Ad esempio, come si vede dalla figura precedente, il diagramma passante per il punto C_2 è più vicino alla situazione di instabilità rispetto a quello passante per C_1 . Ancora,

il diagramma passante per C_3 corrisponde ad una situazione di instabilità in anello chiuso. Riassumendo, quanto più piccolo è l'angolo formato dal segmento OC_i con il semiasse negativo delle ascisse, tanto più il corrispondente sistema in catena chiusa è vicino ad una situazione di instabilità. Per formalizzare questo fatto si definisce il margine di fase:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi$$

ovvero tale che risulti

$$\angle G(j\omega_{CG}) - M_F = -\pi.$$

Pertanto il margine di fase è l'angolo che deve sottrarsi alla fase della funzione di risposta armonica, misurata a partire da $-\pi$ nel valore della pulsazione di crossover di guadagno, per ottenere l'angolo $-\pi$.

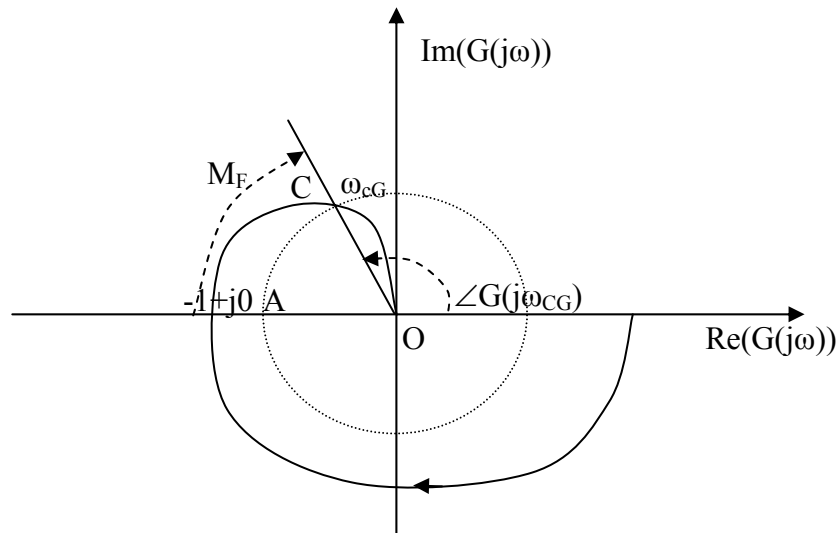
Evidentemente il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se risulta:

$$M_F > 0.$$

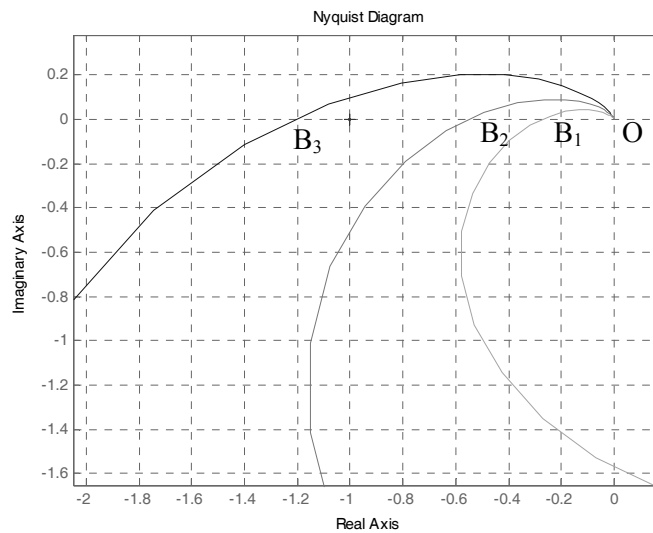
Inoltre, se il margine di fase è negativo allora il sistema è instabile, mentre se esso è nullo allora risulta non solo $|G(j\omega_{CG})|=1$ ma anche $\angle G(j\omega_{CG}) = -\pi$ e quindi il diagramma passa per il punto critico nella pulsazione ω_{CG} , ovvero vi sono dei poli immaginari puri nella funzione di trasferimento in anello chiuso di valore $\pm j\omega_{CG}$.

Ancora, quanto più il margine di fase (positivo) è ampio, tanto maggiore è la stabilità relativa del corrispondente sistema in catena chiusa.

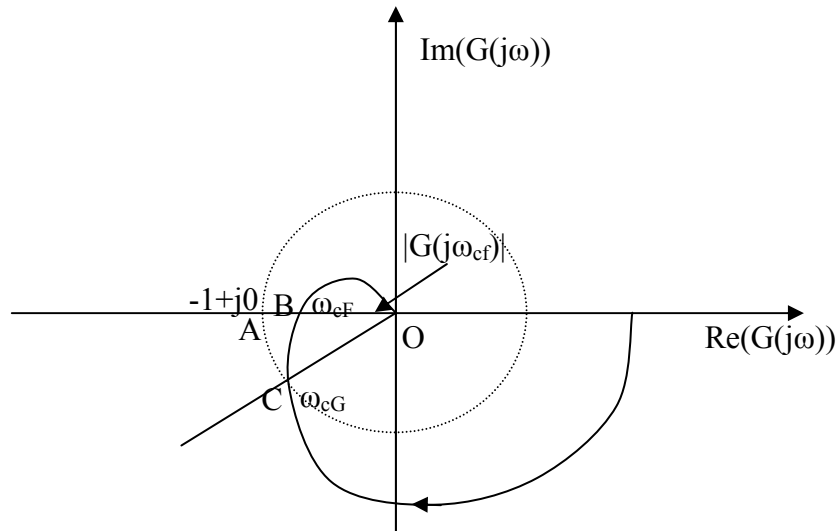
A titolo di esempio, la figura successiva riporta il diagramma di Nyquist di un sistema con margine di fase negativo (ovvero con il punto C disposto nel secondo quadrante) e quindi instabile in anello chiuso.



Consideriamo ora la figura seguente, che riporta, opportunamente ingranditi, ancora i tre diagrammi di Nyquist precedentemente confrontati e ne evidenzia le intersezioni B_i con il semiasse reale negativo. Come per il caso precedente, si vede facilmente che condizione necessaria e sufficiente perché il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile è che l'intersezione B_i si trovi a destra del punto critico $-1+j0$. Ancora, quanto più a destra è tale intersezione tanto più robusta è la stabilità in anello chiuso del sistema.



Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.



Detta allora ω_{CF} la pulsazione alla quale il diagramma interseca il semiasse reale negativo, si ha:

$$\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi.$$

Si definisce pertanto margine di guadagno o di ampiezza M_A l'inverso della distanza OB (in modo da ottenere un indice il cui valore aumenta all'aumentare della stabilità relativa, come per il margine di fase) espressa in dB (si utilizzano i decibel per maggiore facilità di lettura di tale indice nei diagrammi di Bode):

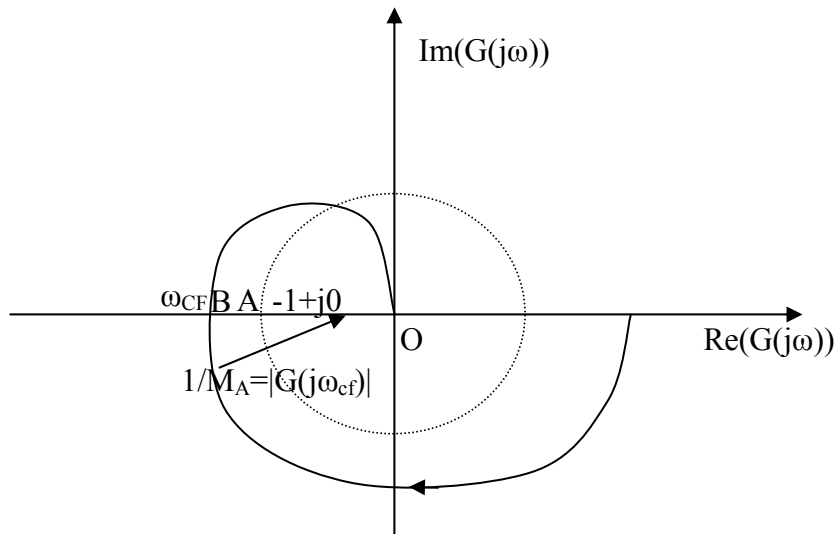
$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = -20 \log_{10} |G(j\omega_{CF})|$$

In questo caso il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile se e solo se risulta $OB < 1$, ovvero $1/OB > 1$, ossia:

$$M_A > 0.$$

Inoltre, se il margine di ampiezza è negativo allora il sistema è instabile, mentre se esso è nullo allora risulta non solo $\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi$ ma anche $|G(j\omega_{CF})| = 1$ e quindi il diagramma passa per il punto critico nella pulsazione ω_{CF} , ovvero vi sono dei poli immaginari puri nella funzione di trasferimento in anello chiuso di valore $\pm j\omega_{CF}$.

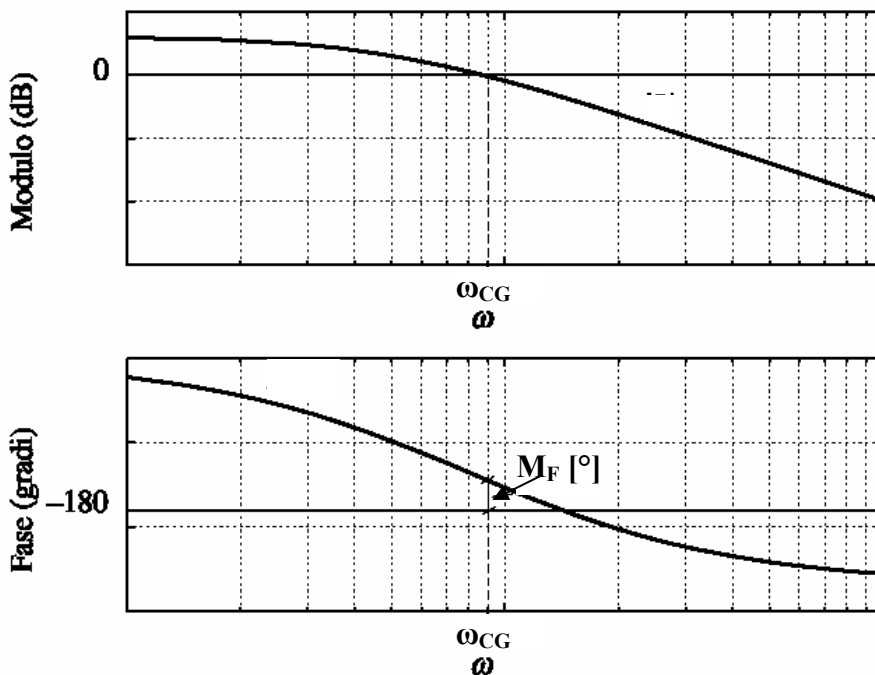
A titolo di esempio, la figura successiva riporta il diagramma di Nyquist di un sistema con margine di ampiezza negativo (ovvero con $1/OB < 1$ cioè $OB > 1$ e quindi con il punto B disposto a sinistra del punto critico A) e dunque instabile in anello chiuso.



Come per il margine di fase, quanto più il margine di ampiezza (positivo) è ampio, tanto maggiore è la stabilità relativa del corrispondente sistema in catena chiusa.

Osserviamo che i margini di fase e di guadagno si possono agevolmente misurare sui diagrammi di Bode.

La pulsazione ω_{CG} di crossover del guadagno, essendo la pulsazione alla quale il modulo è unitario, corrisponde all'intersezione del diagramma di Bode dei moduli con la retta a 0 dB.

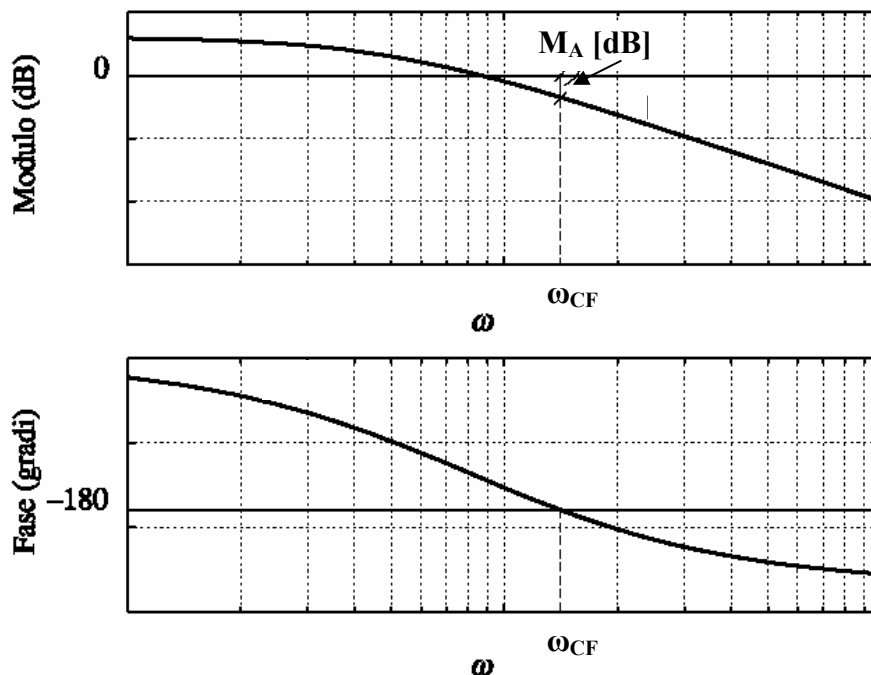


In corrispondenza del valore di pulsazione ω_{CG} è quindi possibile leggere il margine di fase M_F direttamente dal diagramma di Bode delle fasi. Si ha infatti:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + 180^\circ = \angle G(j\omega_{CG}) - (-180^\circ).$$

In altre parole, il margine di fase M_F espresso in gradi (radianti) è la distanza fra l'ordinata di fase (misurata in gradi) del punto di pulsazione ω_{CG} e la retta a -180° ($-\pi$). Il suo segno è positivo se, come nel caso in figura, il punto di ascissa ω_{CG} ha ordinata maggiore di -180° ($-\pi$), è negativo in caso contrario.

Per quanto riguarda il margine di guadagno, la pulsazione ω_{CF} di crossover delle fasi, essendo la pulsazione alla quale la fase vale -180° , corrisponde all'intersezione del diagramma di Bode delle fasi con la retta a -180 gradi.



In corrispondenza del valore di pulsazione ω_{CF} è quindi possibile leggere il margine di ampiezza M_A in dB direttamente dal diagramma di Bode dei moduli:

$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = -20 \log_{10} |G(j\omega_{CF})| = 0 - |G(j\omega_{CF})|_{dB}.$$

In altre parole, il margine di ampiezza M_A espresso in decibel è l'opposto del modulo in decibel valutato sul diagramma di Bode delle ampiezze nel punto di pulsazione ω_{CF} , ossia la distanza, in dB, tra la retta a 0 dB e l'ordinata del punto di ascissa ω_{CF} . Il suo segno è positivo se, come nel caso in figura, il punto di ascissa ω_{CF} ha ordinata inferiore a 0 dB, è negativo altrimenti.

Osserviamo inoltre che i sistemi considerati sono asintoticamente stabili se e solo se risulta $\omega_{CG} < \omega_{CF}$, e una misura alternativa a M_F e M_A del margine di stabilità è quindi data proprio dalla differenza $\omega_{CF} - \omega_{CG}$.

Consideriamo ora il caso di un sistema con ritardo puro. Per fissare le idee facciamo riferimento al caso del laminatoio, in cui la funzione di trasferimento del gruppo misuratore-amplificatore-motore riduttore è la seguente:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)},$$

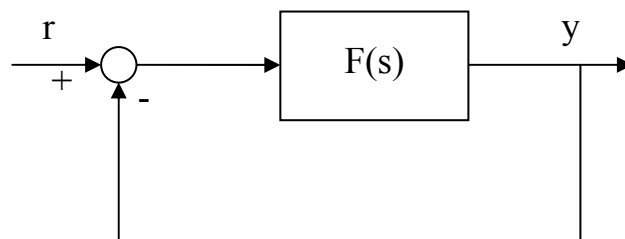
mentre per via del ritardo puro la funzione di trasferimento di anello è:

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)},$$

con

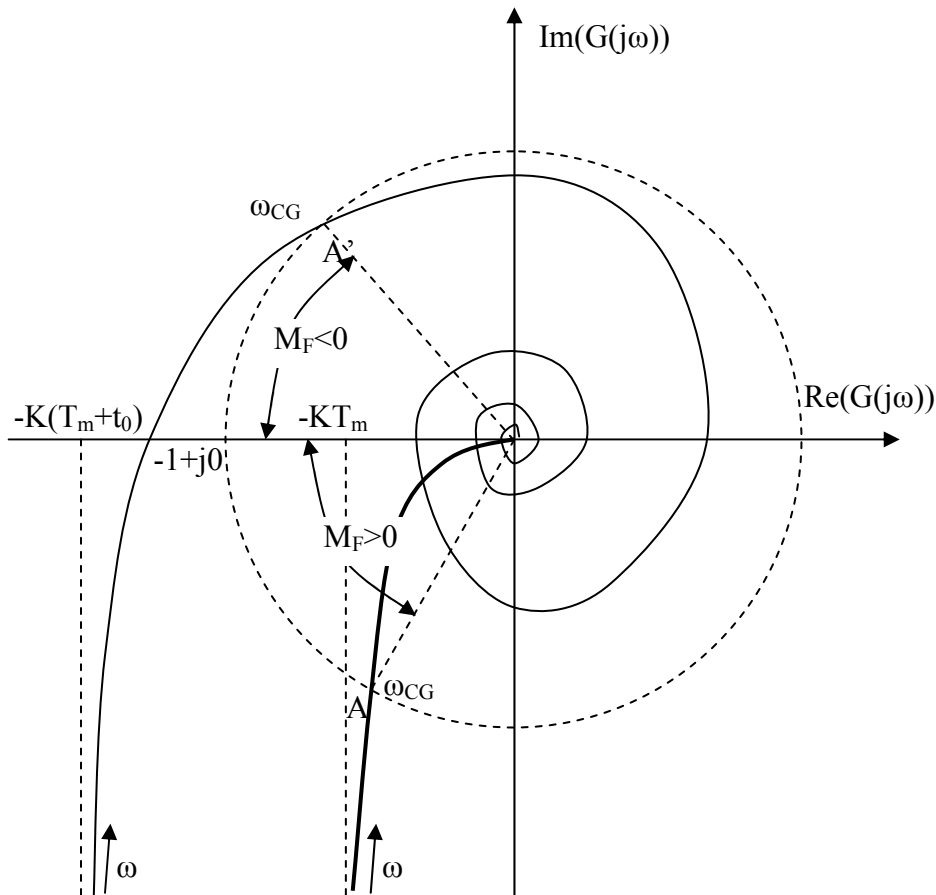
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + T_m j\omega)}, \quad F(j\omega) = \frac{K e^{-t_0 j\omega}}{j\omega(1 + T_m j\omega)}.$$

In definitiva, il sistema equivale al sistema a blocchi rappresentato in figura.



Il Diagramma di Nyquist del sistema senza ritardo finito, cioè quello della funzione $G(j\omega)$, è del tipo indicato con A nella figura seguente, mentre assume l'andamento

indicato con A' quando è presente il ritardo puro, ossia se si considera la funzione $F(j\omega)$.



È noto che la presenza di un ritardo puro in una anello di controllo può destabilizzare un sistema, soprattutto per valori elevati del tempo morto. Ciò avviene proprio nell'esempio riportato nella figura precedente, per il quale l'intersezione del diagramma di Nyquist con il cerchio di raggio unitario passa, per via del ritardo, dal terzo al secondo quadrante e l'intersezione del diagramma di Nyquist con il semiasse reale negativo si sposta dalla destra del punto critico a sinistra dello stesso. È immediato concludere che il margine di fase M_F della funzione $G(j\omega)$ è il massimo ritardo addizionale di fase che il sistema può tollerare senza che esso perda la sua caratteristica di asintotica stabilità. Infatti si ha:

$$|F(j\omega)| = |G(j\omega)| \Rightarrow \omega_{CG}(F(j\omega)) = \omega_{CG}(G(j\omega))$$

ossia le due funzioni hanno la stessa pulsazione di crossover dei guadagni. Inoltre si ha:

$$\angle F(j\omega) = \angle G(j\omega) - t_0\omega$$

e poiché le due funzioni hanno la stessa pulsazione di crossover dei guadagni si ha anche:

$$M_F(F(j\omega)) = M_F(G(j\omega)) - t_0\omega_{CG}.$$

Imponendo che il margine di fase del sistema in anello chiuso con ritardo sia positivo o al massimo nullo (cioè che il sistema sia asintoticamente stabile o semplicemente stabile) si ha quindi:

$$M_F(F(j\omega)) = M_F(G(j\omega)) - t_0\omega_{CG} \geq 0 \Rightarrow t_0 \leq \frac{M_F(G(j\omega))}{\omega_{CG}}.$$

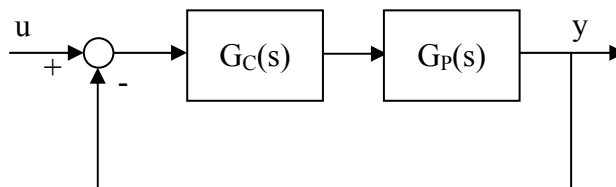
Pertanto un valore del ritardo puro superiore a quello critico determinato porta il sistema in retroazione alla instabilità, anche se il sistema privo di ritardo è asintoticamente stabile in anello chiuso.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_C(s) = 5, \quad G_P(s) = \frac{1}{s(s+2)}.$$

Si determinino il picco di risonanza M_r e la pulsazione di risonanza ω_r del sistema. Si determini quindi la banda passante B del sistema. Infine si calcolino le pulsazioni di crossover di guadagno ω_{CG} e di fase ω_{CF} e i margini di fase M_F e di ampiezza M_A del sistema.



La funzione di trasferimento di anello vale:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{5}{s(s+2)},$$

quindi la funzione di trasferimento in anello chiuso è:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{5}{s^2 + 2s + 5} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2},$$

ovvero il sistema in anello chiuso è un sistema del secondo ordine nella forma standard con pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{5}\delta = \frac{1}{\sqrt{5}} \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, per cui la risposta in frequenza presenta un picco di risonanza.

Si ha:

$$G_0(j\omega) = \frac{5}{5 - \omega^2 + 2j\omega},$$

$$|G_0(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{(5 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}} = \frac{5}{\sqrt{25 - 6\omega^2 + \omega^4}}.$$

Determiniamo la pulsazione di risonanza, alla quale il modulo della funzione di risposta armonica è massimo, annullando la derivata del modulo.

$$\frac{d|G_0(j\omega)|}{d\omega} = -5 \frac{(-12\omega + 4\omega^3)}{(25 - 6\omega^2 + \omega^4) \cdot 2\sqrt{25 - 6\omega^2 + \omega^4}} = 0$$

da cui

$$-12\omega + 4\omega^3 = 0 \Rightarrow \omega^2 - 3 = 0 \Rightarrow \omega_R = \sqrt{3}\text{rad/s} \approx 1.707\text{rad/s}.$$

In corrispondenza di tale pulsazione si ottiene il massimo del modulo della funzione di risposta armonica, ossia proprio il picco di risonanza:

$$M_R = |G_0(j\omega_R)| = \frac{5}{\sqrt{25 - 6\omega_R^2 + \omega_R^4}} = \frac{5}{\sqrt{25 - 18 + 9}} = \frac{5}{4} = 1.25,$$

che in dB vale:

$$M_R|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{5}{4} \right) \approx 1.94 \text{ dB}.$$

Ovviamente tali risultati si sarebbero anche potuti determinare ricordando che per un sistema del secondo ordine come quello in esame risulta:

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}, \quad M_R|_{dB} = 20 \log_{10} \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}.$$

Sostituendo alle precedenti relazioni i valori $\omega_n = \sqrt{5}$ e $\delta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ si ottengono nuovamente i risultati precedentemente determinati.

La banda passante del sistema $B = \omega_f$ indica la pulsazione ω_f alla quale il modulo della risposta armonica è inferiore di 3 dB (corrispondenti ad un rapporto di 1 ad $\frac{1}{\sqrt{2}}$) al valore statico $G_0(0)$, ossia tale che:

$$|G_0(j\omega_f)| = \frac{|G_0(j0)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_f)|_{dB} = |G_0(j0)|_{dB} - 3 \text{ dB}.$$

In questo caso si ha:

$$|G_0(0)| = 1.$$

Dunque deve essere:

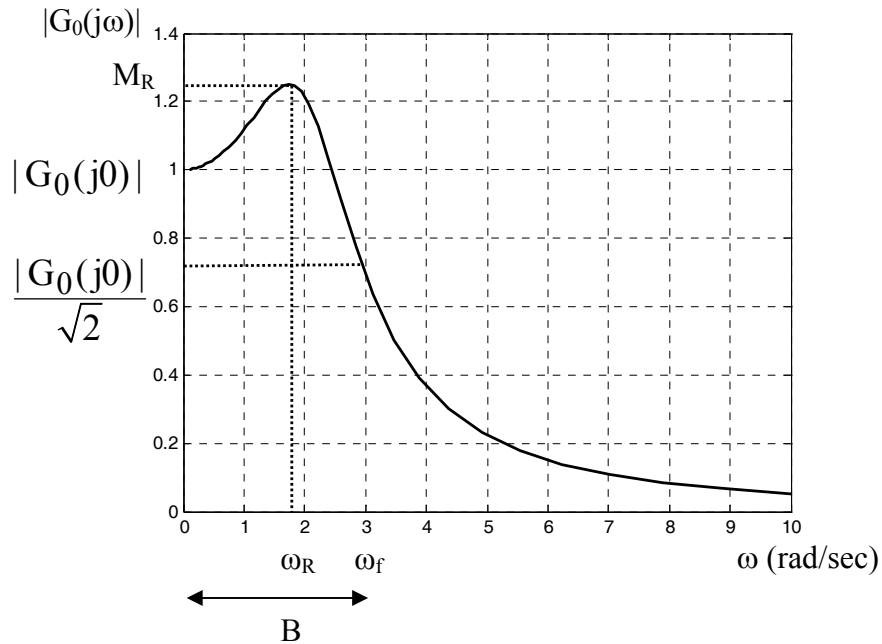
$$\frac{5}{\sqrt{25 - 6\omega^2 + \omega^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 25 - 6\omega^2 + \omega^4 = 50 \Rightarrow \omega^4 - 6\omega^2 - 25 = 0.$$

Ponendo $\omega^2 = t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 - 6t - 25 = 0 \Rightarrow t = 3 + \sqrt{9 + 25} \approx 8.83 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{8.83} \approx 2.97 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una banda $B=2.97 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o $f=B/(2\pi)=0.47 \text{ Hz}$.

In figura sono rappresentati la pulsazione e il picco di risonanza e la banda passante del sistema.



Calcoliamo ora la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} del sistema. Si ha:

$$|G(j\omega_{CG})|=1,$$

ossia si cerca la pulsazione alla quale la funzione di risposta armonica in anello aperto ha modulo unitario. Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{5}{j\omega(j\omega + 2)} = \frac{5}{-\omega^2 + 2j\omega},$$

da cui

$$|G(j\omega)| = \frac{5}{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 = 25 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 25 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 + 4t - 25 = 0 \Rightarrow t = -2 + \sqrt{4 + 25} \approx 3.38 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{3.38} \approx 1.84 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una pulsazione di crossover del guadagno $\omega_{CG}=1.84 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi.$$

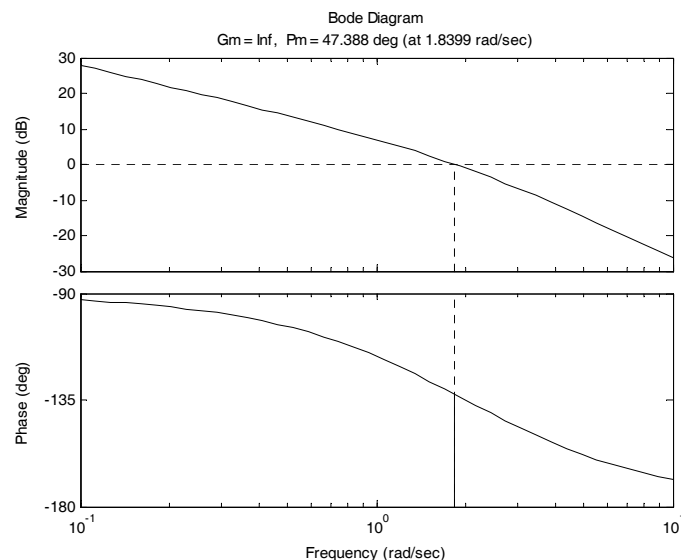
Essendo

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

si ha in definitiva

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(0.5\omega_{CG}) + \pi \approx 0.827 \text{ rad } (47.3^\circ).$$

Evidentemente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre tale margine di stabilità è notevolmente elevato.



Dai diagrammi di Bode si osserva anche una particolarità interessante del sistema. Poiché la fase non è mai al di sotto della retta a -180° , si ha che la pulsazione di

crossover di fase ω_{CF} vale $+\infty$. In tal caso la distanza tra il diagramma di Bode delle ampiezze e la retta a 0 dB è infinita, dunque il margine di ampiezza M_A del sistema è $+\infty$, confermando le caratteristiche di grande stabilità del sistema in anello chiuso. Del resto, la pulsazione di crossover di fase deve soddisfare l'equazione:

$$\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi$$

ovvero

$$-\pi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{CF}}{2}\right)$$

da cui

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{\omega_{CF}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\omega_{CF} = +\infty.$$

Si ha dunque:

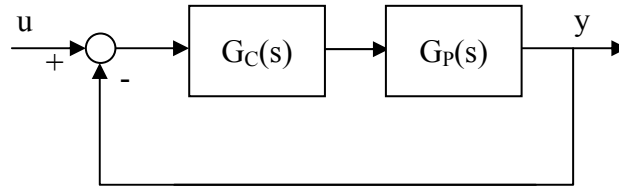
$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = 20 \log_{10} \frac{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}}{5} \Bigg|_{\omega \rightarrow +\infty} = 20 \log_{10}(+\infty) = +\infty$$

che conferma quanto si determina graficamente dai diagrammi di Bode.

ESEMPIO

Con riferimento alla figura, sia:

$$G_C(s) = \frac{25}{3}, \quad G_P(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s(1+0.05s)^2}.$$



Si supponga inizialmente $\tau=0$ e si individuino le pulsazioni di crossover di guadagno ω_{CG} e di fase ω_{CF} e i margini di fase M_F e di ampiezza M_A del sistema. Si calcoli quindi il massimo valore del ritardo puro τ per il quale il sistema è stabile.

Per $\tau=0$ la funzione di trasferimento di anello vale:

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{s(1+0.05s)^2},$$

quindi

$$G(j\omega) = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{j\omega(1+0.05j\omega)^2}.$$

Calcoliamo ora la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} del sistema. Si ha:

$$|G(j\omega_{CG})|=1,$$

ossia si cerca la pulsazione alla quale la funzione di risposta armonica in anello aperto ha modulo unitario.

Si ha

$$|G(j\omega)| = \frac{25}{3} \cdot \frac{1}{\omega \left(1 + \frac{1}{400}\omega^2\right)} = 1 \Rightarrow 3\omega^3 + 1200\omega - 10000 = 0.$$

Tale equazione si può risolvere per approssimazioni successive esplicitando il valore dell'incognita come segue:

$$\omega = \frac{10000 - 3\omega^3}{1200}$$

e sostituendo al secondo membro un valore di prova per la pulsazione si determina un secondo valore per la stessa. Si sostituisce quest'ultimo ancora a secondo membro e si itera sino a giungere a convergenza. Nel nostro caso si giunge in pochi passi ad una soluzione con il valore di prova iniziale della pulsazione $\omega=1 \text{ rad s}^{-1}$ (dove tale valore di prova è scelto sulla base dell'andamento del diagramma di Bode delle ampiezze asintotico, che interseca l'asse a 0 dB nella decade 1-10 rad):

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 1.00; \\ \omega_2 &= 8.33; \\ \omega_3 &= 6.89; \\ \omega_4 &= 7.52; \\ \omega_5 &= 7.27; \\ \omega_6 &= 7.37; \\ \omega_7 &= 7.33; \\ \omega_8 &= 7.34; \\ \omega_9 &= 7.34.\end{aligned}$$

Dunque la soluzione reale dell'equazione precedente (che in generale è del terzo ordine e dunque ha tre soluzioni) è:

$$\omega_{CG} \approx 7.34 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

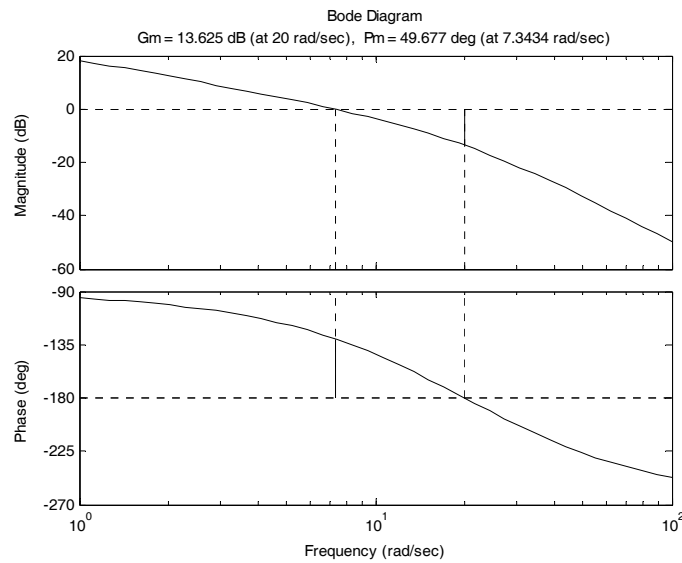
Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - 2\text{arctg}(0.05\omega_{CG}) + \pi \approx 0.87 \text{ rad } (49.7^\circ).$$

Evidentemente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre tale margine di stabilità è notevolmente elevato.

Calcoliamo ora la pulsazione ω_{CF} alla quale il diagramma interseca il semiasse reale negativo, imponendo:

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega_{CF}) = -\pi &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - 2\text{arctg}(0.05\omega_{CF}) = -\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\text{arctg}(0.05\omega_{CF}) &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.05\omega_{CF} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \omega_{CF} = 20 \text{ rad/s}\end{aligned}$$



Determiniamo quindi il margine di guadagno M_A .

$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = 20 \log_{10} \left(\frac{3}{25} \cdot \omega_{CF} \left(1 + \frac{1}{400} \omega_{CF}^2 \right) \right) =$$

$$= 20 \log_{10} \left(\frac{3}{25} \cdot 40 \right) = 20 \log_{10} 4.8 \approx 13.63 \text{ dB}$$

Poiché il margine di ampiezza M_A del sistema in dB è positivo, è confermata la asintotica stabilità del sistema in anello chiuso.

Sia ora il caso $\tau \neq 0$. La nuova funzione di risposta armonica in anello aperto vale

$$F(j\omega) = \frac{25}{3} \cdot \frac{e^{-j\tau\omega}}{j\omega(1 + 0.05j\omega)^2}$$

La pulsazione di crossover dei guadagni è invariata:

$$|F(j\omega)| = |G(j\omega)| \Rightarrow \omega_{CG}(F(j\omega)) = \omega_{CG}(G(j\omega)) \approx 7.34 \text{ rad/s}$$

La fase della funzione di risposta armonica è ora:

$$\angle F(j\omega) = \angle G(j\omega) - \tau\omega = -\frac{\pi}{2} - 2 \arctg(0.05\omega_{CF}) - \tau\omega$$

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Il nuovo margine di fase vale quindi:

$$M_F(F(j\omega)) = M_F(G(j\omega)) - \tau\omega_{CG} = 0.87 - 7.34\tau.$$

Dunque il massimo valore del ritardo puro ammissibile si ottiene imponendo che il margine di fase del sistema in anello chiuso sia positivo o al massimo nullo (cioè che il sistema sia asintoticamente stabile o semplicemente stabile). Si ha quindi:

$$M_F(F(j\omega)) \geq 0 \Rightarrow \tau \leq \frac{0.87}{7.34} \approx 0.1185s.$$

ESEMPIO

Per il sistema chiuso in retroazione unitaria negativa con guadagno di anello:

$$G(s) = \frac{K}{(1+s)^2}, \quad K > 0,$$

si determini il valore del parametro K in modo che il margine di fase valga $M_F=50^\circ$. Per tale valore di K si determini quindi la massima sovralongazione percentuale M_p della risposta indiciale ed il picco di risonanza M_R .

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{K}{(1+j\omega)^2},$$

quindi

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + 180^\circ = -2\arctg(\omega_{CG}) + 180^\circ = 50^\circ,$$

da cui

$$\omega_{CG} = \operatorname{tg}65^\circ \approx 2.14\text{rad/s}.$$

In tale pulsazione il diagramma di Bode dei moduli deve intersecare la retta a 0 dB, cioè deve essere:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$|G(j\omega_{CG})| = \frac{K}{1 + \omega_{CG}^2} = 1,$$

da cui

$$K = 1 + \omega_{CG}^2 = 1 + 2.14^2 \approx 5.58.$$

Con questo valore del guadagno la funzione di trasferimento in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 1 + K} = \frac{5.58}{s^2 + 2s + 6.58} = \frac{5.58}{6.58} \frac{6.58}{s^2 + 2s + 6.58} = K' \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ossia ha guadagno non unitario $K' = 5.58/6.58 \approx 0.85$.

Dalla funzione di trasferimento in anello chiuso si deduce che i poli in anello chiuso hanno pulsazione naturale

$$\omega_n = \sqrt{6.58} \approx 2.57 \text{ rad/s}$$

e coefficiente di smorzamento

$$\delta = \frac{2}{2\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{6.58}} \approx 0.39.$$

Dunque la massima sovraelongazione percentuale della risposta al gradino vale:

$$M_P = 100e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100e^{-\frac{0.39\pi}{\sqrt{1-0.39^2}}} \approx 26.4\%,$$

che è un valore tipico perché compreso nell'intervallo 5÷40%. Si osservi che è stato possibile utilizzare la formula determinata per i sistemi del secondo ordine con guadagno unitario anche in questo caso (in cui il guadagno è 5.58/6.68), poiché la massima sovraelongazione percentuale non è una specifica assoluta, ma fornisce una misura relativa e raffrontata al valore finale della risposta al gradino.

La pulsazione e il picco di risonanza possono determinarsi o annullando la derivata del modulo della funzione di risposta armonica in anello chiuso o più semplicemente ricordando che per un sistema in anello chiuso del secondo ordine con poli complessi e coniugati e privo di zeri si ha un picco di risonanza quando la funzione $|G_0(j\omega)|_{dB}$

presenta un coefficiente di smorzamento $0 \leq \delta < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (è il nostro caso, poiché $\delta=0.39$) con formule note. La pulsazione di risonanza vale

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = 2.57 \sqrt{1 - 2 \cdot 0.39^2} \approx 2.14 \text{ rad/s}.$$

Poiché il guadagno statico in anello chiuso non è 1 ma vale $K' = 5.58/6.58 \approx 0.85$, il valore del picco di risonanza (che non è una misura relativa come la massima sovraelongazione percentuale, ma è una specifica assoluta) è in questo caso pari a:

$$M_R = \frac{5.58}{6.58} \cdot \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} = \frac{5.58}{6.58} \cdot \frac{1}{2 \cdot 0.39\sqrt{1-0.39^2}} \approx 1.18,$$

che in dB vale

$$M_R = 20 \log_{10} 1.18 \approx 1.4 \text{ dB}.$$

ESEMPIO

Per il sistema chiuso in retroazione unitaria negativa con guadagno di anello:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)^2}, \quad K > 0,$$

si determini il valore del parametro K in modo che il margine di ampiezza valga $M_A = 6$ dB. Per tale valore di K si determini quindi la funzione di trasferimento in anello chiuso, l'errore di velocità del sistema e il suo margine di fase.

Si ha:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1+0.5j\omega)^2},$$

quindi

$$M_A = 20 \log_{10} \frac{1}{|G(j\omega_{CF})|} = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{K} \cdot \omega_{CF} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right) \right) = 6 \text{dB} \approx 20 \log_{10} 2,$$

da cui

$$\frac{1}{K} \cdot \omega_{CF} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right) = 2$$

ovvero

$$K = \frac{\omega_{CF}}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right).$$

Calcoliamo ora la pulsazione ω_{CF} alla quale il diagramma interseca il semiasse reale negativo, imponendo:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega_{CF}) = -\pi &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} - 2 \arctg(0.5\omega_{CF}) = -\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 \arctg(0.5\omega_{CF}) &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0.5\omega_{CF} = \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \omega_{CF} = 2 \text{rad/s} \end{aligned}$$

Determiniamo quindi il parametro K:

$$K = \frac{\omega_{CF}}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \omega_{CF}^2 \right) = 1 \left(1 + \frac{1}{4} 4 \right) = 2.$$

Con questo valore del guadagno la funzione di trasferimento in anello chiuso vale:

$$G_0(s) = \frac{K}{s(1+0.5s)^2 + K} = \frac{K}{\frac{1}{4}s^3 + s^2 + s + K} = \frac{4K}{s^3 + 4s^2 + 4s + 4K} = \frac{8}{s^3 + 4s^2 + 4s + 8}.$$

Inoltre la funzione di trasferimento in anello aperto è

$$G(s) = \frac{2}{s(1 + 0.5s)^2}$$

con una costante di velocità

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{(1 + 0.5s)^2} = 2$$

e in conclusione l'errore di velocità vale $1/K_V=0.5$.

Calcoliamo ora la pulsazione di crossover di guadagno ω_{CG} del sistema. Deve essere:

$$|G(j\omega_{CG})|=1.$$

Si ha

$$|G(j\omega)| = 2 \cdot \frac{1}{\omega \left(1 + \frac{1}{4}\omega^2\right)} = 1 \Rightarrow \omega^3 + 4\omega - 8 = 0.$$

Tale equazione si può risolvere per approssimazioni successive esplicitando il valore dell'incognita ad esempio come segue:

$$\omega = \sqrt[3]{8 - 4\omega}$$

e sostituendo al secondo membro un valore di prova per la pulsazione si determina un secondo valore per la stessa. Si sostituisce quest'ultimo ancora a secondo membro e si itera sino a giungere a convergenza. Nel nostro caso si giunge in pochi passi ad una soluzione con il valore di prova $\omega=1 \text{ rad s}^{-1}$ (dove tale valore di prova è scelto sulla base dell'andamento del diagramma di Bode delle ampiezze asintotico, che interseca l'asse a 0 dB nella decade 1-10 rad):

$$\omega_1=1.00;$$

$$\omega_2=1.59;$$

$$\omega_3=1.18;$$

$$\omega_4=1.48;$$

$$\omega_5=1.27;$$

$$\omega_6=1.43;$$

$$\begin{aligned}\omega_7 &= 1.32; \\ \omega_8 &= 1.40; \\ \omega_9 &= 1.34; \\ \omega_{10} &= 1.38; \\ \omega_{11} &= 1.35; \\ \omega_{12} &= 1.37; \\ \omega_{13} &= 1.36; \\ \omega_{14} &= 1.36.\end{aligned}$$

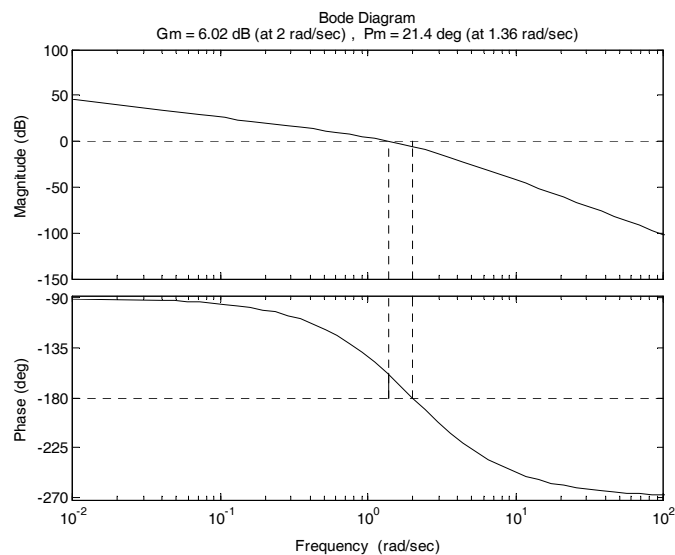
Dunque la soluzione reale dell'equazione su riportata (che è del terzo ordine e dunque ha tre soluzioni, di cui due complesse) è:

$$\omega_{CG} \approx 1.36 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Il margine di fase del sistema vale quindi:

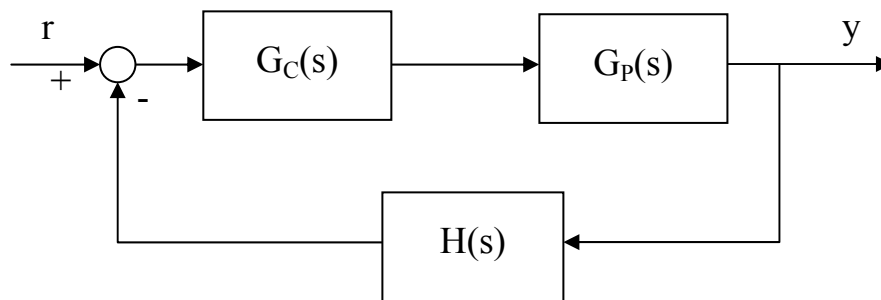
$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - 2\arctg(0.5\omega_{CG}) + \pi \approx 0.37 \text{ rad } (21^\circ).$$

Evidentemente, il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre tale margine di stabilità è notevolmente elevato.



SINTESI DEL REGOLATORE SUL RAMO DIRETTO

Con riferimento al sistema in figura, descriviamo ora la procedura tipica di progetto di un anello di retroazione, supposte note le funzioni di trasferimento del plant e del trasduttore, quando il regolatore è posto sul ramo diretto in cascata al plant (compensazione in serie o in cascata). Questa è infatti la configurazione tipica dell'anello di retroazione.



Nel progetto si considera inizialmente un semplice regolatore dato da un amplificatore di guadagno $G_C(s)=K$. Dopo aver verificato che il sistema retroazionato sia asintoticamente stabile, in genere il primo parametro che si determina in fase di progetto è la costante di posizione (per sistemi di tipo 0), di velocità (per sistemi di tipo 1), o di accelerazione (per sistemi di tipo 2), ossia il guadagno K , in base alle specifiche di precisione dell'errore a regime, della sensibilità ai disturbi e alle variazioni parametriche.

In genere questa procedura porta a fissare un minimo valore del guadagno K che garantisce la precisione richiesta. Conviene attestarsi su tale valore minimo, poiché come è noto solitamente le specifiche sulla precisione e le caratteristiche di stabilità di un sistema sono conflittuali. Infatti comunemente la stabilità del sistema in anello chiuso peggiora all'aumentare del guadagno, poiché i rami del luogo delle radici tendono a spostarsi verso il semipiano destro di Gauss o, ragionando in termini di diagramma di Nyquist, all'aumentare dei moduli il diagramma polare tende ad abbracciare il punto critico, sì da non verificare il criterio di Nyquist ridotto.

Successivamente si analizza se il sistema in retroazione soddisfa le specifiche di stabilità e di velocità di risposta. Se tali specifiche non sono soddisfatte, occorre progettare una opportuna rete correttiva $G_C(s)$ da porre in cascata al sistema e al regolatore proporzionale in modo da modificare le caratteristiche dinamiche del sistema in anello chiuso. In questo caso, inoltre, il guadagno K del regolatore proporzionale va scelto in base alle specifiche di precisione precedentemente analizzate per l'intero sistema cos compensato.

La sintesi del compensatore può essere realizzata o utilizzando specifiche nel dominio del tempo (con il luogo delle radici) o specifiche nel dominio della frequenza (con i diagrammi di Bode o di Nyquist). Generalmente si procede per successive approssimazioni.

Nella compensazione serie generalmente si utilizzano i regolatori standard (o PID) o le reti corretttrici (ritardatrice, anticipatrice o ritardo-anticipo).

Nel primo caso il problema diviene quello di fissare opportunamente i parametri del regolatore secondo diversi metodi pratici di taratura.

Se invece si usano reti corretttrici il problema consiste nel fissare i parametri caratteristici che compaiono nella funzione di trasferimento del regolatore (costanti di tempo, coefficiente α di partizione).

Esaminiamo ora il problema della sintesi di reti corretttrici. Questa si può effettuare sia nel dominio della frequenza, utilizzando i diagrammi di Bode o Nyquist e analizzando i margini di stabilità, oppure nel dominio del tempo con il metodo del luogo delle radici.

COMPENSAZIONE CON RETE ANTICIPATRICE

Nel seguito consideriamo una rete anticipatrice attiva, ossia del tipo:

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}.$$

Come è noto, la rete anticipatrice presenta un anticipo di fase a tutte le frequenze, con un massimo nella sua pulsazione media geometrica tra lo zero e il polo della rete.

Pertanto l'uso di una rete siffatta permette un miglioramento del margine di fase del sistema complessivo.

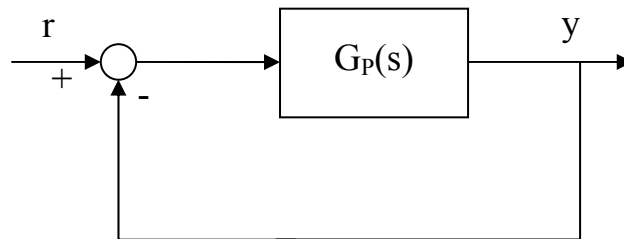
Alle basse frequenze ($\omega \rightarrow 0$) il guadagno della rete è unitario (0 dB), perciò essa non influenza il comportamento a regime, vincolato dalla specifica sulla costante di errore. Alle alte frequenze la rete fornisce un guadagno positivo di valore $-20 \log_{10} \alpha$ dB. Pertanto l'uso di una anticipatrice determina un aumento della pulsazione di crossover di guadagno della funzione di riposta armonica di anello, producendo un allargamento della banda passante in anello chiuso. Ciò ha, come è noto, un effetto benefico sulla rapidità di riposta del sistema.

Dunque la rete anticipatrice ha effetti benefici sia in termini di stabilità che di prontezza di risposta del sistema.

Nel seguito vediamo un classico esempio di stabilizzazione con rete anticipatrice.

ESEMPIO

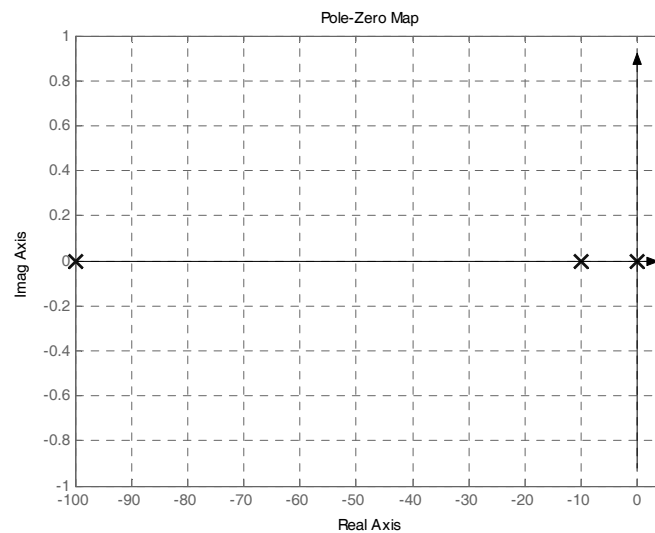
Consideriamo il sistema in figura con retroazione unitaria



dove

$$G_P(s) = \frac{100}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}$$

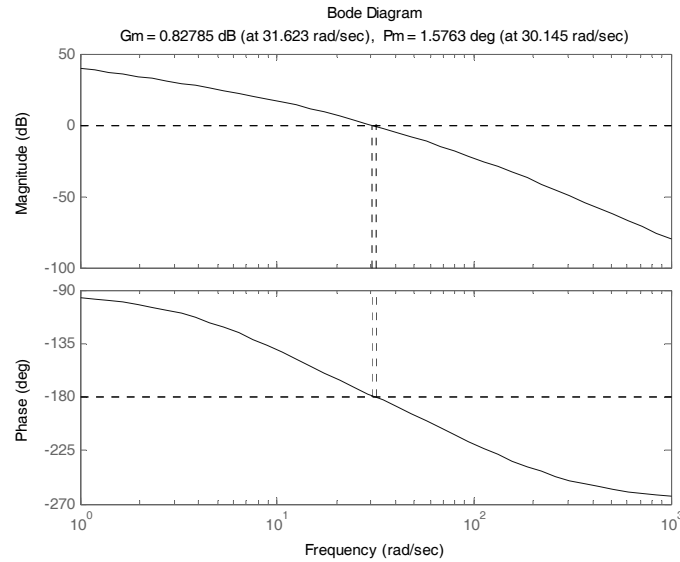
e il sistema in anello aperto ha la mappa poli-zeri in figura.



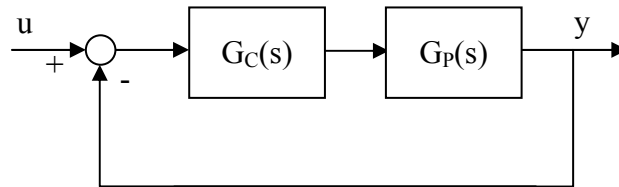
Il sistema in anello chiuso ha una costante di velocità elevata $K_V=100$ ed un errore di velocità molto buono $e_v=0.01$ ma presenta dei poli dominanti, che possono essere

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

calcolati ad esempio con un software come il Matlab, cui sono associati dei modi molto lenti: $p_{1/2} = -0.39 \pm j 30.26$. Inoltre il terzo polo vale $p_3 = -109.23$. Pertanto il margine di fase del sistema è prossimo allo zero, come si vede dalla figura successiva.



Un primo metodo per migliorare la stabilità del sistema consiste nel diminuirne il guadagno di anello. Ad esempio, considerando un regolatore in serie sul ramo diretto come in figura



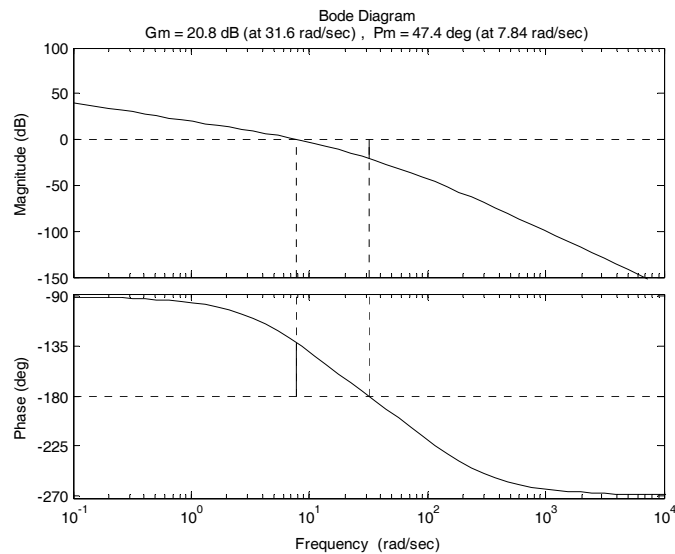
con

$$G_C(s) = \frac{1}{10}$$

si verifica che il sistema in anello chiuso presenta dei poli dominanti, calcolati ad esempio con il Matlab, molto più lontani dall'asse immaginario rispetto a quelli del caso precedente: $p_{1/2} = -4.46 \pm j 8.89$. Inoltre il terzo polo vale $p_3 = -101.09$. Pertanto il margine di fase del sistema è molto migliorato, come si verifica dalla figura

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

successiva. Tuttavia il sistema in anello chiuso ha ora una costante di velocità che si è ridotta di un decimo $K_V=10$ e dunque un errore di velocità che è decuplicato $e_V=0.1$.

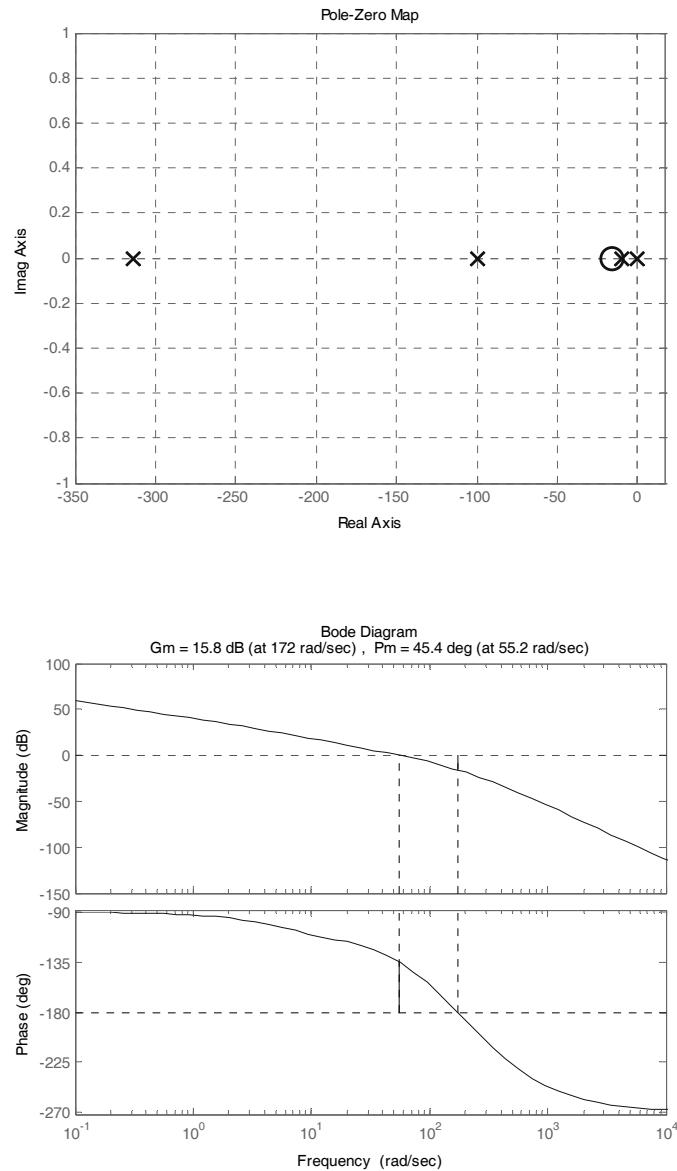


Un metodo alternativo per migliorare la stabilità del sistema senza inficiarne la precisione consiste nell'utilizzare una rete anticipatrice attiva in cascata al sistema lasciandone invariato il guadagno. Ad esempio, sceglie la seguente rete compensatrice, con attenuazione $\alpha=1/20$ e costante di tempo $\tau=1/16 \cong 0.06$ s:

$$G_C(s) = \frac{1 + \frac{1}{16}s}{1 + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{16}s} = \frac{1 + \frac{1}{16}s}{1 + \frac{1}{320}s}$$

Tale rete presenta uno zero a fase minima in -16 e un polo a fase minima in -320. Il sistema complessivo ha dunque una mappa poli zeri in anello aperto come nella figura successiva.

L'effetto dell'aumento di fase introdotto dall'anticipatrice si osserva facilmente rappresentando i diagrammi di Bode e calcolando il nuovo margine di fase del sistema. Si osserva che anche il margine di guadagno aumenta, come nel caso precedente di compensazione con il solo regolatore proporzionale.

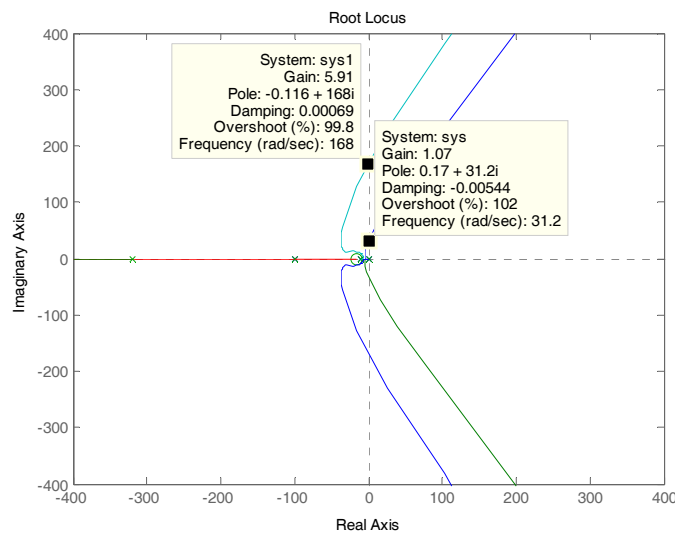
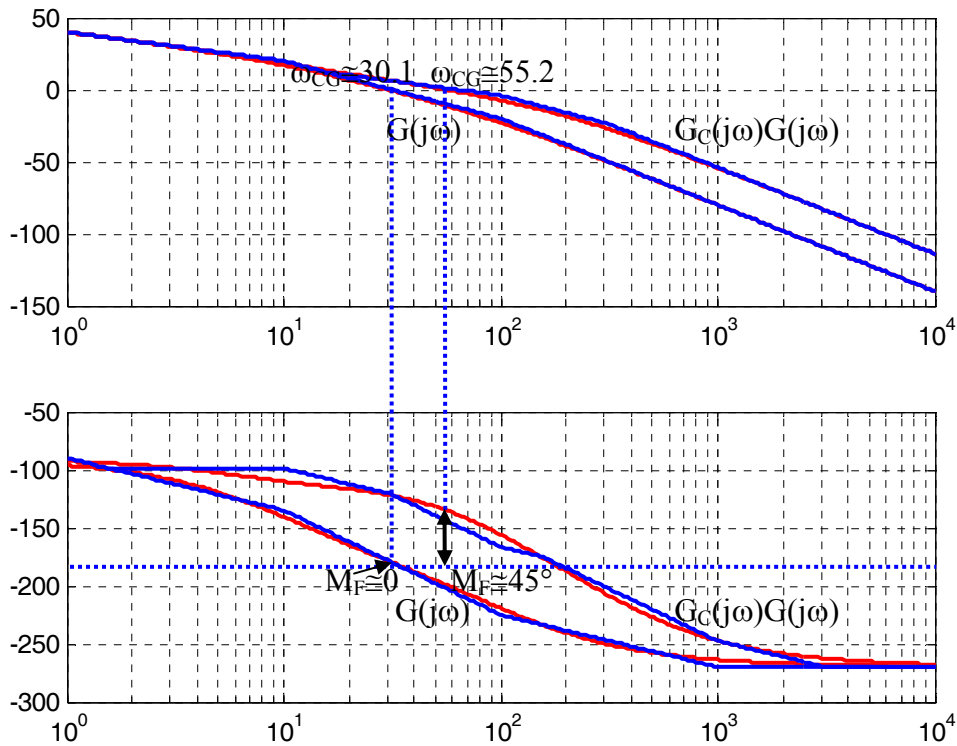


In questo caso, però, avendo introdotto in cascata al sistema originario una rete che ha guadagno statico unitario, il sistema in anello chiuso ha una costante di velocità invariata rispetto a quella del sistema non compensato ($K_V=100$) e dunque un errore di velocità che è pari a quello iniziale ($e_v=0.01$).

Inoltre, come si osserva dal raffronto tra i diagrammi di Bode compensato e non, la pulsazione di crossover dei guadagni, cui è legata la banda, aumenta: il sistema compensato è più pronto di quello originario.

Infatti il sistema presenta ora i seguenti poli in anello chiuso (in numero pari a quattro per via dell'incremento di ordine del sistema dovuto all'introduzione della rete

anticipatrice): $p_1=-343.48$, $p_{2/3}=-34.41 \pm j 64.88$ e $p_4=-17.69$, oltre ad uno zero $z_1=-16$. Quest'ultimo ha l'effetto pratico di cancellare il polo p_4 del sistema chiuso in retroazione, in modo che questo presenti in sostanza una coppia di poli dominanti complessi e coniugati data da $p_{2/3}$.



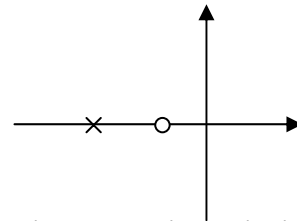
Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

Un ulteriore raffronto tra i due sistemi può essere fatto confrontandone i due luoghi delle radici. Si osserva che il sistema compensato è ancora condizionatamente stabile ma il guadagno critico è maggiore di quello del sistema non compensato.

COMPENSAZIONE CON RETE ANTICIPATRICE CON CANCELLAZIONE POLO-ZERO

Consideriamo ancora una rete anticipatrice attiva, del tipo:

$$G(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s},$$



che ha una mappa poli zeri come quella in figura. Un classico caso in cui si utilizza una rete anticipatrice per compensare un sistema in retroazione è quello in cui i poli dominanti in anello chiuso del sistema originario, ossia i rami dominanti del luogo delle radici, sono eccessivamente vicini all'asse immaginario, per cui la prontezza del sistema dato in anello chiuso non rispetta le specifiche di progetto.

In tal caso è sufficiente cancellare uno dei poli dominanti in anello aperto (generalmente quello più vicino all'asse immaginario, che rallenta maggiormente il sistema) con lo zero della rete anticipatrice. Il polo della rete viene poi posto a sinistra dello zero e sufficientemente lontano da rispettare le specifiche.

Si osserva che i soli poli cancellabili con questo metodo sono quelli contenuti nel semipiano sinistro di Gauss. In altre parole, i poli in anello aperto posti sull'asse immaginario o nel semipiano destro non sono cancellabili.

Infatti la conoscenza dei poli di sistema non è mai priva di imprecisioni, poiché generalmente deriva dalla modellazione di un sistema reale in cui alcune dinamiche di ordine superiore (attriti, perdite di vario genere, non linearità) possono essere state trascurate. Per tale motivo la cancellazione di un polo sull'asse immaginario o nel semipiano destro, non essendo mai quantitativamente perfetta, lascerebbe i modi di tale polo presenti nella risposta indiciale, seppure con un residuo molto piccolo. Poiché tali modi sono divergenti o comunque limitati, la risposta non convergerebbe a zero (il sistema non sarebbe asintoticamente stabile).

In altre parole, se si tentasse di cancellare un polo in anello aperto disposto nel piano destro o sull'asse immaginario, il ramo che si allontana da tale polo rimarrebbe presente nel luogo delle radici, giungendo in uno zero molto vicino al polo. Ciò

priverebbe, almeno per alcuni valori del guadagno, il sistema della caratteristica di asintotica stabilità, rendendo dunque il progetto fallimentare.

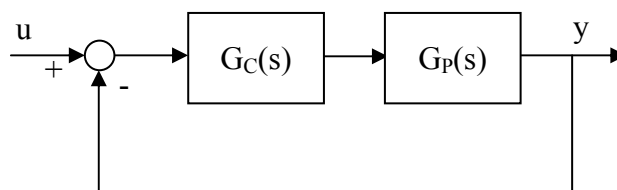
Vediamo ora con alcuni esempi la compensazione con rete anticipatrice per mezzo della tecnica di cancellazione polo-zero.

ESEMPIO

Compensare il sistema in retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$G_P(s) = \frac{K}{s(s+1)}, K > 0$$

in modo che in anello chiuso il sistema presenti un errore di velocità inferiore o uguale a 0.1 e un tempo di assestamento al 5% inferiore o uguale a 3 secondi.



Consideriamo dunque un generico regolatore con funzione di trasferimento $G_C(s)$ in serie al sistema e, con riferimento alla figura, poniamo dunque inizialmente

$$G_C(s) = 1$$

in modo da investigare il sistema privo di regolatore. Poiché esso è di tipo 1, si ha un errore di velocità finito e la costante di velocità vale:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} s G_C(s) G_P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s+1} = K.$$

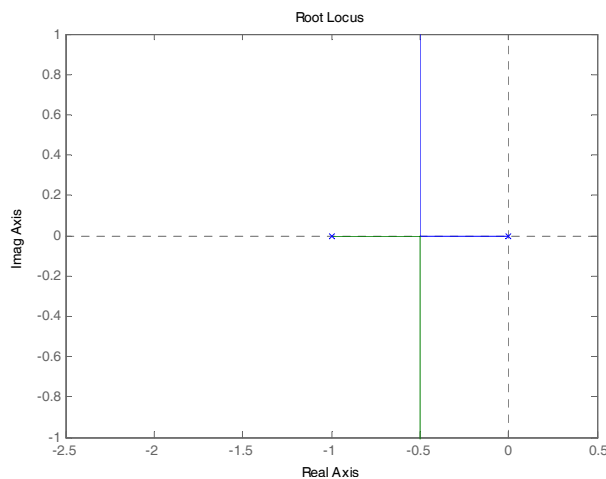
Quindi si richiede un guadagno

$$e_V = \frac{1}{K_V} = \frac{1}{K} \leq 0.1 \Rightarrow K \geq 10.$$

Il sistema in anello chiuso è sempre asintoticamente stabile, infatti si ha

$$G_0(s) = \frac{K}{s^2 + s + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

e il luogo delle radici mostrato in figura è tutto contenuto nel semipiano sinistro di Gauss.



Dalla precedente espressione della funzione di trasferimento in anello chiuso si deduce inoltre che il sistema retroazionato presenta pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{K}$ e coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{1}{2\sqrt{K}}$. Pertanto, i poli in anello chiuso sono complessi e coniugati per $\delta = \frac{1}{2\sqrt{K}} < 1 \Leftrightarrow K > 0.25$ e in tal caso il sistema presenta un tempo di assestamento al 5% $t_{s5\%} \approx \frac{3}{\delta\omega_n} = 6s$.

Scegliamo inizialmente il minimo valore ammissibile di K , ossia $K=10$. In tal caso si ha una funzione di trasferimento in anello chiuso

$$G_0(s) = \frac{10}{s^2 + s + 10}$$

con poli complessi e coniugati in

$$p_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-40}}{2} \approx -0.5 \pm j 3.1.$$

Valutiamo il margine di fase. Si ha:

$$G_C(j\omega)G_P(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = \frac{10}{-\omega^2 + j\omega},$$

da cui

$$|G_C G_P(j\omega)| = \frac{10}{\sqrt{\omega^4 + \omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + \omega^2 - 100 = 0.$$

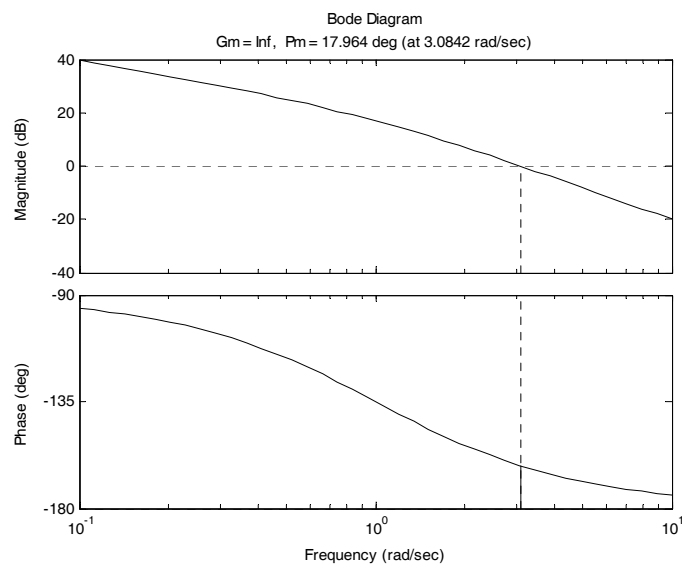
Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 + t - 100 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1+400}}{2} \approx 9.51 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{9.51} \approx 3.08 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una pulsazione di crossover del guadagno $\omega_{CG}=3.08 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G_C G_P(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega_{CG}) + \pi \approx 0.31 \text{ rad } (18^\circ).$$



Ciò conferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Tuttavia il margine di stabilità non è particolarmente elevato.

Calcoliamo anche la larghezza di banda. La banda passante del sistema $B=\omega_f$ indica la pulsazione ω_f alla quale risulta:

$$|G_0(j\omega_f)| = \frac{|G_0(j0)|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |G_0(j\omega_f)|_{dB} = |G_0(j0)|_{dB} - 3dB.$$

In questo caso si ha:

$$G_0(j\omega) = \frac{10}{-\omega^2 + j\omega + 10},$$

quindi

$$|G_0(0)| = 1.$$

Dunque deve essere:

$$\frac{10}{\sqrt{(-\omega^2 + 10)^2 + \omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega^4 - 19\omega^2 + 100 = 200 \Rightarrow \omega^4 - 19\omega^2 - 100 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 - 19t - 100 = 0 \Rightarrow t = \frac{19 + \sqrt{361 + 400}}{2} = 23.29 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{23.29} = 4.83 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una banda $B=4.83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o $f=B/(2\pi)=0.77 \text{ Hz}$.

Consideriamo ora la seconda specifica. Come anticipato, si ha:

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{0.5} = 6 \text{ s}$$

che non verifica la specifica imposta sulla rapidità. La situazione è analoga quando il guadagno è di valore maggiore. In effetti si osserva che al variare del guadagno K ,

quando i poli in anello chiuso sono complessi e coniugati, non varia la loro parte reale, che resta fissa a 0.5, come si verifica dal luogo delle radici, dunque il tempo di assestamento al 5% è sempre pari a 6 secondi.

Scegliamo dunque di mantenere il valore minimo del guadagno $K=10$ fissato con la specifica sulla precisione e introduciamo sul ramo diretto una rete anticipatrice con uno zero che cancelli il polo in -1 in anello aperto del plant (ovvero poniamo nella rete $\tau=1$). Posizioniamo poi il polo della rete sufficientemente lontano nel semipiano sinistro (in modo che la rete correttiva sia appunto una anticipatrice):

$$G_C(s) = \frac{1+s}{1+\alpha s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Osserviamo che in questo caso si è scelta una rete anticipatrice con guadagno statico unitario, in modo da non modificare la specifica imposta sulla precisione. Inoltre, avendo posizionato lo zero dell'anticipatrice in $1/\tau=1$, perché la rete sia un'anticipatrice il suo polo, che vale $-1/\alpha\tau=-1/\alpha$ ed è a fase minima, deve avere un costante di tempo inferiore a $\tau=1$.

Con l'introduzione della rete anticipatrice la funzione di trasferimento in anello aperto vale:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{10}{s(s+1)} \cdot \frac{1+s}{1+\alpha s} = \frac{10}{s(1+\alpha s)}.$$

Ne consegue che la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa:

$$G_0(s) = \frac{10}{\alpha s^2 + s + 10} = \frac{\frac{10}{\alpha}}{s^2 + \frac{1}{\alpha}s + \frac{10}{\alpha}}$$

ed è dunque scritta nella forma di riferimento dei sistemi del secondo ordine, con

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \\ 2\delta\omega_n = \frac{1}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{10}{\alpha}} \\ \delta = \frac{1}{2\sqrt{10\alpha}} \end{cases}.$$

Quindi il tempo di assestamento del sistema in anello chiuso vale

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{\frac{1}{2\alpha}} = 6\alpha.$$

Imponiamo dunque

$$t_{s5\%} = 6\alpha \leq 3,$$

da cui si ottiene

$$\alpha \leq 0.5.$$

A questo risultato si poteva giungere anche semplicemente osservando che l'effetto complessivo della regolazione con l'anticipatrice è quello di spostare il polo negativo in anello aperto a sinistra della sua posizione iniziale. I rami del luogo delle radici si spostano così verso il polo in anello aperto introdotto dalla rete anticipatrice, con un vantaggio in termini di prontezza di risposta. Inoltre la forma del luogo è invariata, poiché, a causa della cancellazione, in anello aperto le singolarità realmente efficaci sono il polo in $-1/\alpha$ dell'anticipatrice e il polo nell'origine del plant. In effetti la posizione del polo $-1/\alpha$ determina anche la posizione dei poli complessi e coniugati in anello chiuso che, come è noto, si trovano per simmetria sulla retta $s=-1/(2\alpha)$, ossia hanno parte reale $-1/(2\alpha)$.

La specifica sul tempo di assestamento diventa così

$$t_{s5\%} = \frac{3}{\frac{1}{2\alpha}} = 6\alpha \leq 3,$$

da cui si ottiene nuovamente

$$\alpha \leq 0.5.$$

Scegliamo allora il valore massimo $\alpha=0.5$, ossia la minima distanza dall'asse immaginario del polo posto nel semipiano sinistro ($s=-1/\alpha=-2$) che consente la compensazione. La rete compensatrice scelta è dunque

$$G_C(s) = \frac{1+s}{1+0.5s},$$

quindi la funzione di trasferimento di anello diventa:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{(1+s)}{1+0.5s} \cdot \frac{10}{s(s+1)} = \frac{10}{s(1+0.5s)}$$

ed è evidente la cancellazione polo-zero.

Il sistema con il regolatore è ancora di tipo 1 e la precisione è invariata, poiché la rete anticipatrice utilizzata ha guadagno statico unitario. Infatti si ha:

$$K_V = \lim_{s \rightarrow 0} sG_C(s)G_P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10}{(0.5s+1)} = 10$$

ed in definitiva

$$e_V = 0.1$$

che verifica la specifica sulla precisione.

Il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, infatti si ha

$$G_0(s) = \frac{10}{0.5s^2 + s + 10} = \frac{20}{s^2 + 2s + 20}$$

con poli complessi e coniugati in

$$p_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-20} \approx -1 \pm j 4.4.$$

Il tempo di assestamento al 5% vale quindi:

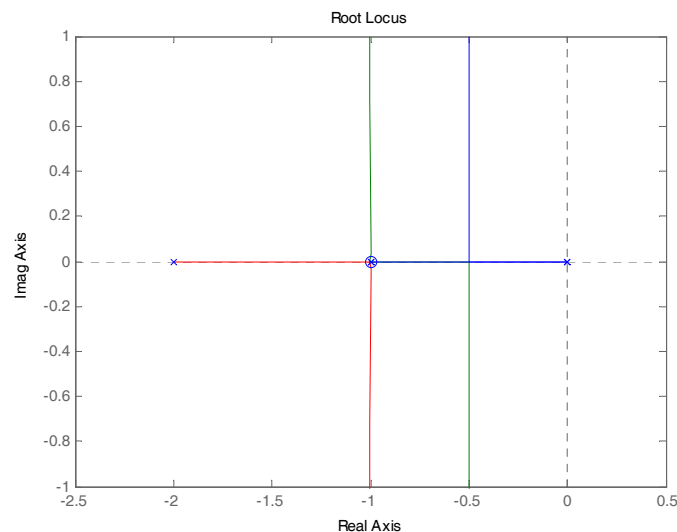
$$t_{s5\%} = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{1} = 3 \text{ s}$$

che verifica la specifica imposta sulla rapidità. In effetti il sistema in anello aperto, per via delle rete anticipatrice è il seguente:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{1+s}{1+0.5s} \cdot \frac{K}{s(s+1)} = \frac{K}{s(1+0.5s)} = \frac{2K}{s(s+2)} = \frac{K'}{s(s+2)}$$

Il nuovo luogo delle radici è quello nella figura successiva.

La forma del luogo è invariata, ma è evidente l'effetto complessivo della regolazione, che provoca lo spostamento dei rami del luogo delle radici verso il polo della anticipatrice, con un vantaggio in termini di prontezza di risposta.



Valutiamo ora l'effetto della compensazione sul margine di fase. Si ha:

$$G_C(j\omega)G_P(j\omega) = \frac{20}{j\omega(j\omega+2)} = \frac{20}{-\omega^2 + 2j\omega},$$

da cui

$$|G_C G_P(j\omega)| = \frac{20}{\sqrt{\omega^4 + 4\omega^2}} = 1 \Rightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 400 = 0.$$

Ponendo $\omega^2 = t$ e risolvendo per t si ha:

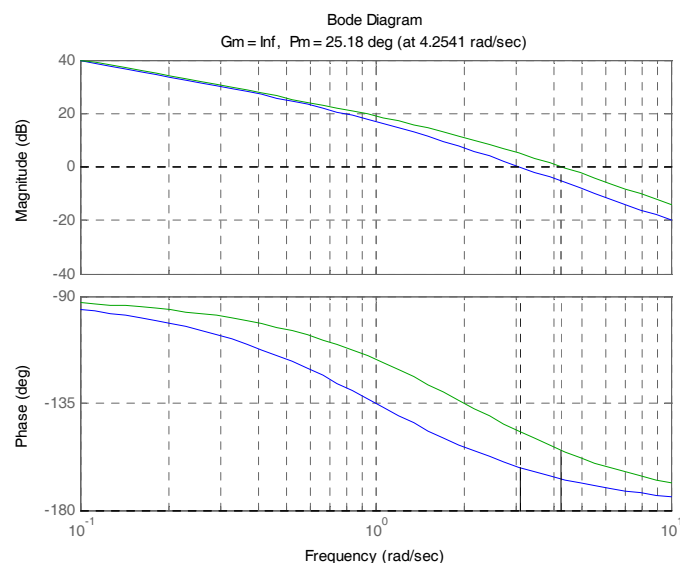
$$t^2 + 4t - 400 = 0 \Rightarrow t = -2 + \sqrt{4 + 400} \approx 18.1 \Rightarrow \omega_{CG} = \sqrt{18.1} \approx 4.25 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una pulsazione di crossover del guadagno $\omega_{CG} = 4.25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, superiore rispetto a quella ottenuta con il sistema non compensato.

Il margine di fase vale quindi:

$$M_F = \angle G_c G_P(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg(0.5\omega_{CG}) + \pi \approx 0.44 \text{ rad } (25.2^\circ).$$

Ciò conferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile, essendo il margine di fase positivo. Inoltre il margine di fase è aumentato di 7° rispetto alla situazione iniziale, migliorando la stabilità relativa del sistema. Questa può evidentemente essere ulteriormente incrementata diminuendo il valore di a , ossia spostando più a sinistra nel semipiano di Gauss il polo della rete anticipatrice.



Calcoliamo anche la nuova larghezza di banda. In questo caso si ha:

$$G_0(j\omega) = \frac{20}{-\omega^2 + 2j\omega + 20},$$

quindi

$$|G_0(0)| = 1.$$

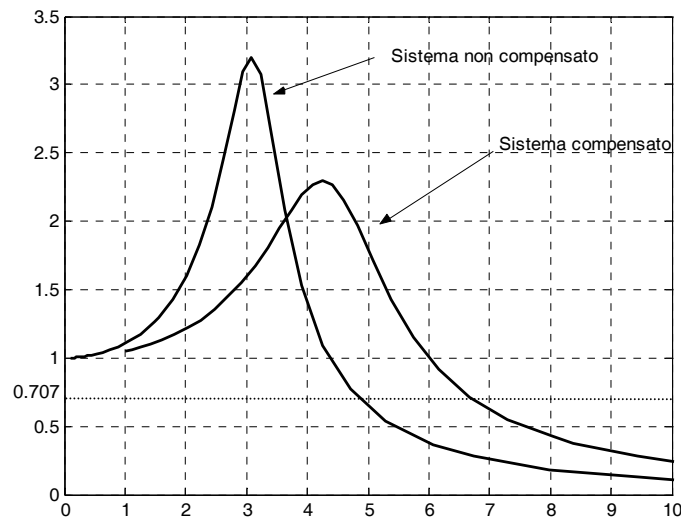
Dunque deve essere:

$$\frac{20}{\sqrt{(-\omega^2 + 20)^2 + 4\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega^4 - 36\omega^2 + 400 = 800 \Rightarrow \omega^4 - 36\omega^2 - 400 = 0.$$

Ponendo $\omega^2=t$ e risolvendo per t si ha:

$$t^2 - 36t - 400 = 0 \Rightarrow t = 18 + \sqrt{324 + 400} = 44.91 \Rightarrow \omega_f = \sqrt{44.91} \approx 6.70 \left[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \right].$$

Si ha quindi una banda $B=6.70 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ o $f=B/(2\pi)=1.07 \text{ Hz}$, che è superiore rispetto al caso in cui il sistema non è compensato. In figura sono confrontati i diagrammi dei moduli effettivi delle funzioni di risposta armonica complessive nei due casi di sistema compensato e non.



È evidente dalla figura precedente come il sistema compensato presenti una banda più larga di quello privo di rete anticipatrice, contro un picco di risonanza più contenuto.

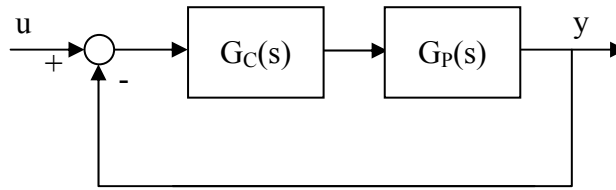
ESEMPIO

Compensare il sistema in retroazione unitaria negativa avente funzione di trasferimento di anello

$$G_P(s) = \frac{10K}{(1+s)(1+2s)}, \quad K > 0$$

in modo che in anello chiuso il sistema presenti un errore di posizione inferiore o uguale a 0.005 e un coefficiente di smorzamento maggiore o uguale a 0.18. Si determini quindi la massima sovraelongazione percentuale del sistema compensato.

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.



Consideriamo dunque un generico regolatore con funzione di trasferimento $G_C(s)$ in serie al sistema e, con riferimento alla figura, poniamo dunque inizialmente

$$G_C(s) = 1$$

in modo da investigare il sistema privo di regolatore. Poiché esso è di tipo 0, si ha un errore di posizione finito e la costante di posizione vale:

$$K_P = \lim_{s \rightarrow 0} G_C(s)G_P(s) = \frac{10K}{(1+s)(1+2s)} = 10K.$$

Quindi si richiede:

$$e_p = \frac{1}{1+K_P} = \frac{1}{1+10K} \leq 0.005 \Rightarrow K \geq 19.9.$$

Per semplicità, si sceglie quindi il minimo valore di K intero consentito:

$$K=20.$$

Il sistema in anello chiuso ha una funzione di trasferimento

$$G_0(s) = \frac{200}{(1+s)(1+2s) + 200} = \frac{200}{2s^2 + 3s + 201} = \frac{200}{201} \cdot \frac{\frac{201}{2}}{s^2 + \frac{3}{2}s + \frac{201}{2}}$$

che è nella forma di riferimento dei sistemi del secondo ordine, con

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2}} \\ 2\delta\omega_n = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2}} \approx 10.025 \\ \delta = \frac{3}{2\sqrt{402}} \approx 0.075 \end{cases}$$

Dunque il sistema è asintoticamente stabile con due poli complessi e coniugati, avendo un coefficiente di smorzamento positivo e inferiore all'unità. Tuttavia la seconda specifica non è verificata.

Scegliamo dunque di mantenere il valore $K=20$ fissato con la specifica sulla precisione e introduciamo sul ramo diretto una rete anticipatrice:

$$G_C(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}, \quad 0 < \alpha < 1, \tau > 0.$$

Cancelliamo il polo più lento in anello aperto (posto in -0.5) con uno zero posto nella stessa posizione:

$$1 + \tau s \Big|_{-0.5} = 0 \Rightarrow 1 - 0.5\tau = 0 \Rightarrow \tau = 2.$$

Poniamo poi il polo della rete sufficientemente lontano nel semipiano sinistro (in modo che la rete correttiva sia una anticipatrice):

$$G_C(s) = \frac{1 + 2s}{1 + 2\alpha s}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Con l'introduzione della rete anticipatrice la funzione di trasferimento in anello aperto vale:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{200}{(1+s)(1+2s)} \cdot \frac{1+2s}{1+2\alpha s} = \frac{200}{(1+s)(1+2\alpha s)}.$$

Ne consegue che la funzione di trasferimento in anello chiuso diventa:

$$G_0(s) = \frac{200}{(1+s)(1+2\alpha s) + 200} = \frac{200}{2\alpha s^2 + (2\alpha + 1)s + 201} = \frac{200}{201} \cdot \frac{\frac{201}{2\alpha}}{s^2 + \frac{(2\alpha + 1)}{2\alpha}s + \frac{201}{2\alpha}}$$

che è nella forma di riferimento dei sistemi del secondo ordine, con

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2\alpha}} \\ 2\delta\omega_n = \frac{(2\alpha+1)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_n = \sqrt{\frac{201}{2\alpha}} \\ \delta = \frac{(2\alpha+1)}{2\sqrt{402\alpha}} \end{cases}.$$

Imponiamo quindi la seconda specifica:

$$\delta = \frac{(2\alpha+1)}{2\sqrt{402\alpha}} = 0.18 \Rightarrow 2\alpha+1 = 0.36\sqrt{402\alpha} \Rightarrow 4\alpha^2 - 48.1\alpha + 1 = 0.$$

Scegliamo la soluzione minore di uno di questa equazione:

$$\alpha \approx 0.02.$$

La rete compensatrice scelta è dunque

$$G_C(s) = \frac{1+2s}{1+0.04s},$$

quindi la funzione di trasferimento di anello diventa:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{200}{(1+s)(1+0.04s)}.$$

Si ha poi:

$$G_0(s) = \frac{200}{201} \cdot \frac{5025}{s^2 + 13.5s + 5025}$$

con poli complessi e coniugati in

$$p_{1/2} = -6.25 \pm \sqrt{39.06 - 5025} \approx -6.25 \pm j 70.57$$

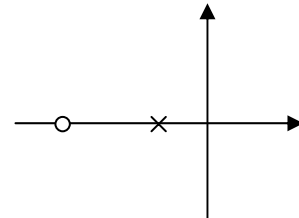
e coefficiente di smorzamento richiesto $\delta=0.18$. La massima sovraelongazione percentuale del sistema compensato vale dunque:

$$M_P = 100e^{-\frac{\delta\pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100e^{-\frac{0.18\pi}{\sqrt{1-0.18^2}}} \approx 56.3\%.$$

COMPENSAZIONE CON RETE RITARDATRICE

Nel seguito consideriamo una rete ritardatrice del tipo:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s},$$



che ha un mappa poli zeri come quella in figura. Come è noto, la maggior parte dei sistemi in retroazione sono condizionatamente stabili. Perciò una riduzione del guadagno corrisponde generalmente ad un miglioramento delle caratteristiche di stabilità. Tale miglioramento è tuttavia generalmente controbilanciato da un peggioramento indesiderato della precisione. Se si desidera stabilizzare il sistema senza diminuire il guadagno del sistema è allora possibile usare una rete ritardatrice. Infatti essa si comporta come un attenuatore, avendo un modulo sempre inferiore all'unità, ma presenta un guadagno statico unitario, dunque non influenza la precisione a regime del sistema retroazionato.

ESEMPIO

Consideriamo ad esempio un plant con retroazione unitaria:

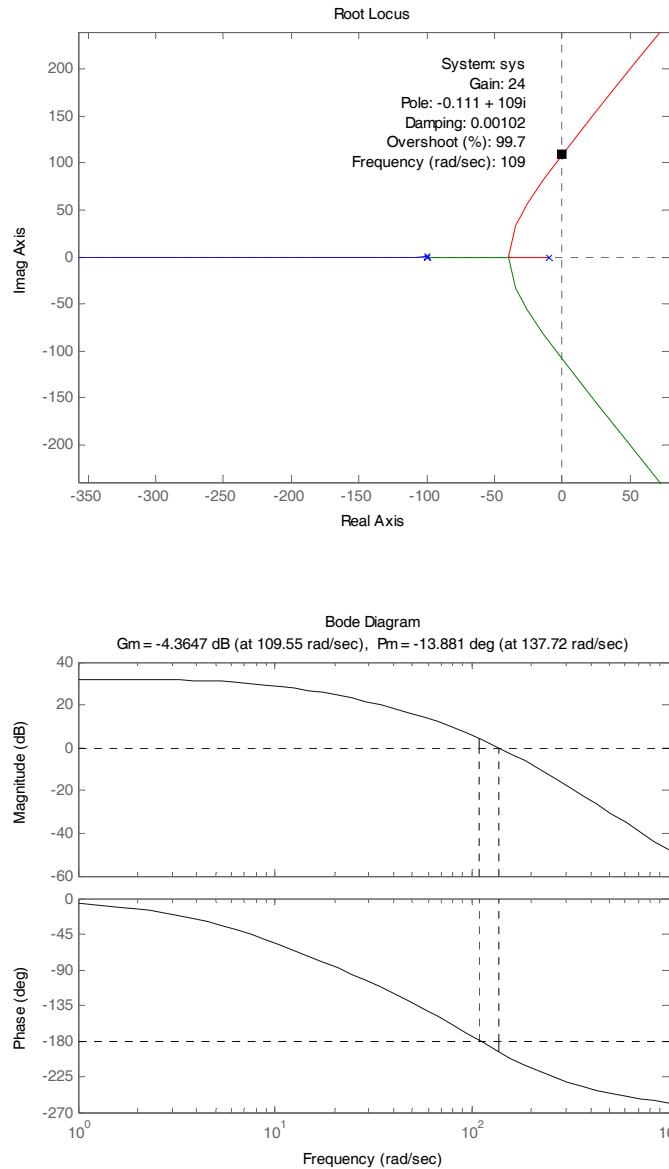
$$G(s) = \frac{40}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)^2}$$

con due poli in anello aperto in -100 e un polo dominante in -10.

Il sistema in anello chiuso con guadagno pari a 40 è instabile. Infatti il luogo delle radici, ottenuto sostituendo al numeratore di $G(s)$ il generico guadagno K , interseca l'asse immaginario in due punti che corrispondono ad un guadagno critico pari a circa 24.

In particolare, con un valore del guadagno pari a 40 (come nel caso del sistema non compensato), il sistema in anello chiuso presenta dei poli dominanti, calcolati ad

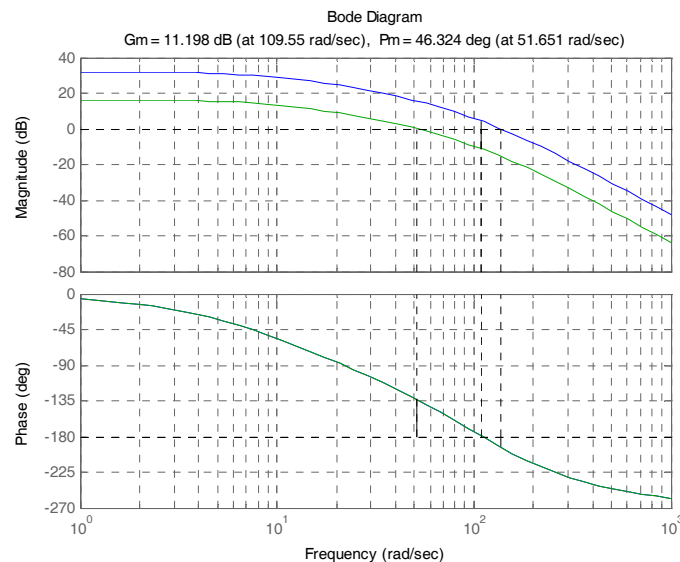
esempio con il Matlab, a parte reale positiva. I tre poli valgono infatti: $p_1=-233.77$, $p_{2/3}=+11.86 \pm j 131.92$. Del resto il margine di fase e di guadagno del sistema sono negativi, come si verifica tracciando i diagrammi di Bode del sistema.



Un semplice metodo per stabilizzare il sistema è scegliere un valore del guadagno minore, ad esempio con un compensatore in cascata al sistema avente funzione di trasferimento:

$$G_C(s) = \frac{1}{6}.$$

In tal caso si ha un guadagno complessivo pari a $40/6$ e un margine di fase e di guadagno soddisfacenti. Naturalmente il sistema compensato è più lento poiché la banda si restringe. Tuttavia, l'effetto particolarmente negativo di questo tipo di compensazione sta nella riduzione del guadagno statico, che rende tale intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, in termini di prontezza, precisione a regime e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello.



Se si desidera stabilizzare il sistema senza diminuire il guadagno del sistema (in modo da non ridurre la precisione) è possibile usare una rete ritardatrice. Infatti essa si comporta come un attenuatore, avendo un modulo sempre inferiore all'unità, ma presenta un guadagno statico (per $\omega \rightarrow 0$) unitario, dunque lascia invariata a regime (per $s \rightarrow 0$) la precisione, non peggiorandola.

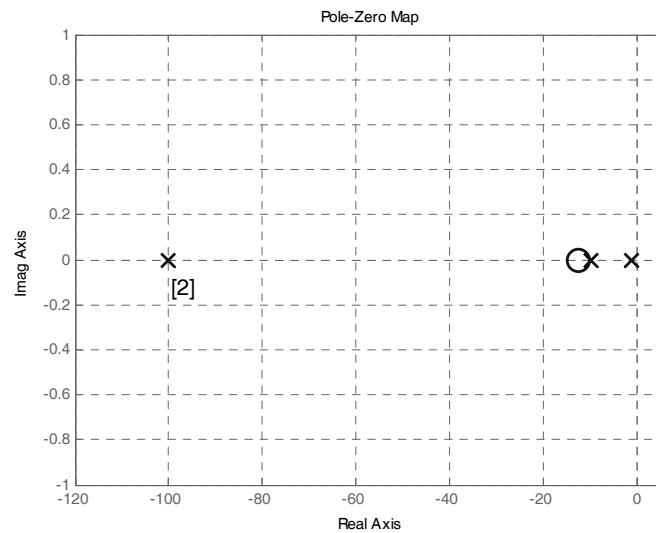
Pertanto l'uso di una rete siffatta permette un miglioramento del margine di fase del sistema complessivo, a patto che il ritardo massimo introdotto sia a frequenze sufficientemente inferiori rispetto a quelle alle quali si calcolano i margini di guadagno e fase.

Nonostante la rete ritardatrice abbia effetti benefici in termini di stabilità, essa peggiora la prontezza di risposta del sistema. Infatti il suo comportamento di attenuatore in alta frequenza determina una riduzione della pulsazione di crossover di guadagno della funzione di risposta armonica di anello, producendo un restringimento della banda passante in anello chiuso. La rapidità di risposta del sistema, dunque, peggiora. D'altro canto migliorano le proprietà filtranti del sistema rispetto al rumore.

Vediamo un classico esempio di stabilizzazione con rete ritardatrice per l'esempio precedente. Si sceglie la seguente rete compensatrice, con attenuazione $\alpha=1/9$ e costante di tempo $\tau=1/1.4 \cong 0.7$ s:

$$G_C(s) = \frac{1 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1.4} s}{1 + \frac{1}{1.4} s} = \frac{1 + \frac{1}{12.6} s}{1 + \frac{1}{1.4} s},$$

avente uno zero in -12.6 e un polo in -1.4. Il sistema complessivo ha dunque una mappa poli zeri in anello aperto come in figura.



L'effetto stabilizzante della ritardatrice si osserva facilmente rappresentando i diagrammi di Bode e calcolando il nuovo margine di fase del sistema. Si osserva che anche il margine di guadagno aumenta. Si osserva anche in questo caso la diminuzione della banda passante.

