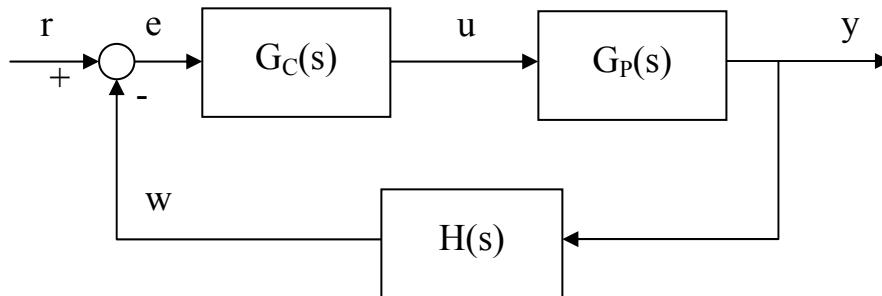


REGOLATORI STANDARD O PID

Consideriamo il classico esempio di compensazione in cascata riportato in figura, comprendente il plant o sistema controllato con funzione di trasferimento $G_P(s)$, il regolatore con funzione di trasferimento $G_C(s)$ e il trasduttore con funzione di trasferimento $H(s)$.



Nel controllo di molti processi industriali le caratteristiche dinamiche dei sistemi controllati possono variare entro ampi limiti. Può allora essere economicamente conveniente unificare gli apparati di controllo.

Si utilizzano in tal caso i cosiddetti regolatori standard, provvisti di dispositivi di correzione con parametri regolabili entro ampi limiti, così da poter essere adattati al particolare sistema di regolazione in cui vengono inseriti.

Si ottengono così dei regolatori, che hanno larga diffusione in ambito industriale, che realizzano un controllo soddisfacente di un'ampia gamma di processi. Ulteriori vantaggi sono la disponibilità di semplici regole di taratura automatica dei parametri del regolatore, nonché la possibilità di implementazione con tecnologie varie (meccaniche, pneumatiche, idrauliche, elettroniche analogiche e digitali).

In questi regolatori la variabile di controllo u è generata come somma di tre contributi: una azione proporzionale all'errore (o comunque alla variabile ottenuta dopo il sommatore) $e = r - w$, una azione di controllo proporzionale all'integrale di e (valor medio) e una ulteriore azione proporzionale alla derivata di e .

Per tale ragione i regolatori standard sono anche detti regolatori PID (acronimo di Proportional Integral Derivative).

In definitiva la generica legge di controllo ottenuta con un regolatore PID è la seguente:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt},$$

dove $K_P \geq 0$ è detto coefficiente dell'azione proporzionale (la banda proporzionale vale, in termini percentuali, $PB=100/K_P$), $K_I \geq 0$ è detto coefficiente dell'azione integrale, $K_D \geq 0$ è detto coefficiente dell'azione derivativa.

Trasformando secondo Laplace la legge di controllo si ottiene la funzione di trasferimento del generico regolatore PID:

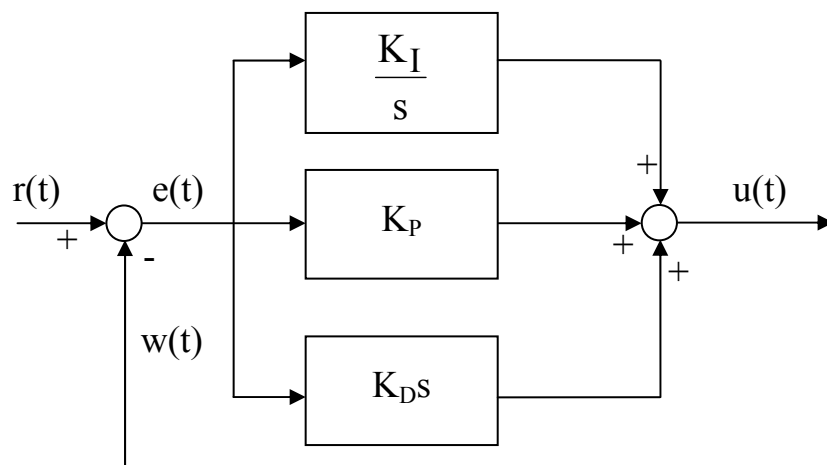
$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) = K_P \frac{1 + T_i s + T_i T_d s^2}{T_i s}$$

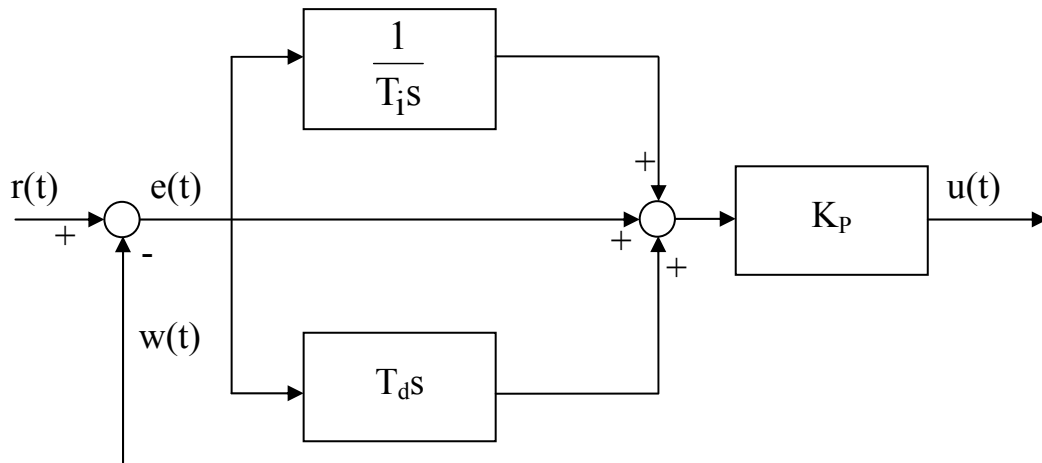
dove si è posto

$$K_I = \frac{K_P}{T_i}, \quad K_D = K_P \cdot T_d$$

e le costanti T_i e T_d , positive, hanno evidentemente le dimensioni di un tempo.

Vi sono quindi due possibili strutture generali di regolatori PID, rappresentate nelle figure seguenti.





I coefficienti

$$T_I = \frac{K_P}{K_I} > 0, \quad T_d = \frac{K_D}{K_P} > 0$$

sono detti rispettivamente costante di tempo integrale e costante di tempo derivativa.

Evidentemente, la funzione di trasferimento del regolatore PID ha un polo nell'origine e due zeri a parte reale negativa (essendo il numeratore del regolatore del secondo ordine e con coefficienti tutti positivi). In particolare gli zeri valgono

$$s = \frac{-T_i \pm \sqrt{T_i(T_i - 4T_d)}}{2T_i T_d}.$$

Quindi gli zeri sono reali distinti per $T_i > 4T_d$, sono reali coincidenti per $T_i = 4T_d$ e complessi e coniugati se $T_i < 4T_d$. Spesso si sceglie $T_i = 4T_d$ in modo da rendere i due zeri coincidenti e quindi semplificare la taratura.

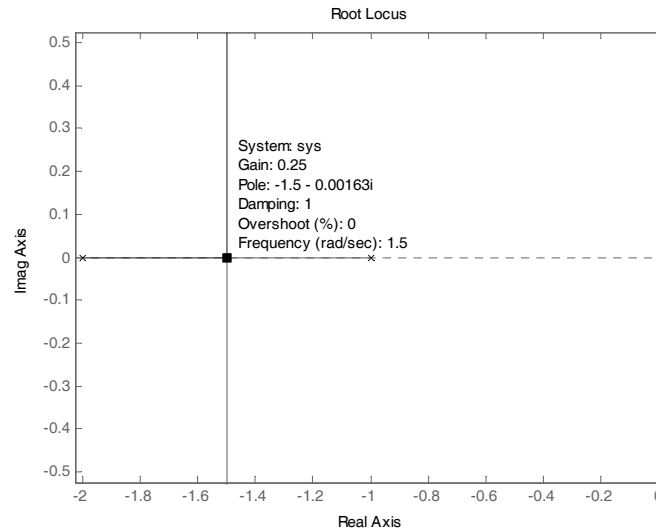
Nell'esempio successivo vediamo come è possibile agevolmente tarare un regolatore PID utilizzando la tecnica della cancellazione polo-zero.

ESEMPIO

Vediamo un esempio di controllo PID per migliorare le specifiche di un sistema. Consideriamo il sistema chiuso in retroazione unitaria con funzione di anello

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)}$$

essendo $G_C(s)=K$ il regolatore ottenuto con un semplice amplificatore di guadagno variabile. Il luogo delle radici del sistema è rappresentato in figura.



Evidentemente il minimo tempo di assestamento al 2% del sistema in anello chiuso si ottiene per $K > 0.25$, quando i poli in anello chiuso si trovano sull'asse del segmento che unisce i due poli in anello aperto -1 e -2 ed hanno quindi parte reale -1.5 : in tal caso il tempo di assestamento al 2% è pari a $4/1.5 \approx 2.67$ s. Se usiamo ora un regolatore PID che introduce uno zero in -1 (che cancella il polo dominante in anello aperto) ed uno in -4 , ossia con:

$$1 + T_i s + T_i T_d s^2 = (1+s)(1+0.25s) = 1 + 1.25s + 0.25s^2 \Rightarrow \begin{cases} T_i = 1.25 \\ T_d = \frac{0.25}{1.25} = 0.2 \end{cases}$$

e lasciamo il parametro K_P variabile in luogo del semplice guadagno iniziale. Si ha:

$$G_C(s) = \frac{K_P(1+s)(1+0.25s)}{1.25s} = \frac{K_P(s+1)(s+4)}{5s} = K \frac{(s+1)(s+4)}{s}$$

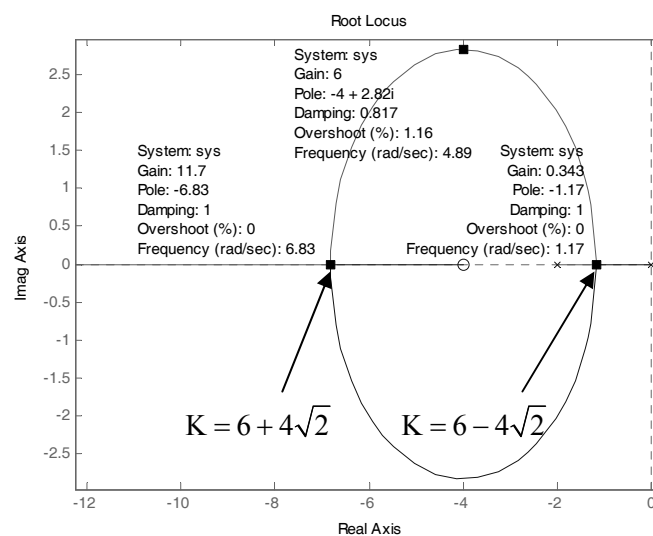
dove si è posto

$$K = \frac{K_P}{5}.$$

La funzione di trasferimento di anello del sistema compensato vale ora:

$$G_C(s)G_P(s) = K \frac{(s + 4)}{s(s + 2)}.$$

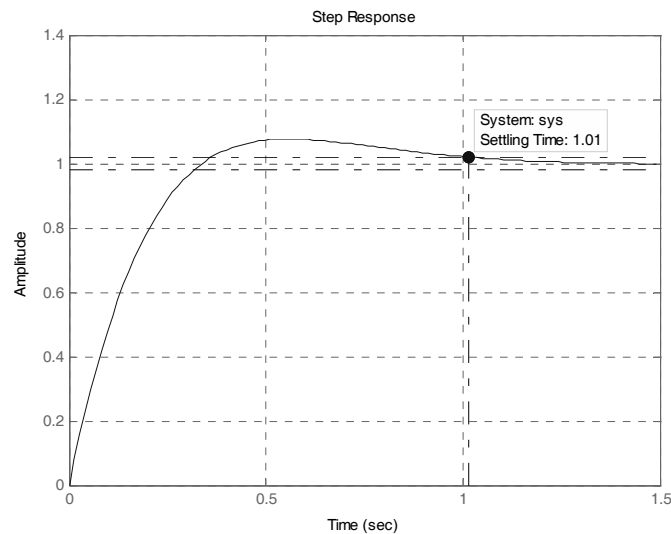
Abbiamo in altre parole cancellato il polo dominante che rallentava il sistema. Tracciamo il nuovo luogo delle radici.



Come si vede, è ora possibile scegliere il guadagno K , ovvero la costante proporzionale K_P , in modo da fissare la costante di tempo dominante del sistema più liberamente. Ad esempio, con $K=6$ ($K_P=30$) si ottiene una equazione caratteristica:

$$s^2 + 2s + 6(s + 4) = 0 \Leftrightarrow s^2 + 8s + 24 = 0$$

cui corrispondono due poli in anello chiuso complessi e coniugati in $-4 \pm j2\sqrt{2}$ con costante di tempo pari a $1/4=0.25$ s, di molto inferiore a quella originaria dei poli in anello chiuso, pari a $1/1.5=0.67$ s (i poli dominanti del sistema non compensato hanno parte reale -1.5). Il tempo di assestamento al 2% risultante del sistema compensato in anello chiuso è dell'ordine di $4 \times 0.25 \approx 1$ s (la relazione non è esatta per via della presenza di uno zero nella funzione di trasferimento di anello $G_C(s)G_P(s)$), come si verifica agevolmente con un software di calcolo, quale ad esempio il Matlab.



In definitiva, un metodo per tarare il PID consiste nello scegliere lo zero del regolatore più vicino all'asse immaginario in modo da cancellare il polo dominante del sistema e quindi velocizzare il sistema in anello chiuso e nel posizionare il secondo zero del PID nel semipiano sinistro, a sinistra del primo zero e con distanza sufficiente da questo per soddisfare le specifiche di rapidità di risposta.

La famiglia dei regolatori standard comprende diverse versioni ridotte di regolatori PID, a seconda delle diverse azioni presenti (ossia a seconda di quali tra le costanti K_P , K_I e K_D sono non nulle).

Il più semplice regolatore standard è il regolatore proporzionale, o regolatore P, che ha funzione di trasferimento:

$$G_C(s) = K_P.$$

Segue il regolatore integrale o I:

$$G_C(s) = \frac{K_I}{s}.$$

Un ulteriore regolatore standard è il regolatore proporzionale-integrale o PI:

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s}.$$

Ancora, si ha il regolatore proporzionale-derivativo o PD:

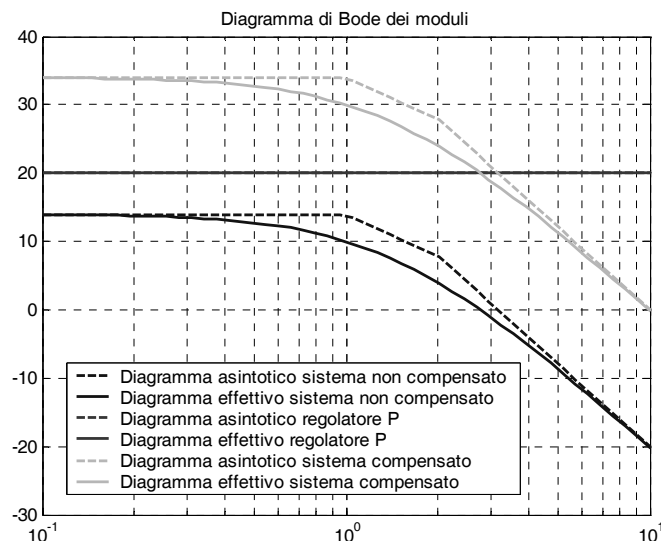
$$G_C(s) = K_P + K_D s.$$

Per ciò che riguarda i vantaggi relativi e le particolarità di impiego dei vari tipi di regolatori precedentemente citati, valgono considerazioni analoghe a quelle sviluppate per le reti correttrici.

Il regolatore P si impiega quando il processo consente un'elevata costante di guadagno di anello senza pregiudizio per la stabilità, come accade per i sistemi aventi il comportamento dinamico di un integratore o caratterizzati dalla presenza di una sola costante di tempo predominante.

Utilizzando tale regolatore il diagramma di Bode delle fasi del sistema compensato è invariato, mentre quello dei moduli viene traslato verso l'alto, sì da aumentare la larghezza di banda e quindi velocizzare il sistema. Inoltre aumenta la precisione a regime e la robustezza ai disturbi. Tuttavia, poiché aumenta il guadagno, il margine di guadagno in genere si riduce. Inoltre la pulsazione di crossover dei guadagni aumenta e quindi si riduce anche il margine di fase nel sistema compensato (il diagramma delle fasi resta invariato).

La figura successiva mostra un esempio di diagramma di Bode dei moduli di un sistema compensato con un regolatore P.

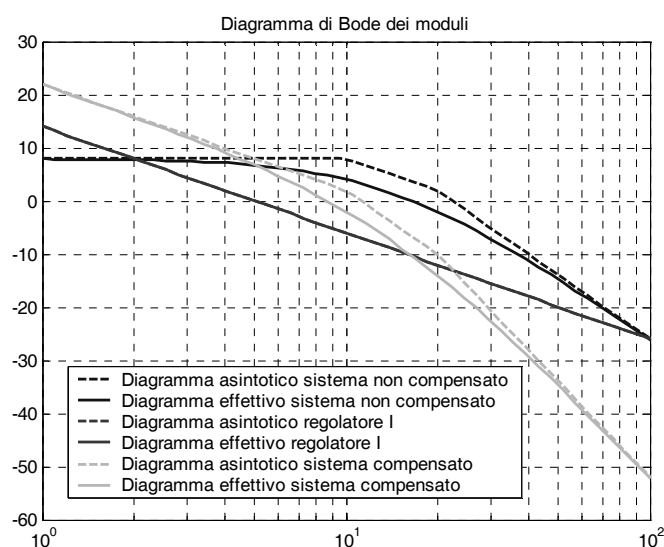


Il regolatore I si impiega per sistemi di tipo zero, dunque per compensare impianti aventi fedeltà insufficiente attraverso l'introduzione di un polo in anello aperto disposto nell'origine che aumenta il tipo della funzione di anello.

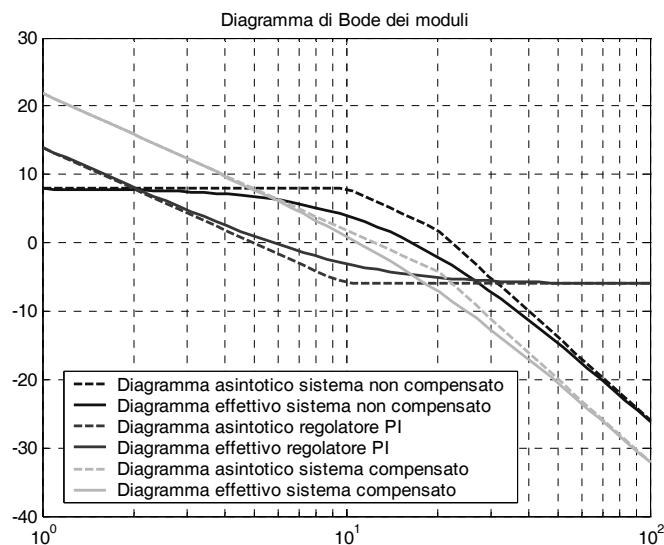
Utilizzando tale regolatore il diagramma di Bode delle fasi del sistema compensato viene traslato verso il basso di 90 gradi, mentre quello dei moduli viene 'tagliato'. Per questo motivo questo regolatore aumenta la precisione a regime e la robustezza ai disturbi: in particolare, l'errore è nullo in risposta a segnali di riferimento o disturbi costanti. Tuttavia questo regolatore riduce la larghezza di banda e quindi rallenta il sistema. Inoltre, poiché la fase è ridotta di 90 gradi, il margine di fase si riduce notevolmente nel sistema compensato.

Nella figura successiva vediamo un esempio di diagramma di Bode dei moduli di un sistema compensato con un regolatore I.

Il regolatore PI si impiega per la stessa tipologia di sistemi per cui si usa il regolatore I. Diversamente dal regolatore I, il regolatore PI presenta uno zero che mitiga l'effetto destabilizzante del polo nell'origine. Ne consegue che con questo regolatore l'effetto in alta frequenza sul diagramma di Bode delle fasi del plant è nullo, mentre il diagramma dei moduli viene traslato, generalmente verso il basso. Ciò è spiegabile anche considerando che questo regolatore, presentando un polo nell'origine ed uno zero a fase minima non è altro che una rete ritardatrice con polo nell'origine. Perciò, se ben progettato, il suo effetto è di migliorare il margine di fase del sistema, a scapito tuttavia della larghezza di banda, che peggiora. Il fatto poi che il polo di questa particolare rete ritardatrice sia nell'origine fa sì che il tipo del sistema aumenti e dunque la precisione a regime migliori.



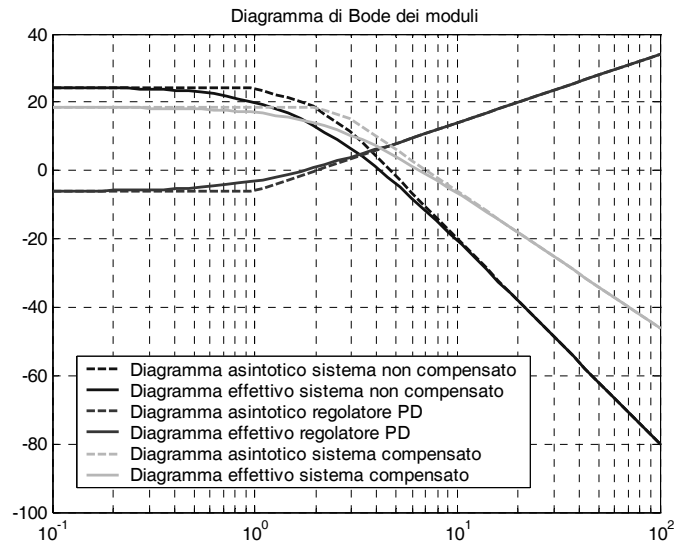
La figura successiva riporta un esempio di diagramma di Bode dei moduli di un sistema compensato con un regolatore PI.



Per tale motivo questo regolatore aumenta la precisione a regime e la robustezza ai disturbi: in particolare, l'errore è nullo in risposta a segnali di riferimento o disturbi costanti. Tuttavia questo regolatore riduce la larghezza di banda e quindi rallenta il sistema, anche se meno del semplice regolatore I. Osserviamo poi che, sebbene il polo nell'origine introduca un ritardo di fase di 90 gradi, questo è compensato dallo zero: se lo zero è ben scelto (ossia si trova a bassa frequenza rispetto a quelle di interesse) allora il margine di fase non si riduce, diversamente da quanto accade con l'introduzione di un semplice regolatore I.

Il regolatore PD, invece, si impiega per sistemi che presentano già fedeltà soddisfacente (ad esempio con funzione di trasferimento di anello di tipo uno o per sistemi di tipo zero per migliorarne la velocità di risposta senza incrementarne il tipo). Trattandosi di un sistema con uno zero a fase minima, il suo intervento è analogo a quello di una rete anticipatrice con polo all'infinito (ossia trascurabile).

In figura successiva vediamo un esempio di diagramma di Bode dei moduli di un sistema compensato con un regolatore PD.



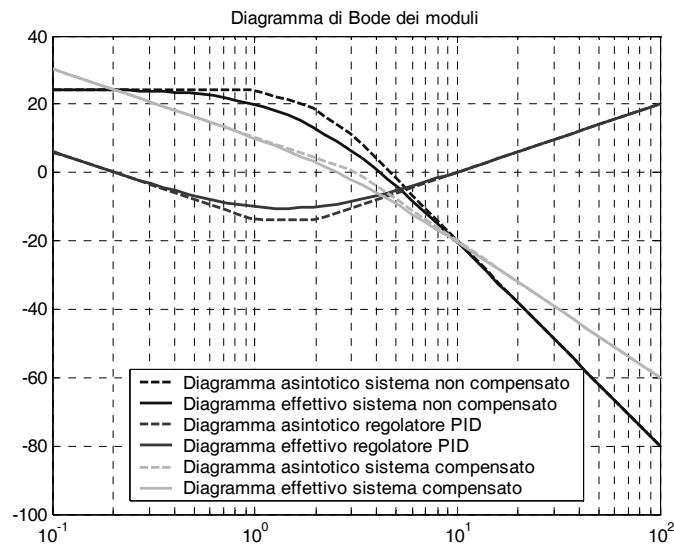
Il regolatore PD, infatti, introducendo uno zero nella funzione di anello, allarga la banda e quindi velocizza il sistema. Inoltre esso introduce un anticipo di fase e quindi aumenta il margine di fase del sistema compensato, stabilizzando il plant. Tale regolatore è comunque pericoloso in quanto può aumentare eccessivamente la banda, rendendo il sistema maggiormente soggetto al rumore in alta frequenza.

Infine il generico regolatore PID, contenente le tre azioni di controllo proporzionale, integrale e derivativa, costituisce una via di mezzo tra i precedenti controllori. Esso si può ad esempio impiegare, in alternativa al PD, per i sistemi di tipo zero.

Per via del polo nell'origine che esso introduce, infatti, migliora la precisione e la robustezza ai disturbi, ma consente anche una buona prontezza di risposta per via degli zeri che esso introduce, nonché un migliore margine di fase grazie all'anticipo introdotto da tali zeri.

Il regolatore a triplice azione è pertanto il più generale: scegliendo opportunamente i valori dei tre parametri che ne caratterizzano il comportamento dinamico si possono infatti ottenere, come casi particolari, le azioni di tutti i tipi di regolatori precedentemente presi in esame.

In figura vediamo un esempio di diagramma di Bode dei moduli di un sistema compensato con un regolatore PID.



Osserviamo ora che la generica funzione di trasferimento del regolatore PID

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = K_P \frac{1 + T_I s + T_I T_D s^2}{T_I s}$$

comprende $m=2$ zeri e $n=1$ poli. Pertanto la funzione di trasferimento del sistema è impropria, ossia non è fisicamente realizzabile. Ciò era prevedibile e deriva dalla presenza di un derivatore puro nella funzione di trasferimento del regolatore, che è un blocco ideale in quanto anticipativo (infatti presenta una funzione di trasferimento con grado del numeratore, pari a 1, maggiore di quello del denominatore, pari a zero).

Per tale motivo la forma reale del regolatore PID, alternativa a quella ideale sin qui utilizzata, prevede di sostituire al termine derivativo puro un termine derivativo fisicamente realizzabile e quindi realistico, che comprende un polo in alta frequenza:

$$T_d s \Rightarrow \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}}$$

con $N=5 \div 20$ in modo da posizionare il polo aggiuntivo all'esterno della banda di interesse.

In definitiva la funzione di trasferimento reale del regolatore PID generico è:

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \frac{T_d s}{N}} \right) = K_P \frac{T_i s \left(1 + \frac{T_d s}{N} \right) + \left(1 + \frac{T_d s}{N} \right) + T_i T_d s^2}{T_i s \left(1 + \frac{T_d s}{N} \right)}$$

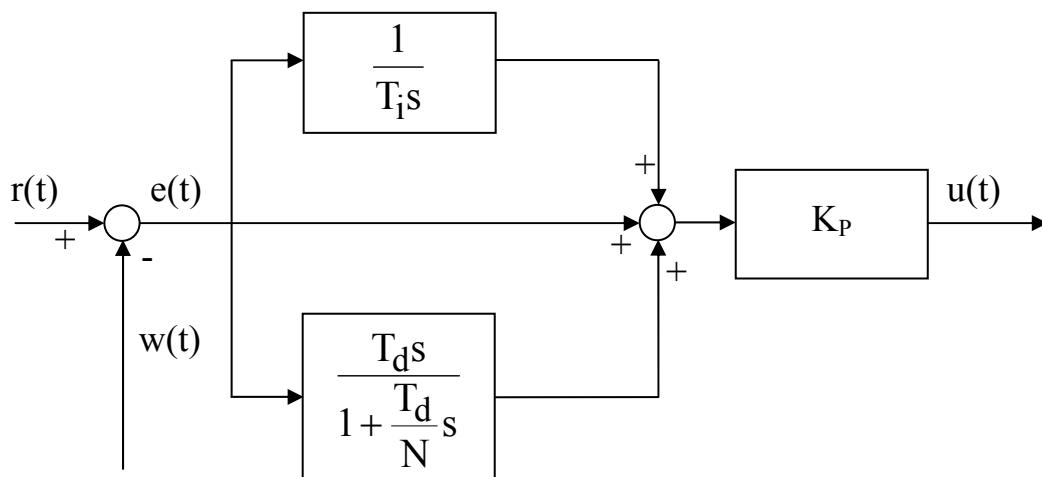
da cui

$$G_C(s) = K_P \frac{1 + \left(T_i + \frac{T_d}{N} \right) s + T_i T_d \left(1 + \frac{1}{N} \right) s^2}{T_i s \left(1 + \frac{T_d s}{N} \right)}$$

che evidentemente coincide con la funzione di trasferimento ideale per $N \rightarrow +\infty$.

In definitiva il polo reale modifica leggermente la posizione effettiva degli zeri, oltre ad introdurre un modo molto veloce e non dominante, ossia fuori banda.

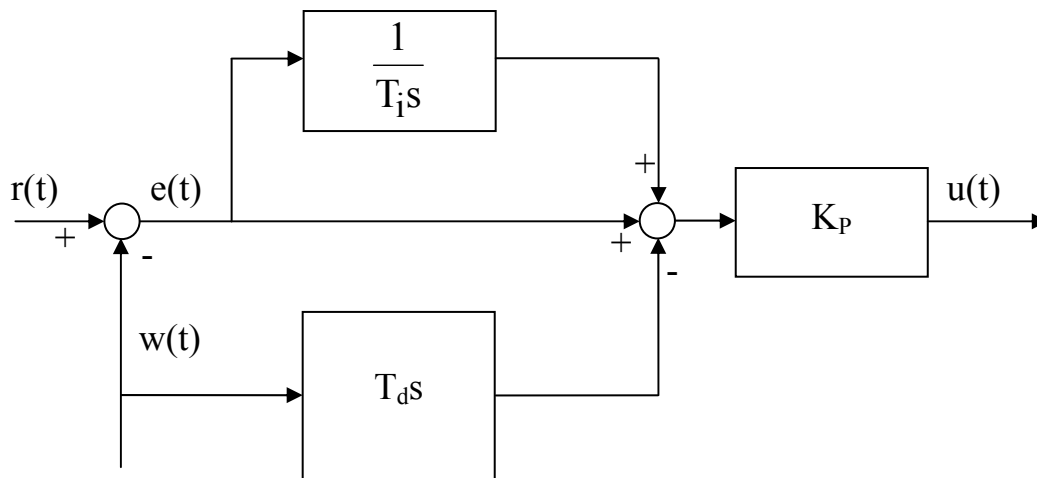
La struttura reale di un regolatore standard generico è dunque quella in figura.



Un ulteriore accorgimento volto a migliorare le prestazioni del sistema di controllo si effettua per limitare l'azione derivativa.

Infatti la struttura classica del regolatore PID in presenza di uno scalino $r(t)=1(t)$ in ingresso rende inizialmente (ossia in $t=0$) l'uscita del derivatore (e quindi quella del regolatore) di tipo impulsivo. Ciò porta l'uscita del regolatore a saturare, ovvero a far sì che il regolatore non funzioni in condizioni operative in cui la sua dinamica è lineare.

Per evitare tale inconveniente si utilizzano regolatori PID con derivazione dell'uscita misurata $w(t)$, in modo da rendere le variazioni dell'azione derivativa contenute. Lo schema è il seguente (si noti il segno meno a valle del derivatore).



Si dimostra che le proprietà di stabilità del sistema compensato con un regolatore PID con azione derivativa sull'uscita sono identiche a quelle del sistema controllato da un regolatore con azione derivativa sull'errore.

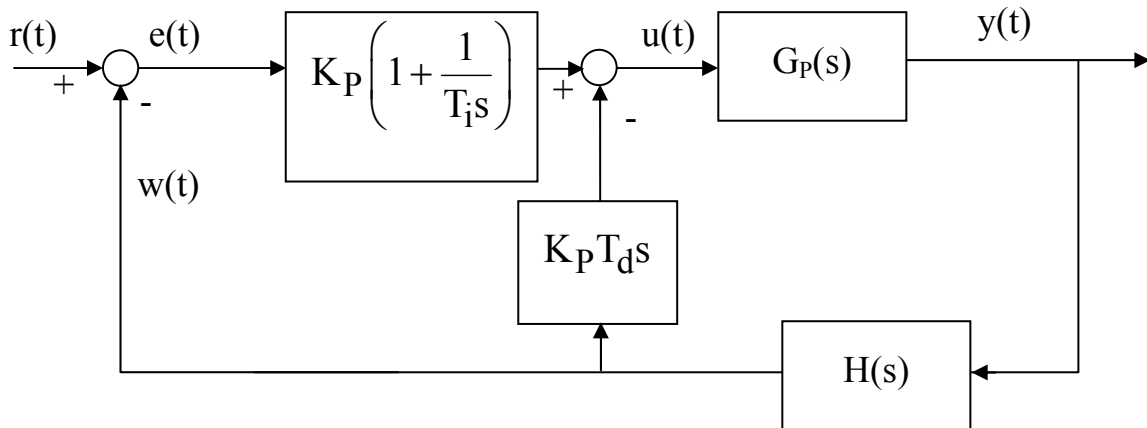
Infatti, nel caso si utilizzi un regolatore PID classico, si ha una funzione di trasferimento in anello chiuso:

$$G_0(s) = \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)H(s)}$$

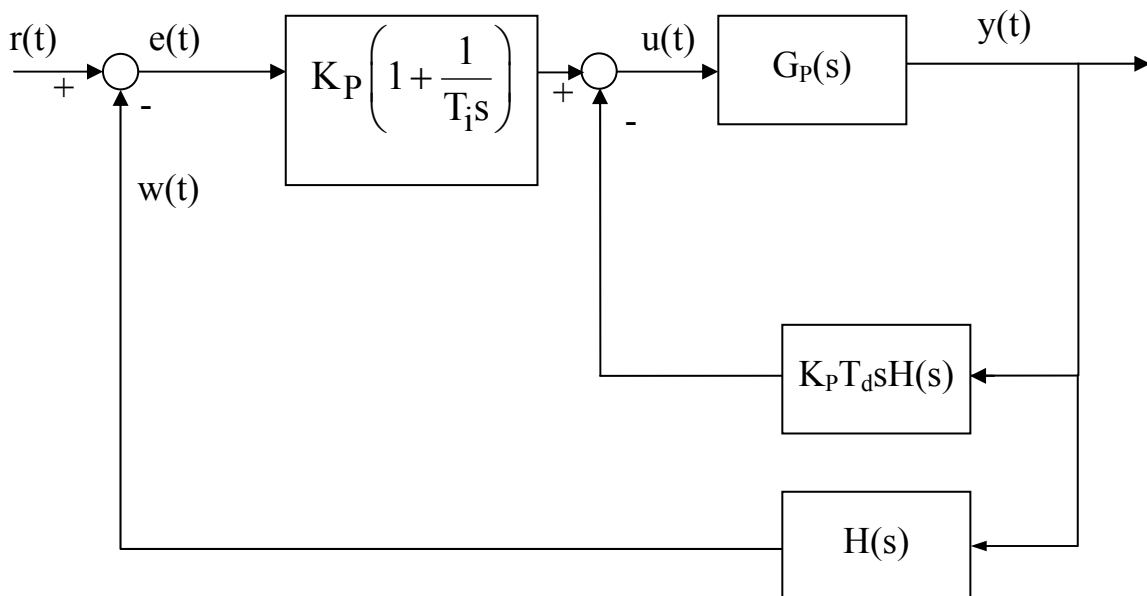
e le proprietà di stabilità in anello chiuso dipendono dalle radici dell'equazione caratteristica:

$$1 + G_C(s)G_P(s)H(s) = 0.$$

Invece, nel caso il regolatore PID presenti la derivazione sull'uscita si ha un anello di controllo equivalente del tipo di quello nella figura successiva, ottenuto sommando le due azioni proporzionale e integrale in parallelo prima del sommatore e riportando il guadagno proporzionale a monte di quest'ultimo.



Tale schema a blocchi equivale al successivo, ottenuto portando a valle del prelievo il blocco H(s) del trasduttore.



In definitiva l'azione derivativa si traduce in una retroazione interna dell'uscita e la legge di controllo vale:

$$U(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) E(s) - K_D s W(s).$$

Si determina quindi agevolmente la nuova funzione di trasferimento del ramo diretto come il prodotto dell'azione PI del regolatore e della funzione di trasferimento ottenuta retroazionando il plant con la sola azione D in cascata al trasduttore. Si ha dunque una nuova funzione di trasferimento di anello:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$G^*(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \cdot \frac{G_P(s)}{1 + G_P(s) \cdot K_P T_d s H(s)} = \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) \cdot \frac{G_P(s)}{1 + K_D s G_P(s) H(s)}$$

Pertanto la funzione di trasferimento in anello chiuso si scrive:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{G^*(s)}{1 + G^*(s)H(s)} = \frac{\left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) \cdot \frac{G_P(s)}{1 + K_D s G_P(s) H(s)}}{1 + \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) \cdot \frac{G_P(s)}{1 + K_D s G_P(s) H(s)} H(s)} = \\ &= \frac{\left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) G_P(s)}{1 + K_D s G_P(s) H(s) + \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) G_P(s) H(s)} = \frac{\left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) G_P(s)}{1 + G_C(s) G_P(s) H(s)} \end{aligned}$$

che ha lo stesso denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso ottenuta nel caso in cui si utilizza un regolatore PID di forma classica, mentre al numeratore sono presenti unicamente l'azione proporzionale e integrale.

Pertanto l'equazione caratteristica, che si ottiene ponendo a zero il denominatore della $G_0(s)$, è invariata rispetto al caso in cui si utilizza un regolatore PID ideale:

$$1 + G_C(s) G_P(s) H(s) = 0.$$

Tenendo comunque presenti gli accorgimenti descritti per la modellazione e l'implementazione pratica di un PID contenente una azione derivativa, nel seguito consideriamo la forma ideale dei regolatori standard.

TARATURA DEI REGOLATORI STANDARD

Il problema del progetto di un controllore PID si riduce alla scelta dei valori più opportuni per i parametri K_P , T_i e T_d . Tale scelta non è banale perché richiede la conoscenza dettagliata delle proprietà del processo che si vuole controllare.

Esistono vari metodi per effettuare la scelta (tuning o taratura) dei coefficienti più opportuni. Nel seguito vediamo brevemente due metodi semi-empirici che trovano grande utilizzo pratico.

In particolare, tali metodi trovano applicazione nel controllo degli impianti industriali (ad esempio chimici e petrolchimici), che sono caratterizzati da modelli fortemente non lineari. In questi casi la scelta dei parametri del regolatore è effettuata sulla base di tali metodologie empiriche di taratura, che sono di semplice applicazione anche per personale non esperto.

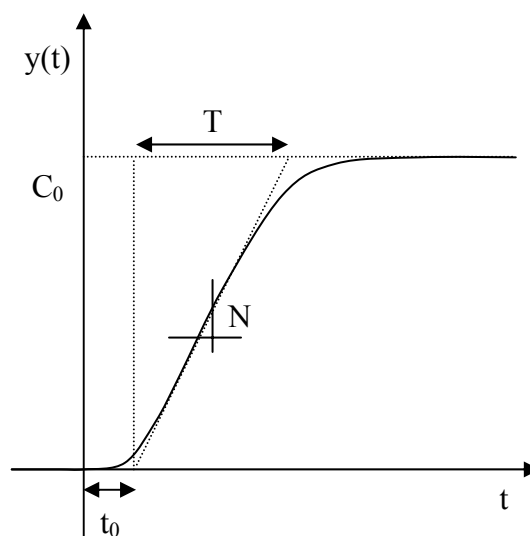
Tali metodi automatici di taratura consentono dunque di pervenire direttamente alla sintesi del regolatore a partire da specifiche prove effettuate sul processo.

METODO DI TARATURA IN ANELLO APERTO (O DI ZIEGLER E NICHOLS MODIFICATO DA COHEN E COON)

Questo metodo fornisce i valori di primo tentativo (da tarare manualmente in modo fine) dei parametri del regolatore standard in funzione di alcuni parametri della risposta al gradino del sistema in anello aperto che si vuole compensare.

Il metodo si applica a processi industriali con risposta indiciale aperiodica (ossia con poli dominanti in anello aperto reali), che sono molto diffusi nella pratica. Si registra la risposta indiciale in anello aperto ad un riferimento dato da un gradino di ampiezza M_0 (ossia $r(t)=M_0 1(t)$) e si approssima l'impianto con un modello del primo ordine con ritardo, avente cioè funzione di trasferimento:

$$G_P(s) \approx K \frac{e^{-t_0 s}}{1 + Ts}$$



I valori dei parametri caratteristici che descrivono la funzione di trasferimento approssimata dell'impianto si ricavano tracciando la tangente alla curva di risposta al gradino nel punto di flesso come nella figura precedente.

Si ricava il tempo di ritardo t_0 come la distanza misurata sull'asse dei tempi tra l'origine e l'intersezione della tangente nel flesso con l'asse dei tempi.

Detto C_0 il valore di regime della risposta indiciale e tracciata la retta orizzontale di ordinata C_0 , si ricava poi la costante di tempo T come la distanza misurata su tale retta tra la retta verticale passante per $t=t_0$ e l'intersezione della tangente nel flesso con la retta in questione.

Inoltre K è il guadagno statico, pari al rapporto tra il valore di regime della risposta indiciale e l'ampiezza del gradino applicato:

$$K = \frac{C_0}{M_0}.$$

Una volta determinati i parametri che approssimano il plant con un sistema del primo ordine con ritardo puro, si determinano il rapporto di ritardo

$$R = \frac{t_0}{T}$$

e la velocità di risposta

$$N = \frac{C_0}{T}.$$

I parametri consigliati da Ziegler e Nichols, modificati da Cohen e Coon, sono i seguenti.

Nel caso di controllo con regolatore P, ossia con

$$G_C(s) = K_P$$

si pone

$$K_P = \frac{M_0}{Nt_0} \left(1 + \frac{R}{3} \right).$$

Nel caso di controllo con regolatore I, ossia con

$$G_C(s) = \frac{K_P}{T_i s}$$

si pone

$$\frac{K_P}{T_i} = \frac{4M_0}{Nt_0^2} \cdot \frac{R^2}{1+5R}.$$

Nel caso di controllo con regolatore PI, ossia con

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

si pone

$$K_P = \frac{M_0}{Nt_0} \left(\frac{9}{10} + \frac{R}{12} \right), \quad T_i = t_0 \cdot \frac{30+3R}{9+20R}.$$

Nel caso di controllo con regolatore PD, ossia con

$$G_C(s) = K_P (1 + T_d s)$$

si pone

$$K_P = \frac{M_0}{Nt_0} \left(\frac{5}{4} + \frac{R}{6} \right), \quad T_d = t_0 \cdot \frac{6-20R}{22+3R}.$$

Nel caso di controllo con regolatore PID, ossia con

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

si pone

$$K_P = \frac{M_0}{Nt_0} \left(\frac{4}{3} + \frac{R}{4} \right), \quad T_i = t_0 \cdot \frac{32 + 6R}{13 + 8R}, \quad T_d = t_0 \cdot \frac{4}{11 + 2R}.$$

Osserviamo che il metodo di taratura in anello aperto dei regolatori PID può essere applicato solo se il sistema controllato è asintoticamente stabile in anello aperto con poli dominanti reali e con guadagno positivo. Nel caso invece il sistema in anello aperto non sia asintoticamente stabile si utilizza il seguente metodo di taratura in anello chiuso, anche detto della banda di pendolazione.

METODO DI TARATURA IN ANELLO CHIUSO (O DELLA BANDA PROPORZIONALE DI PENDOLAZIONE)

Questo metodo fornisce i valori di primo tentativo (da tarare manualmente in modo fine) dei parametri del regolatore standard in funzione della risposta ottenuta in corrispondenza del limite di stabilità del sistema in anello chiuso che si vuole compensare con il PID.

L'idea alla base di questo metodo può essere spiegata qualitativamente ricordando che in molti casi il sistema retroazionato è stabile ad anello chiuso solo se il guadagno in continua ad anello aperto è mantenuto sufficientemente piccolo. Aumentando il guadagno il sistema diventa instabile.

Ricordiamo che tra la zona di stabilità (poli della funzione di trasferimento ad anello chiuso con parte reale negativa) e la zona di instabilità (almeno un polo con parte reale positiva o poli almeno doppi con parte reale nulla) esiste un limite (poli immaginari puri semplici) in cui la risposta del sistema non diverge, ma oscilla con ampiezza di oscillazione costante. Quindi, se aumentando il guadagno si arriva ad una situazione di oscillazione stabile, possiamo assumere che un valore di guadagno nettamente inferiore a tale limite possa corrispondere ad una condizione di lavoro ragionevole.

La procedura da seguire per l'ottimizzazione del controllore è allora la seguente.

Si pone inizialmente $K_I=0$ e $K_D=0$, ovvero

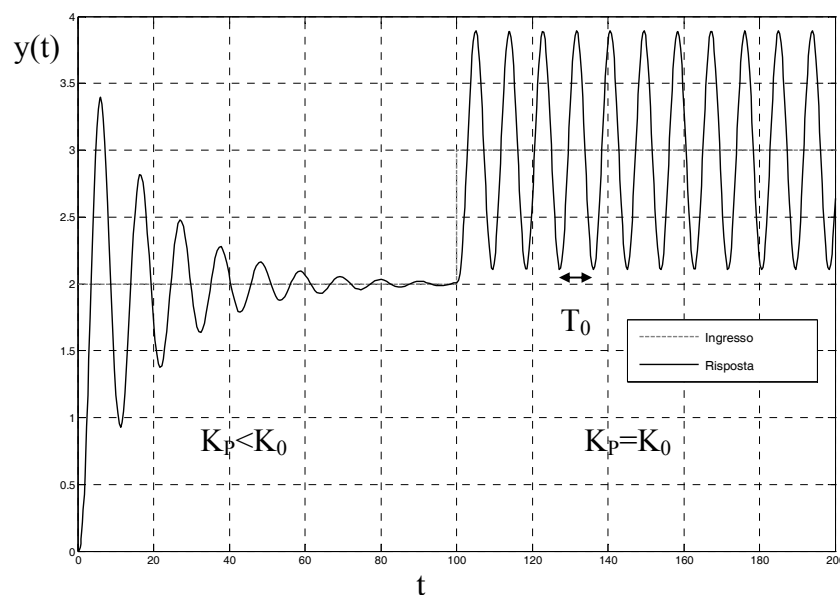
$$G_C(s) = K_P$$

e si controlla il sistema con un semplice regolatore proporzionale.

Operando ad anello chiuso, si aumenta quindi progressivamente (e prudentemente) il valore di K_P fino ad osservare che l'uscita $y(t)$ ottenuta in risposta ad un gradino oscilla in modo permanente (limite di stabilità). Indichiamo con K_0 il valore limite di K_P individuato sperimentalmente.

Indichiamo poi con T_0 il periodo di oscillazione misurato quando $K_P = K_0$.

Si ottiene un andamento della risposta indiciale del sistema in anello chiuso del tipo in figura.



A seconda della configurazione del controllore, si applicano quindi i seguenti parametri.

Nel caso di controllo con regolatore P, ossia con

$$G_C(s) = K_P$$

si pone

$$K_P = 0.5K_0.$$

Nel caso di controllo con regolatore PI, ossia con

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

si pone

$$K_P = 0.45K_0, \quad T_i = 0.85T_0.$$

Nel caso di controllo con regolatore PD, ossia con

$$G_C(s) = K_P (1 + T_d s)$$

si pone

$$K_P = 0.5K_0, \quad T_d = 0.2T_0.$$

Nel caso di controllo con regolatore PID, ossia con

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

si pone

$$K_P = 0.6K_0, \quad T_i = 0.5T_0, \quad T_d = \frac{T_0}{8} = 0.12T_0.$$

Il metodo descritto ha diversi limiti.

In primo luogo il sistema retroazionato con guadagno variabile deve essere condizionatamente stabile. In altre parole, se il sistema in anello chiuso non entra mai in oscillazione il metodo non è applicabile.

Inoltre il metodo si basa sulla misura della risposta in condizioni critiche (ossia ai limiti della stabilità) del sistema. È dunque evidente che le oscillazioni che devono essere innescate per tarare il controllore secondo il metodo possono provocare danni al processo stesso. Quindi, nella pratica, bisogna operare con prudenza quando si tara un controllore PID utilizzando tale tecnica.

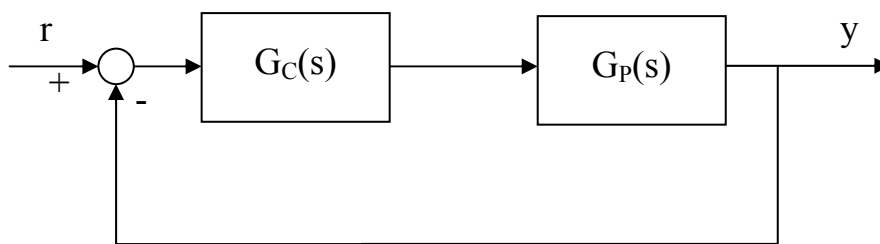
Osserviamo infine che, come il precedente metodo di taratura in anello aperto, anche il metodo semi-empirico in anello chiuso appena descritto fornisce una ottimizzazione solo parziale del controllore. In altre parole, entrambi i metodi

forniscono i valori di primo tentativo dei parametri del controllore, che devono poi essere affinati con la taratura fine manuale.

ESEMPIO

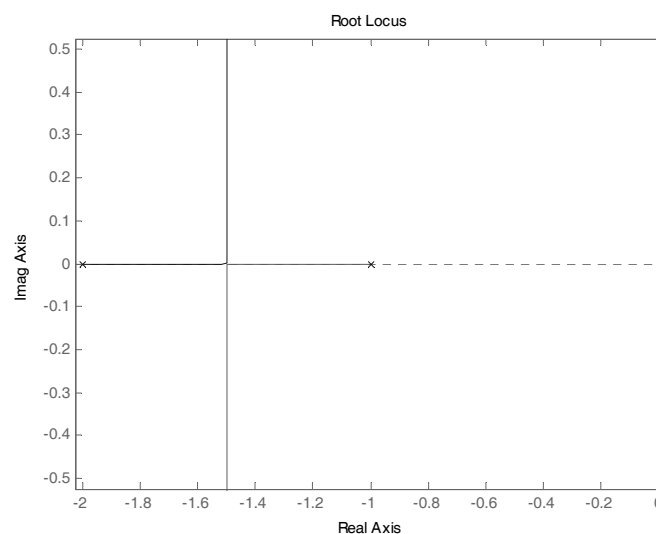
Per il sistema in figura, sia

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right), \quad G_P(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$



Si dica se il regolatore standard può essere tarato con uno o entrambi i metodi di taratura dei PID.

Il sistema in anello aperto privo di controllore è asintoticamente stabile e, avendo due poli reali a fase minima, presenta una risposta indiciale aperiodica. Inoltre ha un guadagno statico positivo. Per tale motivo il metodo di taratura in anello aperto di Ziegler e Nichols si può applicare facilmente.



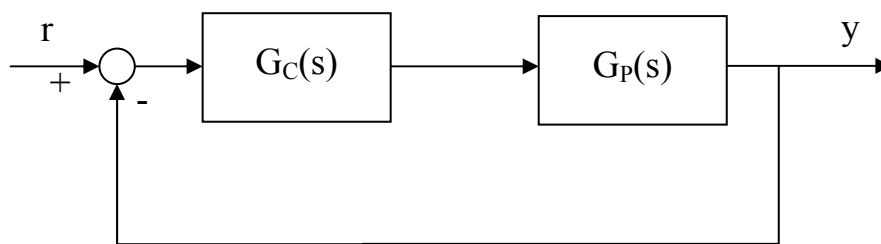
Il sistema in anello chiuso, d'altro canto, se controllato da un semplice regolatore P, ossia con in cascata un guadagno variabile, è sempre asintoticamente stabile, come si verifica facilmente tracciando il luogo delle radici del sistema, che è quello in figura.

In altre parole, non esiste un regolatore proporzionale con guadagno K_0 che porta il sistema ai limiti della stabilità. Per tale motivo il metodo di taratura in anello chiuso o della banda proporzionale non si può applicare al sistema.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

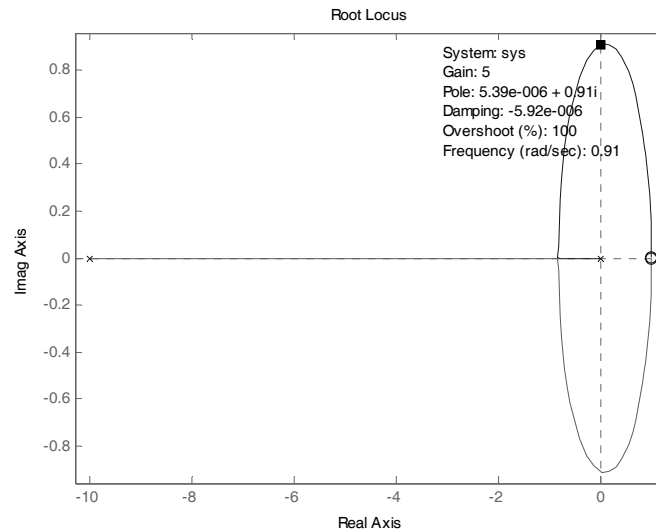
$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right), \quad G_P(s) = \frac{(s-1)^2}{s(s+10)}.$$



Si dica se il regolatore standard può essere tarato con uno o entrambi i metodi di taratura dei PID.

Il sistema in anello aperto privo di controllore non è asintoticamente stabile, bensì è semplicemente stabile. In particolare, la sua risposta al gradino non solo non è del tipo a sigmoide ma non è neppure limitata (infatti contiene un modo a rampa), dunque non è possibile approssimare il plant con un sistema del primo ordine con ritardo puro. Per tale motivo il metodo di taratura in anello aperto di Ziegler e Nichols non è applicabile.

Il sistema in anello chiuso, d'altro canto, se controllato da un semplice regolatore P, ossia con in cascata un guadagno variabile, è condizionatamente stabile, come si verifica facilmente tracciando il luogo delle radici del sistema, che è quello riportato nella figura successiva.



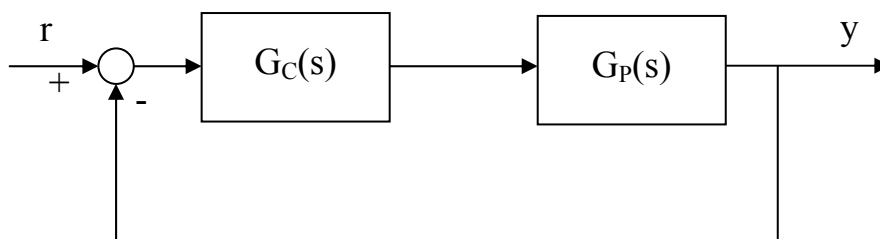
In particolare si può dimostrare utilizzando il metodo di Routh che per $K=5$ il sistema diventa semplicemente stabile con due poli immaginari puri in $\pm j\omega_0 \approx \pm j0.91$.

Per tale motivo il metodo di taratura in anello chiuso o della banda proporzionale si può applicare al sistema. Inoltre il regolatore proporzionale che porta il sistema ai limiti della stabilità ha guadagno $K_0=5$ mentre il periodo di oscillazione vale $T_0=2\pi/\omega_0 \approx 6.9$ s. Utilizzando tali valori con le regole di taratura dei regolatori standard in anello chiuso dovute a Ziegler e Nichols è agevole tarare il regolatore.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right), \quad G_P(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}.$$



Si esegua la taratura del controllore con il metodo della banda di pendolazione, quindi si determini la funzione di trasferimento in anello chiuso $G_0(s)$. Si calcoli quindi $G_0(0)$ e si commenti il risultato ottenuto.

Il sistema controllato con la sola azione proporzionale

$$G_C(s) = K_P$$

ha equazione caratteristica

$$1 + K_P G_P(s) = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} (s+1)(s+2)(s+3) + 6K_P = 0 &\Rightarrow (s+1)(s^2 + 5s + 6) + 6K_P = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow s^3 + 6s^2 + 11s + 6(1 + K_P) = 0 \end{aligned}$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11 \\ s^2 & 6 & 6(1+K_P) \\ s^1 & (10 - K_P) & \\ s^0 & (1+K_P) & \end{array}$$

Poiché il guadagno K_P è sempre positivo, i primi due termini e il quarto termine della prima colonna della tabella sono sempre positivi. Il terzo termine, invece, è positivo per $K_P < 10$, mentre è negativo per $K_P > 10$. Infine, per $K_P = 10$ la tabella presenta una permanenza e si ha una riga nulla con equazione ausiliaria

$$s^2 + (1 + K_P) \Big|_{K_P=10} = 0 \Rightarrow s^2 + 11 = 0$$

che ha soluzioni $s = \pm j\omega_0 = \pm j\sqrt{11} \approx \pm j3.32$.

In definitiva il sistema è condizionatamente stabile: è asintoticamente stabile per $K_P < 10$, semplicemente stabile per $K_P = 10$ mentre è instabile (con due poli a parte reale positiva) per $K_P > 10$.

Per tale motivo il metodo di taratura in anello chiuso o della banda proporzionale si può applicare al sistema. Inoltre il guadagno che porta il sistema ai limiti della stabilità è $K_0=10$ mentre il periodo di oscillazione vale $T_0=2\pi/\omega_0 \approx 1.89$ s.

Trattandosi di un controllore PI, la regola della banda di pendolazione impone una taratura con

$$K_P = 0.45K_0 = 0.45 \cdot 10 = 4.5, \quad T_i = 0.85T_0 = 0.85 \cdot 1.89 \approx 1.61 \text{ s.}$$

Pertanto la funzione di trasferimento di anello del sistema compensato vale:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{6K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{6K_P}{T_i} \cdot \frac{(T_i s + 1)}{s(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{16.77(1.61s + 1)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}.$$

Quindi la funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema compensato vale:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)} = \frac{\frac{16.77(1.61s + 1)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + \frac{16.77(1.61s + 1)}{s(s+1)(s+2)(s+3)}} = \\ &= \frac{16.77(1.61s + 1)}{s(s+1)(s+2)(s+3) + 16.77(1.61s + 1)} = \frac{27s + 16.77}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 33s + 16.77} \end{aligned}$$

Si osserva in particolare che risulta $G_0(0)=1$. Se allora in ingresso al sistema compensato si pone un gradino unitario, ossia si ha $r(t)=1(t)$, la risposta a regime del sistema in anello chiuso vale:

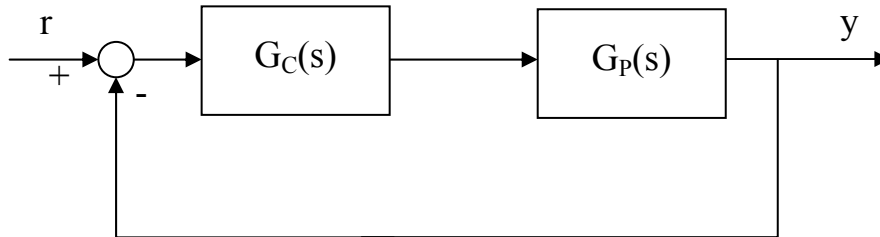
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = 1 = \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$$

e quindi l'errore a regime del sistema compensato è nullo. Ciò era prevedibile, poiché la compensazione del sistema con il regolatore PI ha proprio l'obiettivo di aumentare di una unità il tipo del sistema, rendendo nullo l'errore di posizione.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_P(s) = \frac{0.1e^{-3s}}{(1+5s)(1+20s)}.$$



Si progetti un controllore PID nella forma:

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right),$$

in modo che la funzione di trasferimento di anello, a meno del ritardo puro, sia del primo ordine, l'errore di posizione in anello chiuso sia nullo e il sistema presenti un margine di fase almeno pari a 40° , con la massima pulsazione di crossover del guadagno possibile.

La specifica sull'errore di posizione è certamente verificata grazie alla presenza del polo nell'origine nel regolatore. Inoltre, per rendere il sistema del primo ordine è necessario cancellare i due poli (entrambi cancellabili, essendo disposti in $-1/20$ e in $-1/5$) con i due zeri del regolatore. Imponiamo dunque

$$1 + T_i s + T_i T_d s^2 = (1 + 5s)(1 + 20s) \Rightarrow 1 + T_i s + T_i T_d s^2 = 1 + 25s + 100s^2,$$

ossia

$$\begin{cases} T_i = 25 \\ T_d = \frac{100}{T_i} = \frac{100}{25} = 4 \end{cases}.$$

Il regolatore assume dunque la forma:

Copyright © 2007 Mariagrazia Dotoli. L'autore garantisce il permesso per la riproduzione e la distribuzione del presente materiale per i soggetti privati, alla condizione che la fonte originale e l'autore siano esplicitamente riconosciuti e citati.

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{25s} + 4s \right) = \frac{K_P (100s^2 + 25s + 1)}{25s} = \frac{K_P}{25s} (1 + 5s)(1 + 20s),$$

quindi la funzione di trasferimento di anello vale

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{K_P}{25s} (1 + 5s)(1 + 20s) \cdot \frac{0.1e^{-3s}}{(1 + 5s)(1 + 20s)} = \frac{K_P}{250s} e^{-3s}$$

e la funzione di risposta armonica in anello aperto è

$$G(j\omega) = G_C(j\omega)G_P(j\omega) = \frac{K_P}{250j\omega} e^{-3j\omega}.$$

Imponiamo ora la specifica sul margine di fase. Si ha:

$$|G(j\omega)| = \frac{K_P}{250\omega}$$

quindi la pulsazione di crossover di fase si determina imponendo che il modulo della funzione di risposta armonica sia unitario

$$|G(j\omega_{CG})| = 1 \Rightarrow \frac{K_P}{250\omega_{CG}} = 1 \Rightarrow \omega_{CG} = \frac{K_P}{250}.$$

Si ha inoltre:

$$\angle G(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - 3\omega$$

quindi il margine di fase vale:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - 3\omega_{CG} + \pi = \frac{\pi}{2} - 3\frac{K_P}{250}.$$

Imponendo la specifica sul margine di fase si ottiene dunque la costante proporzionale del regolatore:

$$M_F \geq 40^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{2} - 3 \frac{K_P}{250} \geq \frac{40\pi}{180} \Rightarrow 3 \frac{K_P}{250} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{4\pi}{18} = \frac{5\pi}{18} \Rightarrow K_P \leq \frac{1250\pi}{54} \approx 72.7.$$

Poiché si desidera la massima pulsazione di crossover del guadagno, e questa è direttamente proporzionale alla costante K_P , si sceglie il massimo valore per quest'ultima costante

$$K_p=72.7$$

e il regolatore sintetizzato è il seguente:

$$G_C(s) = 72.7 \left(1 + \frac{1}{25s} + 4s \right).$$

In tal caso la pulsazione di crossover del guadagno del sistema vale:

$$\omega_{CG} = \frac{K_P}{250} = \frac{72.7}{250} \approx 0.29 \text{ rad s}^{-1}.$$

ESEMPIO

Si scriva la legge di controllo nel dominio del tempo di un regolatore PID descritto dalla seguente funzione di trasferimento

$$G_C(s) = \frac{5}{s}(1+2s)(1+3s)$$

e se ne individuino le costanti K_P , K_I e K_D .

Si ha evidentemente:

$$G_C(s) = \frac{5}{s}(1+5s+6s^2) = 25 + \frac{5}{s} + 30s = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

con

$$K_P=25, K_I=5, K_D=30.$$

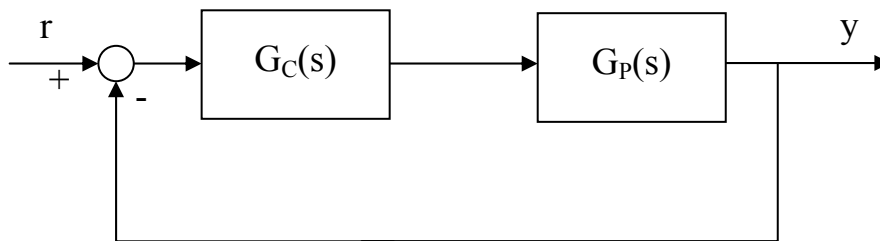
Pertanto, antitrasformando la funzione di trasferimento del regolatore si ottiene la legge di controllo nel dominio del tempo:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} = 25e(t) + 5 \int_0^t e(\tau) d\tau + 30 \frac{de(t)}{dt}.$$

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_P(s) = \frac{1}{(1+s)^3}, \quad G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$



Si effettui la taratura del regolatore utilizzando le regole di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

Per tarare il regolatore PID con il metodo in anello chiuso è necessario considerare il sistema controllato con la sola azione proporzionale, ossia con:

$$G_C(s) = K_P.$$

In tal caso l'equazione caratteristica del sistema vale:

$$1 + K_P G_P(s) = 0$$

ossia

$$1 + \frac{K_P}{(1+s)^3} = 0 \Rightarrow s^3 + 3s^2 + 3s + (K_P + 1) = 0.$$

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 3 \\ s^2 & 3 & (K_P+1) \\ s^1 & (8-K_P) & \\ s^0 & (K_P+1) & \end{array}$$

Poiché il guadagno K_P è sempre positivo, i primi due termini e il quarto termine della prima colonna della tabella sono sempre positivi. Il terzo termine, invece, è positivo per $K_P < 8$, mentre è negativo per $K_P > 8$. Infine, per $K_P = 8$ la tabella presenta una permanenza e si ha una riga nulla con equazione ausiliaria

$$3s^2 + (1 + K_P) \Big|_{K_P=8} = 0 \Rightarrow s^2 + 3 = 0$$

che ha soluzioni $s = \pm j\omega_0 = \pm j\sqrt{3} \approx \pm j1.7$.

In definitiva il sistema controllato con un regolatore P è condizionatamente stabile: è asintoticamente stabile per $K_P < 8$, semplicemente stabile per $K_P = 8$ mentre è instabile (con due poli a parte reale positiva) per $K_P > 8$.

Per tale motivo il metodo di taratura in anello chiuso o della banda proporzionale si può applicare al sistema. Inoltre il guadagno che porta il sistema ai limiti della stabilità è $K_0 = 8$ mentre il periodo di oscillazione vale $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 3.62$ s.

Trattandosi di un controllore PID, la regola della banda di pendolazione impone una taratura con

$$K_P = 0.6K_0 = 4.8, \quad T_i = \frac{T_0}{2} = 1.81 \text{ s}, \quad T_d = \frac{T_0}{8} = 0.45 \text{ s}.$$

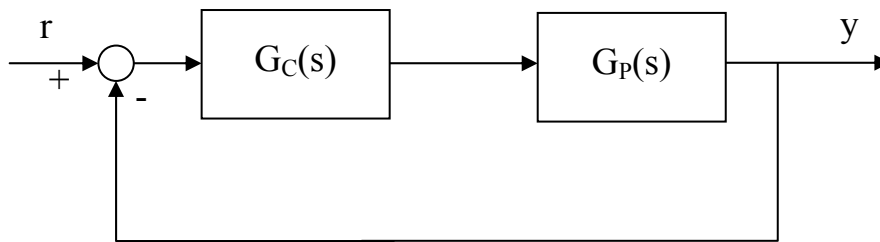
Pertanto la funzione di trasferimento del regolatore vale:

$$\begin{aligned} G_C(s) &= \frac{K_P}{T_i s} \left(1 + T_i s + T_i T_d s^2 \right) = \frac{0.6K_0}{0.5T_0 s} \left(1 + \frac{T_0}{2} s + \frac{T_0^2}{16} s^2 \right) = \\ &= \frac{1.2K_0}{T_0 s} \left(1 + \frac{T_0}{4} s \right)^2 \approx \frac{2.65}{s} (1 + 0.905s)^2 \end{aligned}$$

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_P(s) = \frac{1}{s^2}.$$



Tra i controllori:

$$G_{C1}(s) = K_P, \quad G_{C2}(s) = K_P + \frac{K_I}{s}, \quad G_{C3}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s,$$

si scelga quello in grado di assicurare la asintotica stabilità del sistema. Si determinino quindi i parametri del regolatore selezionato in modo che la dinamica del sistema in anello chiuso sia approssimabile con quella di un sistema del secondo ordine con due poli complessi e coniugati aventi coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{2}$.

Scegliendo il primo controllore si ottiene una equazione caratteristica

$$1 + K_P G_P(s) = 0$$

ossia

$$s^2 + K_P = 0.$$

Poiché nel polinomio caratteristico manca il termine di ordine uno, per il lemma di Routh il sistema in anello chiuso non è asintoticamente stabile per nessun valore del guadagno.

Analogamente, scegliendo il secondo controllore si ottiene una equazione caratteristica

$$1 + \left(K_P + \frac{K_I}{s} \right) G_P(s) = 0$$

ossia

$$s^3 + K_P s^2 + K_I = 0.$$

Poiché nel polinomio caratteristico manca ancora il termine di ordine uno, anche in questo caso per il lemma di Routh il sistema in anello chiuso non è mai asintoticamente stabile.

Evidentemente il controllore da selezionare è il terzo, ossia un generico PID. Infatti in questo caso si ottiene una equazione caratteristica

$$1 + \left(K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \right) G_P(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s} G_P(s) = 0$$

ossia

$$s^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I = 0.$$

In questo caso il Lemma di Routh è verificato.

Costruiamo la tabella di Routh del sistema.

s^3	1	K_P
s^2	K_D	K_I
s^1	$K_D K_P - K_I$	
s^0	K_I	

Poiché i parametri del controllore sono sempre positivi, i primi due termini e il quarto termine della prima colonna della tabella sono sempre positivi. Il terzo termine, invece, è positivo per $K_D K_P - K_I > 0$, mentre è negativo in caso contrario. Infine, per $K_D K_P = K_I$ la tabella presenta una permanenza e si ha una riga nulla con equazione ausiliaria

$$K_D s^2 + K_I \Big|_{K_D K_P = K_I} = 0$$

che ha soluzioni $s = \pm j \sqrt{\frac{K_I}{K_D}}$.

In definitiva il sistema è condizionatamente stabile: è asintoticamente stabile per $K_D > K_I / K_P$, semplicemente stabile per $K_D = K_I / K_P$ mentre è instabile (con due poli a parte reale positiva) per $K_D < K_I / K_P$.

Effettuiamo ora la scelta dei parametri del controllore supponendo che sia naturalmente $K_D > K_I / K_P$.

Il sistema in anello chiuso deve presentare due poli dominanti in

$$s = -\delta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \delta^2}$$

con $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\omega_n = \sqrt{2}$, ossia in $s = -1 \pm j$. Inoltre, essendo il sistema originariamente del secondo ordine, quello compensato con il regolatore PID, che ha un polo nell'origine, è del terzo ordine, avendo funzione di trasferimento di anello

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{(K_D s^2 + K_P s + K_I)}{s^3}.$$

Pertanto il sistema in anello chiuso presenta un terzo polo che deve essere dominato dai precedenti due. Imponiamo ad esempio che tale terzo polo sia posizionato ad un ordine di grandezza di distanza dagli altri due, che hanno parte reale unitaria, in $s = -10$.

In tal caso il polinomio caratteristico in anello chiuso deve essere:

$$p(s) = (s + 10)\left((s + 1)^2 + 1\right) = (s + 10)(s^2 + 2s + 2) = s^3 + 12s^2 + 22s + 20.$$

D'altro canto il polinomio caratteristico del sistema compensato vale:

$$p(s) = s^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I.$$

Uguagliando i due polinomi si ha allora:

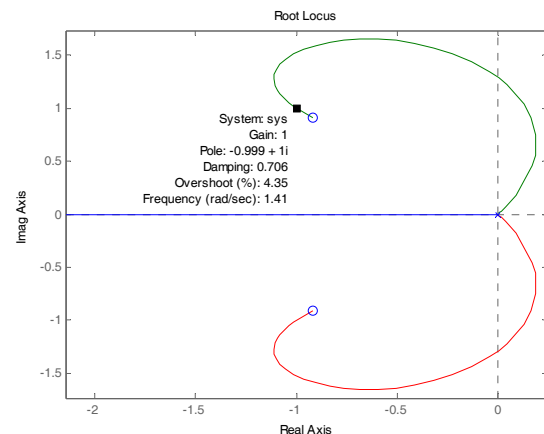
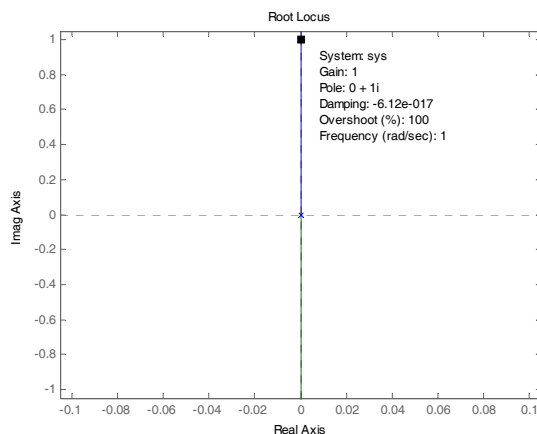
$$s^3 + 12s^2 + 22s + 20 = s^3 + K_D s^2 + K_P s + K_I$$

da cui

$$K_D = 12, K_P = 22, K_I = 20.$$

Si osserva inoltre che con questa scelta risulta $12 = K_D > K_I/K_P = 1.1$, il che conferma che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile con questo controllore.

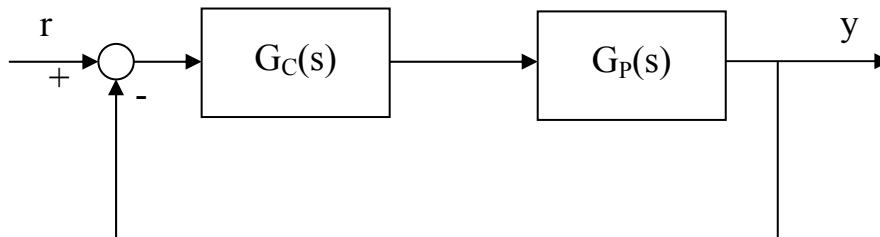
Nelle figure successive sono rappresentati il luogo delle radici del sistema in anello chiuso non compensato, che come si vede è semplicemente stabile (caso del regolatore proporzionale quando il guadagno è unitario), e quello del sistema compensato con il regolatore progettato, che come si vede è asintoticamente stabile (quando il guadagno del luogo è unitario) ed ha i poli dominanti previsti.



ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad G_P(s) = \frac{10e^{-\tau s}}{(1+s)(1+0.2s)(1+0.05s)^2}.$$



Si supponga inizialmente $\tau=0$ e si progetti il regolatore PID in modo che il sistema complessivo presenti tre poli in anello chiuso e il suo margine di fase valga 45° . Con il regolatore progettato, si calcoli il massimo valore del ritardo puro τ per il quale il sistema è stabile.

Il sistema non compensato (con $\tau=0$) è privo di zeri e ha quattro poli (uno in -1 , uno in -5 e due in -20). Inserendo nell'anello il regolatore esso ha due zeri e cinque poli, con funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{10K_P}{T_i} \cdot \frac{(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{s(1+s)(1+0.2s)(1+0.05s)^2}.$$

Poiché si richiedono tre soli poli a regolatore inserito, i due zeri del regolatore devono cancellare due poli della funzione di trasferimento in anello aperto.

I quattro poli del sistema non compensato sono tutti cancellabili. Conviene dunque cancellare i due poli dominanti che rallentano il sistema in anello chiuso, poiché da essi partono due rami del luogo delle radici. Sia dunque:

$$1 + T_i s + T_i T_d s^2 = (1+s)(1+0.2s) \Rightarrow 1 + T_i s + T_i T_d s^2 = 1 + 1.2s + 0.2s^2,$$

ossia

$$\begin{cases} T_i = 1.2 = \frac{6}{5} \\ T_d = \frac{0.2}{T_i} = \frac{0.2}{1.2} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

In definitiva si ha una funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{25K_P}{3} \cdot \frac{1}{s(1+0.05s)^2}$$

e una funzione di risposta armonica

$$G_C(j\omega)G_P(j\omega) = \frac{25K_P}{3} \cdot \frac{1}{j\omega(1+0.05j\omega)^2}$$

Detta ω_{CG} la pulsazione di crossover di guadagno, la specifica sul margine di fase richiede che sia:

$$M_F = \angle G_C G_P(j\omega_{CG}) = -\frac{\pi}{2} - 2\arctg 0.05\omega_{CG} + \pi = \frac{\pi}{4}$$

da cui

$$\arctg 0.05\omega_{CG} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \omega_{CG} = 20 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \approx 8.28 \text{ rad s}^{-1}$$

Essendo ω_{CG} la pulsazione di crossover di guadagno, deve poi risultare:

$$|G_C G_P(j\omega_{CG})| = 1 \Rightarrow \frac{25K_P}{3} \cdot \frac{1}{\omega_{CG}(1+0.05\omega_{CG}^2)} = 1$$

da cui

$$K_P = \frac{3}{25} \omega_{CG} \left(1 + \frac{\omega_{CG}^2}{400} \right) \approx 1.16$$

Il massimo valore del ritardo puro accettabile si ottiene imponendo che il sistema in anello chiuso con ritardo sia asintoticamente o almeno semplicemente stabile, ossia abbia margine di fase non negativo:

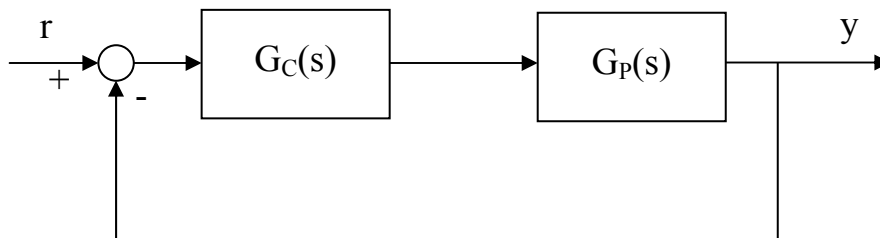
$$M_F' = M_F - \tau \omega_{CG} \geq 0 \Rightarrow \tau \leq \frac{M_F}{\omega_{CG}} = \frac{\pi}{4 \cdot 8.2843} \approx 0.09 \text{ s},$$

dove si è tenuto conto del fatto che il sistema con ritardo puro ha la stessa pulsazione di crossover di quello privo di ritardo e un margine di fase pari a quello del sistema senza ritardo diminuito dello sfasamento introdotto dal ritardo stesso a tale pulsazione.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right), \quad G_P(s) = \frac{1}{(1+s)(1+0.1s)(1+0.05s)(1+0.01s)}.$$



Si progetti il regolatore PID in modo che il sistema complessivo presenti due poli in anello chiuso dominanti complessi e coniugati in $-\sigma \pm j\omega_d$ con coefficiente di smorzamento $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e un terzo polo p lontano con $p \geq 5\sigma$.

Il sistema non compensato è privo di zeri e ha quattro poli (uno in -1, uno in -10, uno in -20 e uno in -100). Inserendo nell'anello il regolatore si hanno in totale due zeri e cinque poli, con funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{K_P}{T_i} \cdot \frac{(1 + T_i s + T_i T_d s^2)}{s(1+s)(1+0.1s)(1+0.05s)(1+0.01s)}.$$

Poiché si richiedono tre soli poli a regolatore inserito, i due zeri del regolatore devono cancellare due poli della funzione di trasferimento del sistema non compensato.

I quattro poli in anello aperto sono tutti cancellabili. Convien dunque cancellare i due poli dominanti che rallentano il sistema in anello chiuso, poiché da essi partono due rami del luogo delle radici. Sia dunque:

$$1 + T_i s + T_i T_d s^2 = (1 + s)(1 + 0.1s) \Rightarrow 1 + T_i s + T_i T_d s^2 = 1 + 1.1s + 0.1s^2,$$

ossia

$$\begin{cases} T_i = 1.1 \\ T_d = \frac{0.1}{T_i} = \frac{0.1}{1.1} = \frac{1}{11} \end{cases}$$

In definitiva si ha una funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G_C(s)G_P(s) = \frac{K_P}{T_i} \cdot \frac{1}{s(1 + 0.05s)(1 + 0.01s)}$$

con $T_i=1.1$. Ne consegue che la funzione di trasferimento in anello chiuso vale:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{G_C(s)G_P(s)}{1 + G_C(s)G_P(s)} = \frac{\frac{K_P}{T_i} \cdot \frac{1}{s(1 + 0.05s)(1 + 0.01s)}}{1 + \frac{K_P}{T_i} \cdot \frac{1}{s(1 + 0.05s)(1 + 0.01s)}} = \\ &= \frac{K_P}{T_i s(1 + 0.05s)(1 + 0.01s) + K_P} = \frac{K_P}{0.0005T_i s^3 + 0.06T_i s^2 + T_i s + K_P} = \\ &= \frac{2000K_P}{T_i} \cdot \frac{1}{s^3 + 120s^2 + 2000s + \frac{2000K_P}{T_i}} \end{aligned}$$

con $T_i=1.1$. Il sistema complessivo deve presentare due poli in anello chiuso dominanti complessi e coniugati in $-\delta\omega_n \pm j\delta\omega_n$ (essendo $\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ si ha un angolo $\varphi=45^\circ$ e quindi poli con parte reale e immaginaria uguali) e un terzo polo p con $p \geq 5\sigma = 5\delta\omega_n$.

Allora il polinomio caratteristico, cioè il denominatore di $G_0(s)$, deve soddisfare la seguente uguaglianza:

$$s^3 + 120s^2 + 2000s + \frac{2000K_P}{1.1} = (s + p)(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)$$

da cui

$$s^3 + 120s^2 + 2000s + \frac{2000K_P}{1.1} = (s + p)(s^2 + \sqrt{2}\omega_n s + \omega_n^2),$$

$$s^3 + 120s^2 + 2000s + \frac{2000K_P}{1.1} = s^3 + (\sqrt{2}\omega_n + p)s^2 + (\omega_n^2 + \sqrt{2}\omega_n p)s + \omega_n^2 p.$$

In definitiva si ha:

$$\begin{cases} 120 = \sqrt{2}\omega_n + p \\ 2000 = \omega_n^2 + \sqrt{2}\omega_n p \\ \frac{2000K_P}{1.1} = \omega_n^2 p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = 120 - \sqrt{2}\omega_n \\ 2000 = \omega_n^2 + \sqrt{2}\omega_n(120 - \sqrt{2}\omega_n) \\ K_P = \frac{1.1}{2000}\omega_n^2 p \end{cases}$$

In particolare, dalla seconda equazione si ha:

$$\omega_n^2 - 120\sqrt{2}\omega_n + 2000 = 0$$

che ha soluzioni per

$$\omega_n = 60\sqrt{2} \pm \sqrt{7200 - 2000} = 60\sqrt{2} \pm 20\sqrt{13} \simeq \begin{cases} 156.96 \\ 12.74 \end{cases}.$$

Quindi si ottiene:

$$\begin{cases} p = 120 - \sqrt{2}\omega_n = \begin{cases} 120 - \sqrt{2} \cdot 156.96 \approx -101.98 \text{ (non accettabile)} \\ 120 - \sqrt{2} \cdot 12.74 \approx 101.98 \end{cases} \\ \omega_n = 12.74 \\ K_P = \frac{1.1}{2000} \omega_n^2 p = \frac{1.1}{2000} \cdot 12.74^2 \cdot 101.98 \approx 9.1 \end{cases}$$

Si ha dunque

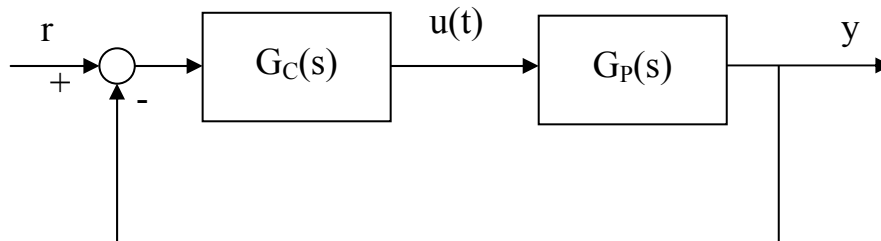
$$\sigma = \delta\omega_n = \frac{\sqrt{2}}{2} 12.74 \approx 9$$

ed evidentemente è verificata la condizione di dominanza $p \geq 5\sigma$.

ESEMPIO

Per il sistema in figura, sia

$$G_P(s) = \frac{1}{(1+s)^3}, \quad G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right).$$



Si determinino i parametri del regolatore in modo che il sistema in anello chiuso sia del secondo ordine e presenti un margine di fase di 60° . Si determinino quindi la funzione di trasferimento e i poli in anello chiuso. Supposto l'ingresso $r(t)$ un gradino unitario, si calcoli l'azione di controllo iniziale $u(0^+)$ ottenuta con una implementazione del regolatore con derivazione sull'errore. Si confronti il risultato ottenuto con lo sforzo di controllo iniziale corrispondente ad una implementazione del regolatore con derivazione sull'uscita. Si calcolino quindi la funzione di trasferimento e i poli in anello chiuso ottenuti con quest'ultima implementazione.

Per rendere il sistema del secondo ordine è necessario cancellare due dei tre poli (tutti cancellabili, essendo disposti tutti in $s=-1$) con i due zeri del regolatore. Imponiamo dunque

$$1 + T_i s + T_i T_d s^2 = (1 + s)^2 \Rightarrow 1 + T_i s + T_i T_d s^2 = 1 + 2s + s^2,$$

ossia

$$\begin{cases} T_i = 2 \\ T_d = \frac{1}{T_i} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il regolatore assume dunque la forma:

$$G_C(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{2s} + \frac{1}{2}s \right) = \frac{K_P}{2s} (1 + s)^2,$$

quindi la funzione di trasferimento di anello è

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{K_P}{2s} (1 + s)^2 \cdot \frac{1}{(1 + s)^3} = \frac{K_P}{2s(1 + s)},$$

e la funzione di risposta armonica in anello aperto vale

$$G(j\omega) = G_C(j\omega)G_P(j\omega) = \frac{K_P}{2j\omega(1 + j\omega)}.$$

Imponiamo ora la specifica sul margine di fase. Deve essere:

$$M_F = \angle G(j\omega_{CG}) + \pi = -\frac{\pi}{2} - \arctg \omega_{CG} + \pi = \frac{\pi}{3}$$

da cui:

$$\arctg \omega_{CG} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \omega_{CG} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega_{CG} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.58 \text{ rad s}^{-1}.$$

Si ha poi

$$|G(j\omega)| = \frac{K_P}{2\omega\sqrt{1+\omega^2}}$$

e deve risultare

$$|G(j\omega_{CG})| = 1 \Rightarrow \frac{K_P}{2\omega_{CG}\sqrt{1+\omega_{CG}^2}} = 1 \Rightarrow K_P = 2\omega_{CG}\sqrt{1+\omega_{CG}^2} = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.$$

Pertanto il regolatore vale:

$$G_C(s) = \frac{2}{3s}(s+1)^2 = \frac{4}{3} + \frac{2}{3s} + \frac{2}{3}s = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s,$$

e la funzione di trasferimento di anello del sistema compensato è

$$G(s) = G_C(s)G_P(s) = \frac{2}{3s}(s+1)^2 \cdot \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{2}{3s(s+1)}.$$

La funzione di trasferimento in anello chiuso del sistema compensato è dunque:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{2}{3s(s+1)}}{1 + \frac{2}{3s(s+1)}} = \frac{2}{3s^2 + 3s + 2} = \frac{\frac{2}{3}}{s^2 + s + \frac{2}{3}}.$$

I poli in anello chiuso sono perciò:

$$p_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

Calcoliamo ora l'azione di controllo iniziale. Nel caso si utilizzi il regolatore PID ideale si ha:

$$U(s) = G_C(s)E(s) = K_P E(s) + \frac{K_I}{s} E(s) + K_D s E(s) = \frac{4}{3} E(s) + \frac{2}{3s} E(s) + \frac{2}{3} s E(s)$$

che antitrasformata fornisce la legge di controllo nel dominio del tempo:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt} = \frac{4}{3} e(t) + \frac{2}{3} \int_0^t e(\tau) d\tau + \frac{2}{3} \cdot \frac{de(t)}{dt}.$$

Quindi lo sforzo di controllo iniziale vale:

$$u(0) = \frac{4}{3} e(0) + \frac{2}{3} \int_0^0 e(\tau) d\tau + \frac{2}{3} \cdot \frac{de(0)}{dt} = \frac{4}{3} e(0) + \frac{2}{3} \cdot \frac{de(0)}{dt}.$$

Per determinare l'errore iniziale e la derivata iniziale dell'errore calcoliamo ora la funzione di trasferimento dell'errore:

$$G_E(s) = \frac{1}{1+G(s)} = \frac{1}{1+\frac{2}{3s(s+1)}} = \frac{3s(s+1)}{3s^2+3s+2} = \frac{s(s+1)}{s^2+s+\frac{2}{3}}.$$

Per il teorema del valore iniziale, si ha:

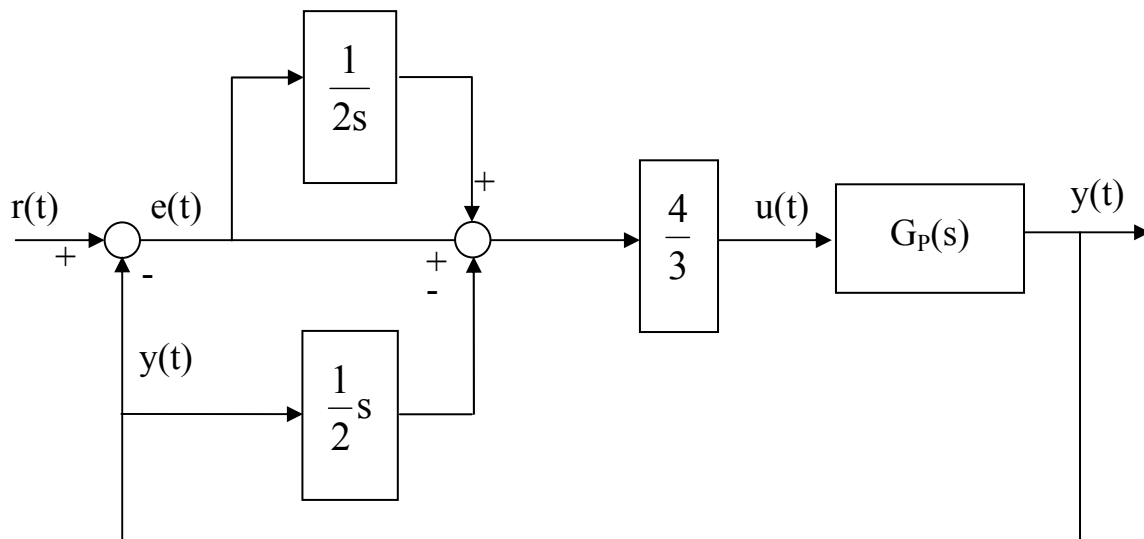
$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sE(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_E(s)R(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s(s+1)}{s^2+s+\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^3}{s^3} = 1.$$

Inoltre per il teorema del valore iniziale, si ha anche:

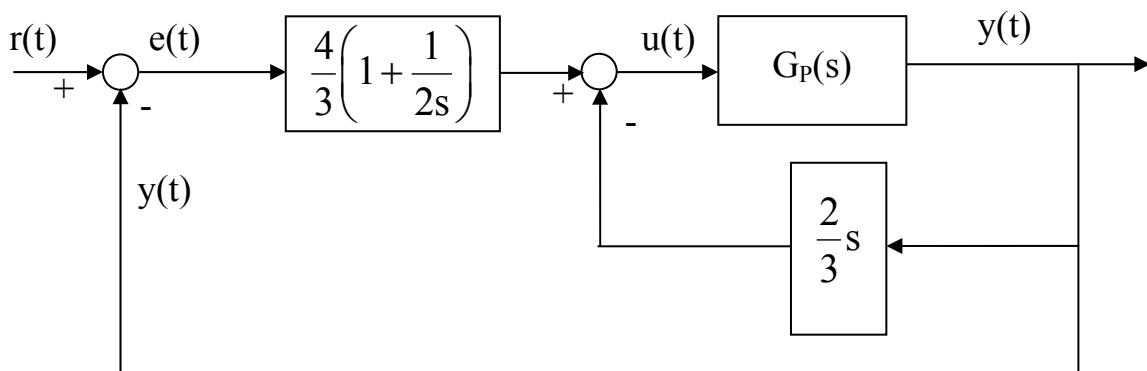
$$\left. \frac{d}{dt} e(t) \right|_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \mathcal{L} \left\{ \frac{d}{dt} e(t) \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot (sE(s) - e(0^-)) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 E(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s^4}{s^3} = \infty.$$

Dunque il valore iniziale dell'azione di controllo diverge. Ciò era prevedibile in quanto l'implementazione di un controllore PID con azione derivativa non nulla e derivazione dell'errore comporta la saturazione dell'azione di controllo in presenza di brusche variazioni del riferimento.

Un metodo alternativo consiste nell'utilizzare un regolatore con derivazione sull'uscita, come nella figura successiva.



Determiniamo lo schema a blocchi equivalente sommando le due azioni proporzionale e integrale in parallelo prima del sommatore e riportando il guadagno proporzionale a monte di quest'ultimo, ottenendo la figura che segue.



In definitiva l'azione derivativa si traduce in una retroazione interna dell'uscita.

Si determina quindi agevolmente la nuova funzione di trasferimento di anello come il prodotto dell'azione PI del regolatore e della funzione di trasferimento ottenuta retroazionando il plant con l'azione D. Si ha dunque una nuova funzione di trasferimento di anello:

$$G^*(s) = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{1}{2s} \right) \cdot \frac{\frac{1}{(s+1)^3}}{1 + \frac{1}{(s+1)^3} \cdot \frac{2}{3}s} = \left(1 + \frac{1}{2s} \right) \frac{4}{3(s+1)^3 + 2s} = \frac{2(2s+1)}{s(3s^3 + 9s^2 + 11s + 3)}$$

Con questa implementazione, tuttavia, la funzione di trasferimento è differente da quella progettata e vale:

$$\begin{aligned} G_0(s) &= \frac{G^*(s)}{1+G^*(s)} = \frac{\frac{2(2s+1)}{s(3s^3+9s^2+11s+3)}}{1+\frac{2(2s+1)}{s(3s^3+9s^2+11s+3)}} = \\ &= \frac{2(2s+1)}{3s^4+9s^3+11s^2+7s+2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(2s+1)}{\left(s^2+s+\frac{2}{3}\right) \cdot (s+1)^2} \end{aligned}$$

ovvero contiene oltre ai poli progettati (che sono dominanti), disposti in:

$$p_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{15}}{6},$$

anche i poli in anello aperto e uno zero che modella le azioni P e I del regolatore.

Con questo tipo di configurazione la legge di controllo nel dominio del tempo è così modificata:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau - K_D \frac{dy(t)}{dt} = \frac{4}{3} e(t) + \frac{2}{3} \int_0^t e(\tau) d\tau - \frac{2}{3} \cdot \frac{dy(t)}{dt}.$$

Quindi l'azione di controllo iniziale vale:

$$u(0) = \frac{4}{3} e(0) + \frac{2}{3} \int_0^0 e(\tau) d\tau - \frac{2}{3} \cdot \frac{dy(0)}{dt} = \frac{4}{3} e(0) - \frac{2}{3} y(0).$$

Per determinare l'errore iniziale calcoliamo la nuova funzione di trasferimento dell'errore:

$$G_E(s) = \frac{1}{1 + G^*(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2(2s+1)}{s(3s^3 + 9s^2 + 11s + 3)}} =$$

$$= \frac{s(3s^3 + 9s^2 + 11s + 3)}{s(3s^3 + 9s^2 + 11s + 3) + 2(2s+1)} = \frac{s(3s^3 + 9s^2 + 11s + 3)}{3s^4 + 9s^3 + 11s^2 + 7s + 2}$$

Per il teorema del valore iniziale, si ha:

$$e(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G_E(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{s(3s^3 + 9s^2 + 11s + 3)}{3s^4 + 9s^3 + 11s^2 + 7s + 2} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{3s^4}{3s^4} = 1.$$

Analogamente risulta:

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G_0(s) R(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{(2s+1)}{\left(s^2 + s + \frac{2}{3}\right) \cdot (s+1)^2} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{4s^2}{3s^5} = 0,$$

come prevedibile poiché all'istante zero l'uscita è dunque quella misurata (in questo caso è $w(t)=y(t)$) è ancora nulla.

In definitiva si ottiene

$$u(0) = \frac{4}{3}e(0) - \frac{2}{3}y(0) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3},$$

che è un valore finito. Ciò era prevedibile in quanto l'implementazione di un controllore PID con azione derivativa non nulla e derivazione dell'uscita non comporta la saturazione dell'azione di controllo in presenza di brusche variazioni del riferimento.