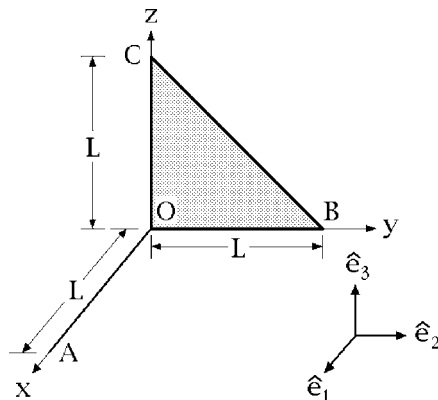


Esercizio 1

Un sistema rigido \mathbb{S} si compone di una lamina triangolare OBC e di un'asta rettilinea OA , saldate ortogonalmente l'una all'altra in O . OBC è rettangolo e isoscele, con cateti di lunghezza L ; di pari lunghezza è l'asta OA . Nelle coordinate della terna solidale $Oxyz$ (vedi figura) le densità dell'asta e della lamina sono date dalle espressioni:

$$\lambda(x) = m(L+x)/L^2 \quad \sigma(y,z) = myz/L^4 .$$

Il sistema rigido si muove, con punto fisso O , rispetto ad una terna fissa $Ox'y'z'$, non disegnata in figura; all'istante $t = 0$ la velocità angolare di \mathbb{S} rispetto a tale terna vale $\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$.

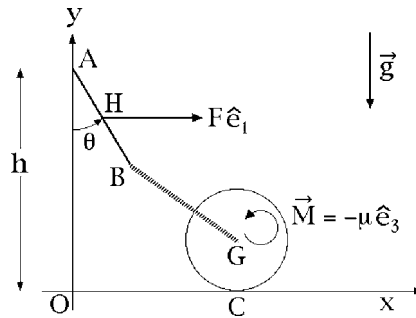


Determinare:

- le coordinate del baricentro G del sistema rispetto alla terna solidale $Oxyz$;
- la matrice d'inerzia del sistema rispetto alla stessa terna $Oxyz$;
- l'energia cinetica del sistema relativa a $Ox'y'z'$, all'istante $t = 0$;
- il modulo della velocità del baricentro rispetto alla terna fissa, a $t = 0$;
- il modulo del momento angolare \vec{K}_O del sistema rispetto alla terna fissa, sempre a $t = 0$;
- l'asse istantaneo di moto (o di Mozzi) allo stesso istante $t = 0$ del sistema.

Esercizio 2

In un piano verticale Oxy si consideri il sistema pesante costituito da un'asta AB , omogenea di massa m e lunghezza L , e da un disco omogeneo di massa M e raggio R . L'estremo A è fisso sull'asse Oy , ad altezza $h > L + 2R$ sopra l'asse orizzontale Ox , mentre B è collegato al centro G del disco tramite una molla di costante elastica $k > 0$. Il disco rotola senza strisciare lungo la guida rettilinea Ox . Al baricentro H dell'asta è applicata una forza costante orizzontale $\vec{F} = F \hat{e}_1$, mentre sul disco agisce una coppia di momento costante $\vec{M} = -\mu \hat{e}_3$ ($\mu > 0$).



Scelti come coordinate lagrangiane l'angolo θ che l'asta forma con la verticale ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) e l'ascissa x del centro G del disco, determinare:

- le equazioni pure del moto;
- il valore della costante F in modo che per $\theta = 0$ il sistema possa essere in equilibrio (per semplicità si usi la condizione di equilibrio ordinario);
- fissata che sia la costante F come richiesto al punto precedente, le configurazioni di equilibrio ordinarie e di confine del sistema;
- la stabilità degli equilibri ordinari, sempre con la stessa scelta di F ;
- le reazioni vincolari agenti sull'asta in A e sul disco in C , in corrispondenza degli equilibri.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) **Coordinate del baricentro G del sistema rispetto alla terna solidale $Oxyz$**
 Convieni calcolare la posizione del baricentro G del sistema facendo uso del teorema distributivo, una volta determinati i baricentri dell'asta OA e della lamina triangolare OBC .

Massa e baricentro dell'asta

La massa totale dell'asta OA è data dall'espressione:

$$M_{OA} = \int_0^L \lambda(x) dx = \int_0^L \frac{m}{L^2}(L+x) dx = \frac{3}{2}m$$

per cui il vettore posizione del relativo baricentro G_{OA} rispetto a $Oxyz$ risulta:

$$G_{OA} - O = \frac{1}{M_{OA}} \int_0^L \lambda(x) x dx \hat{e}_1 = \frac{2}{3m} \int_0^L \frac{m}{L^2}(L+x) x dx \hat{e}_1 = \frac{5}{9}L \hat{e}_1 .$$

Massa e baricentro della lamina

Per quanto riguarda la massa della lamina triangolare si ha invece:

$$M_{OBC} = \int_0^L \int_0^{L-y} \sigma(y, z) dz dy = \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz dz dy = \frac{m}{24}$$

in modo che il vettore posizione del baricentro diviene:

$$\begin{aligned} G_{OBC} - O &= \frac{1}{M_{OBC}} \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz [y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3] dz dy = \\ &= \frac{24}{m} \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} [y^2 z \hat{e}_2 + yz^2 \hat{e}_3] dz dy = \frac{2}{5} L \hat{e}_2 + \frac{2}{5} L \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

Baricentro del sistema

Il baricentro G del sistema si deduce dalla proprietà distributiva, per mezzo della relazione

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{M_{OA}(G_{OA} - O) + M_{OBC}(G_{OBC} - O)}{M_{OA} + M_{OBC}} = \\ &= \left[\frac{3}{2}m + \frac{1}{24}m \right]^{-1} \left[\frac{3}{2}m \frac{5}{9}L \hat{e}_1 + \frac{1}{24}m \left(\frac{2}{5}L \hat{e}_2 + \frac{2}{5}L \hat{e}_3 \right) \right] = \frac{20}{37}L \hat{e}_1 + \frac{2}{185}L \hat{e}_2 + \frac{2}{185}L \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

(b) Matrice d'inerzia del sistema rispetto alla terna Oxyz

La matrice d'inerzia del sistema \mathbb{S} può essere determinata convenientemente calcolando separatamente le matrici d'inerzia della lamina OBC e dell'asta OA rispetto alla stessa terna solidale $Oxyz$, e sommando quindi termine a termine i risultati così ottenuti.

Matrice d'inerzia dell'asta

La matrice d'inerzia dell'asta rispetto alla terna solidale $Oxyz$ si riduce per simmetria alla semplice forma

$$[L]^{OA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OA} & 0 \\ 0 & 0 & L_{yy}^{OA} \end{pmatrix}$$

e poiché il momento d'inerzia rispetto all'asse Oy è dato dall'espressione

$$L_{yy}^{OA} = \int_0^L \lambda(x) x^2 dx = \int_0^L \frac{m}{L^2} (L+x) x^2 dx = \frac{7}{12} mL^2$$

risulta

$$[L]^{OA} = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 \end{pmatrix} .$$

Matrice d'inerzia della lamina triangolare

La lamina si colloca nel piano coordinato Oyz , che è dunque un piano di simmetria ed impone alla matrice d'inerzia di OBC la seguente struttura generale

$$[L]^{OBC} = \begin{pmatrix} 2L_{yy}^{OBC} & 0 & 0 \\ 0 & L_{yy}^{OBC} & L_{yz}^{OBC} \\ 0 & L_{yz}^{OBC} & L_{yy}^{OBC} \end{pmatrix}.$$

Il momento d'inerzia L_{yy}^{OBC} rispetto all'asse Oy viene calcolato mediante integrazione esplicita in coordinate cartesiane ed è dato da:

$$L_{yy}^{OBC} = \int_0^L \int_0^{L-y} \sigma(y, z) z^2 dz dy = \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz z^2 dz dy = \frac{1}{120} mL^2.$$

In modo analogo si determina il prodotto d'inerzia L_{yz}^{OBC} :

$$L_{yz}^{OBC} = - \int_0^L \int_0^{L-y} \sigma(y, z) yz dz dy = - \int_0^L \int_0^{L-y} \frac{m}{L^4} yz yz dz dy = -\frac{1}{180} mL^2$$

per cui la matrice d'inerzia della lamina si riduce a

$$[L]^{OBC} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 1/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 1/120 \end{pmatrix}.$$

Matrice d'inerzia del sistema rigido

La matrice d'inerzia del sistema si ricava sommando termine a termine le matrici d'inerzia calcolate:

$$\begin{aligned} [L] &= [L]^{OA} + [L]^{OBC} = mL^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7/12 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 \end{pmatrix} + mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 1/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 1/120 \end{pmatrix} \\ &= mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 71/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 71/120 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Energia cinetica relativa alla terna fissa, all'istante $t = 0$

Poiché l'origine O della terna solidale è un punto fisso rispetto alla terna fissa $Ox'y'z'$, l'energia cinetica del sistema relativa alla stessa terna è data dalla relazione

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot L_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 71/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 71/120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{mL^2}{2} \left[\frac{1}{60} \omega_1^2 + \frac{71}{120} \omega_2^2 + \frac{71}{120} \omega_3^2 - \frac{1}{90} \omega_2 \omega_3 \right]. \end{aligned}$$

(d) **Modulo della velocità del baricentro G rispetto alla terna fissa**

Poiché l'origine O costituisce un punto fisso per il sistema rigido, rispetto alla terna assoluta, la velocità del baricentro G rispetto a tale terna può essere espressa in termini del teorema di Poisson:

$$\dot{G} = \vec{\omega} \wedge (G - O)$$

ossia, sostituendo le espressioni esplicite di $G - O$ e $\vec{\omega}$:

$$\begin{aligned} \dot{G} &= (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \wedge \left[\frac{20}{37} L \hat{e}_1 + \frac{2}{185} L \hat{e}_2 + \frac{2}{185} L \hat{e}_3 \right] = \\ &= L \left(\frac{2}{185} \omega_2 - \frac{2}{185} \omega_3 \right) \hat{e}_1 + L \left(\frac{20}{37} \omega_3 - \frac{2}{185} \omega_1 \right) \hat{e}_2 + L \left(\frac{2}{185} \omega_1 - \frac{20}{37} \omega_2 \right) \hat{e}_3 \end{aligned}$$

Il modulo della velocità assoluta di G diventa pertanto:

$$|\dot{G}| = L \sqrt{\left(\frac{2}{185} \omega_2 - \frac{2}{185} \omega_3 \right)^2 + \left(\frac{20}{37} \omega_3 - \frac{2}{185} \omega_1 \right)^2 + \left(\frac{2}{185} \omega_1 - \frac{20}{37} \omega_2 \right)^2}$$

(e) **Modulo del momento angolare \vec{K}_O rispetto alla terna fissa**

Il punto fisso O comporta che il momento angolare del sistema rigido rispetto alla terna fissa $ox'y'z'$ possa determinarsi in termini dell'operatore d'inerzia in O , secondo l'espressione

$$\vec{K}_O = L_O[\vec{\omega}].$$

Le componenti (K_1, K_2, K_3) di \vec{K}_O rispetto alla terna solidale si ottengono dalle componenti $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ della velocità angolare istantanea per mezzo della corrispondente relazione matriciale

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix} &= [L] \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = mL^2 \begin{pmatrix} 1/60 & 0 & 0 \\ 0 & 71/120 & -1/180 \\ 0 & -1/180 & 71/120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \\ &= mL^2 \begin{pmatrix} \omega_1 \frac{1}{60} \\ \frac{7}{120} \omega_2 - \frac{1}{180} \omega_3 \\ -\frac{1}{180} \omega_2 + \frac{71}{120} \omega_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in modo che

$$\vec{K}_O = mL^2 \frac{1}{60} \omega_1 \hat{e}_1 + mL^2 \left(\frac{7}{120} \omega_2 - \frac{1}{180} \omega_3 \right) \hat{e}_2 + mL^2 \left(-\frac{1}{180} \omega_2 + \frac{71}{120} \omega_3 \right) \hat{e}_3$$

e quindi:

$$|\vec{K}_O| = mL^2 \sqrt{\frac{1}{3600} \omega_1^2 + \left(\frac{7}{120} \omega_2 - \frac{1}{180} \omega_3 \right)^2 + \left(-\frac{1}{180} \omega_2 + \frac{71}{120} \omega_3 \right)^2}.$$

(f) **Equazione parametrica dell'asse istantaneo di moto a $t = 0$**

La velocità di un punto arbitrario P del sistema è data dalla formula di Poisson

$$\dot{P} = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

e risulta quindi ortogonale ad $\vec{\omega}$ salvo che essa non sia nulla. I punti dell'asse istantaneo di moto sono dunque tutti e soli quelli della retta passante per il punto fisso O la cui direzione è individuata dal vettore $\vec{\omega}$ — asse istantaneo di rotazione. L'equazione parametrica di questa retta si scrive immediatamente come

$$P - O = (\omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3) \lambda = \omega_1 \lambda \hat{e}_1 + \omega_2 \lambda \hat{e}_2 + \omega_3 \lambda \hat{e}_3, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) **Equazioni pure del moto**

Nell'ipotesi che i vincoli siano ideali, le equazioni pure del moto possono identificarsi con quelle di Lagrange, che quindi vengono scritte determinando preliminarmente la lagrangiana del sistema.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema può essere scritta come somma delle energie cinetiche delle due parti rigide — asta e disco — che lo compongono.

L'energia cinetica dell'asta si ottiene direttamente applicando la formula per l'energia cinetica di un corpo rigido con asse fisso Az , osservato che la velocità angolare istantanea è data dall'ovvia relazione $\vec{\omega}_{OA} = \dot{\theta} \hat{e}_3$:

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I_{Az} |\dot{\theta} \hat{e}_3|^2 = \frac{1}{2} \frac{mL^2}{3} \dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2.$$

Per quel che riguarda il disco, è vantaggioso fare uso del teorema di König:

$$T_{\text{disco}} = \frac{M}{2} \dot{G}^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} |\vec{\omega}_{\text{disco}}|^2$$

con:

$$\begin{aligned} G - O &= x \hat{e}_1 & \dot{G} &= \dot{x} \hat{e}_1 \\ \vec{\omega}_{\text{disco}} &= -\frac{\dot{x}}{R} \hat{e}_3 & I_{Gz} &= \frac{MR^2}{2} \end{aligned}$$

e quindi:

$$T_{\text{disco}} = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{R^2} = \frac{M}{2} \dot{x}^2 + \frac{M}{4} \dot{x}^2 = \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

Per l'energia cinetica del sistema si deduce pertanto l'espressione:

$$T = T_{OA} + T_{\text{disco}} = \frac{mL^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{3}{4} M \dot{x}^2.$$

Potenziale del sistema

Le sollecitazioni attive applicate al sistema sono date dal peso, dall'interazione elastica agente fra B e G , dalla forza costante $F \hat{e}_1$ agente nel baricentro H dell'asta e dalla coppia applicata al disco, di momento $\vec{M} = -\mu \hat{e}_3$. Si verifica agevolmente che tutte queste sollecitazioni sono posizionali e conservative, sicché è dato definire un potenziale totale del sistema. A questo scopo conviene esaminare separatamente, una ad una, tutte le sollecitazioni, determinando direttamente il potenziale di quelle palesemente posizionali e conservative, e calcolando preliminarmente le componenti lagrangiane delle altre, salvo poi verificare l'esistenza del relativo potenziale.

Potenziale elastico

All'interazione elastica fra i punti B e G , notoriamente posizionale e conservativa, si associa il potenziale

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}(G - B)^2 = -\frac{k}{2}[G - O - (B - O)]^2$$

in cui risulta:

$$G - O = x \hat{e}_1 + R \hat{e}_2$$

mentre:

$$B - O = B - A + A - O = L \sin \theta \hat{e}_1 - L \cos \theta \hat{e}_2 + h \hat{e}_2 = L \sin \theta \hat{e}_1 + (h - L \cos \theta) \hat{e}_2 .$$

Sostituendo, ne segue allora che:

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} &= -\frac{k}{2} [(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + (R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2]^2 = \\ &= -\frac{k}{2} [x^2 + L^2 \sin^2 \theta - 2Lx \sin \theta + (R - h)^2 + 2(R - h)L \cos \theta + L^2 \cos^2 \theta] = \\ &= -\frac{k}{2} [x^2 - 2Lx \sin \theta + 2(R - h)L \cos \theta + (R - h)^2 + L^2] . \end{aligned}$$

Potenziale gravitazionale

Poiché l'ordinata del centro del disco omogeneo, che rappresenta per simmetria anche il baricentro del disco stesso, si mantiene costante al valore R durante il moto di puro rotolamento lungo la guida orizzontale Ox , il potenziale gravitazionale del disco è a propria volta costante e può dunque essere ignorato. Il solo termine di potenziale gravitazionale deve essere imputato all'asta, e si scrive:

$$U_{\text{g}} = U_{\text{g}}^{OA} = -mg(H - A) \cdot \hat{e}_2 = -mg \left[-\frac{L}{2} \cos \theta \right] = \frac{mgL}{2} \cos \theta .$$

Forza costante

Per la forza costante può essere interessante, anziché scrivere direttamente l'espressione del relativo potenziale, ricavare le componenti lagrangiane della sollecitazione e ricavare

quindi il potenziale associato. Dal momento che la forza risulta applicata in H , il lavoro virtuale infinitesimo della sollecitazione assume la forma:

$$\begin{aligned} Q_\theta^F d\theta + Q_x^F dx &= F \hat{e}_1 \cdot d(H - A) = F \hat{e}_1 \cdot d\left[\frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2\right] = \\ &= F \hat{e}_1 \cdot \left[\frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2\right] d\theta = \frac{FL}{2} \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

in modo che le componenti lagrangiane della sollecitazione si deducono per confronto:

$$Q_\theta^F = \frac{FL}{2} \cos \theta \quad Q_x^F = 0$$

e ad esse è immediatamente associabile il potenziale:

$$U_F = \frac{FL}{2} \sin \theta .$$

Coppia

È facile convincersi che $\alpha = -x/R$ costituisce l'angolo di rotazione del disco relativamente alla terna assoluta, angolo peraltro orientato conformemente alla regola della mano destra rispetto all'asse Gz . La coppia applicata al disco rappresenta un sistema di forze con risultante nullo e momento risultante indipendente dalla scelta del polo:

$$\vec{R}^{\text{coppia}} = 0 \quad \vec{M}^{\text{coppia}} = -\mu \hat{e}_3 .$$

Trattandosi di moto rigido piano in Oxy , le componenti lagrangiane di questo sistema di sollecitazioni possono essere ricavate applicando le relazioni generali:

$$\begin{aligned} Q_\theta^{\text{coppia}} &= \frac{\partial G}{\partial \theta} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(-\frac{x}{R}\right) \hat{e}_3 \cdot (-\mu \hat{e}_3) = 0 \\ Q_x^{\text{coppia}} &= \frac{\partial G}{\partial x} \cdot 0 + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{R}\right) \hat{e}_3 \cdot (-\mu \hat{e}_3) = \frac{\mu}{R} \end{aligned}$$

e ad esse viene associato l'ovvio potenziale:

$$U^{\text{coppia}} = \frac{\mu}{R} x .$$

Potenziale totale

Il potenziale totale del sistema è definito dalla somma dei potenziali parziali delle singole sollecitazioni attive, tutte posizionali e conservative, e risulta:

$$\begin{aligned} U(\theta, x) &= U_{\text{el}} + U_{\text{g}} + U_F + U_{\text{coppia}} = \\ &= -\frac{k}{2} x^2 + kLx \sin \theta - kL(R - h) \cos \theta + \frac{mgL}{2} \cos \theta + \frac{FL}{2} \sin \theta + \frac{\mu}{R} x = \\ &= -\frac{k}{2} x^2 + \frac{\mu}{R} x + kLx \sin \theta + \frac{FL}{2} \sin \theta + \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta \end{aligned}$$

in cui sono state ignorate tutte le costanti additive inessenziali.

Lagrangiana ed equazioni di Lagrange

La lagrangiana del sistema è data, per definizione, dalla somma dell'energia cinetica T e del potenziale totale U :

$$\mathcal{L} = T+U = \frac{mL^2}{6}\dot{\theta}^2 + \frac{3}{4}M\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 + \frac{\mu}{R}x + kLx \sin\theta + \frac{FL}{2} \sin\theta + \left[\frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \cos\theta .$$

Dalle espressioni parziali che compaiono nei binomi di Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) &= \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= kLx \cos\theta + \frac{FL}{2} \cos\theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \sin\theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) &= \frac{3}{2}M\ddot{x} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin\theta \end{aligned}$$

si deducono allora le equazioni lagrangiane del moto cercate:

$$\begin{cases} \frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} - kLx \cos\theta - \frac{FL}{2} \cos\theta + \left[\frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \sin\theta = 0 \\ \frac{3}{2}M\ddot{x} + kx - \frac{\mu}{R} - kL \sin\theta = 0 . \end{cases} \quad (1)$$

Osservazione. Equazione cardinale del momento angolare per il disco in C

Dal momento che il baricentro G si sposta parallelamente al punto C di contatto con la guida orizzontale Ox , l'equazione cardinale del momento angolare del disco, rispetto al polo C , assume la forma:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_C}{dt} &= (C - C) \wedge \vec{\Phi}_C + (G - C) \wedge (-Mg \hat{e}_2) + (G - C) \wedge [-k(G - B)] - \mu \hat{e}_3 = \\ &= R \hat{e}_2 \wedge [-k(x - L \sin\theta) \hat{e}_1 - k(R - h + L \cos\theta) \hat{e}_2] - \mu \hat{e}_3 = \\ &= -Rk(-x + L \sin\theta) \hat{e}_3 - \mu \hat{e}_3 . \end{aligned}$$

Ma in virtù dell'ipotesi di puro rotolamento del disco su Ox , il punto C rappresenta il centro di rotazione istantanea del disco stesso; inoltre, il vettore momento angolare in C dipende soltanto dall'atto di moto all'istante considerato e si identifica quindi con quello di moto rotatorio con asse fisso di rotazione Cz , moto che a $t = 0$ condivide con il moto reale il relativo atto di moto — in certo qual modo si può affermare che i due moti risultano “tangenti” l'uno rispetto all'altro all'istante $t = 0$. Si ha pertanto:

$$\vec{K}_C = I_{Cz} \left(-\frac{\dot{x}}{R} \hat{e}_3 \right) = \frac{3}{2}MR^2 \left(-\frac{\dot{x}}{R} \right) \hat{e}_3 = -\frac{3}{2}MR\dot{x} \hat{e}_3$$

da cui si deduce:

$$-\frac{3}{2}MR\ddot{x} \hat{e}_3 = -Rk(-x + L \sin\theta) \hat{e}_3 - \mu \hat{e}_3$$

ed infine:

$$\frac{3}{2}MR\ddot{x} = Rk(-x + L \sin \theta) + \mu$$

che equivale alla seconda delle equazioni di Lagrange (1).

Osservazione. Equazione cardinale del momento angolare per l'asta in A

L'equazione cardinale del momento angolare per l'asta OA , rispetto al polo fisso A , si ottiene in maniera analoga:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{K}_A}{dt} &= (H - A) \wedge (F \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2) + \\ &+ (B - A) \wedge [k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2] + (A - A) \wedge \vec{\Phi}_A = \\ &= (B - A) \wedge \left[\frac{F}{2} \hat{e}_1 - \frac{mg}{2} \hat{e}_2 + k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2 \right] = \\ &= L(\sin \theta \hat{e}_1 - \cos \theta \hat{e}_2) \wedge \\ &\quad \wedge \left[\left(\frac{F}{2} + k(x - L \sin \theta) \right) \hat{e}_1 + \left(-\frac{mg}{2} + k(R - h + L \cos \theta) \right) \hat{e}_2 \right] = \\ &= L \left[-\frac{mg}{2} \sin \theta + k(R - h + L \cos \theta) \sin \theta + \frac{F}{2} \cos \theta + k(x - L \sin \theta) \cos \theta \right] \hat{e}_3 = \\ &= L \left[kx \cos \theta + \frac{F}{2} \cos \theta - \frac{mg}{2} \sin \theta - k(h - R) \sin \theta \right] \hat{e}_3 \\ &= \left[kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left(\frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right) \sin \theta \right] \hat{e}_3 \end{aligned}$$

e poiché:

$$\vec{K}_A = I_{Az} \dot{\theta} \hat{e}_3 = \frac{mL^2}{3} \dot{\theta} \hat{e}_3$$

si conclude che:

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} \hat{e}_3 = \left[kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left(\frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right) \sin \theta \right] \hat{e}_3$$

ossia:

$$\frac{mL^2}{3} \ddot{\theta} = kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right] \sin \theta$$

equivalente alla prima delle (1).

(b) Valore di F

Le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive complessivamente applicate al sistema si ottengono calcolando il gradiente del potenziale totale:

$$\begin{cases} Q_\theta(\theta, x) = U_\theta = kLx \cos \theta + \frac{FL}{2} \cos \theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right] \sin \theta \\ Q_x(\theta, x) = U_x = -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin \theta . \end{cases}$$

In virtù del teorema dei lavori virtuali, la configurazione di confine

$$(\theta, x) = (0, x_0)$$

è di equilibrio se e soltanto se:

$$U_\theta(0, x_0) \delta\theta + U_x(0, x_0) \delta x \leq 0 \quad \forall \delta x \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta\theta \geq 0$$

ossia:

$$\begin{cases} U_x(0, x_0) = 0 \\ U_\theta(0, x_0) \leq 0. \end{cases}$$

Queste condizioni possono scriversi esplicitamente nella forma:

$$\begin{cases} \left[-kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin \theta \right] \Big|_{\theta=0, x=x_0} = 0 \\ \left[kx \cos \theta + \frac{F}{2} \cos \theta - \left[\frac{mg}{2} + k(h-R) \right] \sin \theta \right] \Big|_{\theta=0, x=x_0} \leq 0 \end{cases}$$

e dunque:

$$\begin{cases} -kx_0 + \frac{\mu}{R} = 0 \\ kx_0 + \frac{F}{2} \leq 0 \end{cases}$$

da cui si conclude:

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\mu}{kR} \\ F \leq -\frac{2\mu}{R}. \end{cases}$$

Il massimo valore di F per cui la configurazione $(\theta, x) = (0, \mu/kR)$ risulta di equilibrio è perciò:

$$F = F_{\max} = -\frac{2\mu}{R}.$$

(c) **Equilibri per $F = -2\mu/R$**

A causa della condizione $0 \leq \theta \leq \pi/2$ assunta per ipotesi sull'angolo di rotazione dell'asta, ci si aspetta che il sistema possa presentare sia configurazioni di equilibrio ordinarie che di confine, che conviene quindi esaminare separatamente.

Equilibri ordinari

Gli equilibri ordinari del sistema, puramente posizionale e conservativo, sono tutti e soli i punti critici del potenziale totale compresi entro la striscia aperta:

$$\{(\theta, x) \in \mathbb{R}^2 : \theta \in (0, \pi/2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Eguagliando a zero le componenti del gradiente di U si perviene al sistema di equazioni trigonometriche:

$$\begin{cases} kLx \cos \theta - \frac{L\mu}{R} \cos \theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h-R) \right] \sin \theta = 0 \\ -kx + \frac{\mu}{R} + kL \sin \theta = 0 \end{cases}$$

in cui basta ricavare x dalla seconda equazione e sostituire l'espressione così dedotta nella prima per ottenere

$$\begin{cases} x = \frac{\mu}{kR} + L \sin \theta \\ kL^2 \sin \theta \cos \theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R) \right] \sin \theta = 0 \end{cases}$$

e quindi l'equazione trigonometrica nella sola variabile angolare θ :

$$\sin \theta \left[kL \cos \theta - \frac{mg}{2} - k(h - R) \right] = 0 .$$

Quest'ultima equazione può essere risolta eguagliando a zero i singoli fattori che vi compaiono a primo membro.

(i) Una possibilità è che si abbia:

$$\sin \theta = 0$$

da cui si deducono le soluzioni:

$$\theta = 0 , \quad \pi ,$$

la prima corrispondente ad una configurazione di confine e la seconda non accettabile, in quanto non compresa nell'intervallo di definizione della variabile angolare $0 \leq \theta \leq \pi/2$;

(ii) la seconda possibilità è che risulti:

$$\cos \theta = \frac{1}{kL} \left[\frac{mg}{2} + k(h - R) \right] = \frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L} > 0$$

e quindi:

$$\theta = \arccos \left(\frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L} \right) = \theta^* \in (0, \pi/2)$$

sempreché valga $\frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L} < 1$. La soluzione residua:

$$\theta = -\theta^*$$

non è accettabile perché non appartenente all'intervallo $[0, \pi/2]$.

In definitiva, gli equilibri ordinari del sistema si riducono all'unica configurazione:

$$(\theta, x) = \left(\theta^*, \frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^* \right) = (\theta^*, x^*) .$$

Equilibri di confine

Si è già stabilito che nell'ipotesi di $F = -2\mu/R$ si ha un equilibrio di confine in:

$$(\theta, x) = (0, \mu/kR) ,$$

il solo con $\theta = 0$. Per $\theta = \pi/2$ la configurazione $(\theta, x) = (\pi/2, x_0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ opportuno, risulta di equilibrio se e solo se:

$$U_\theta(\pi/2, x_0) \delta\theta + U_x(\pi/2, x_0) \delta x \leq 0 \quad \forall \delta\theta \leq 0, \quad \forall \delta x \in \mathbb{R}$$

in forza del teorema dei lavori virtuali. Questa condizione equivale al sistema:

$$\begin{cases} U_x(\pi/2, x_0) = 0 \\ U_\theta(\pi/2, x_0) \geq 0 \end{cases}$$

e scritta in forma esplicita diventa:

$$\begin{cases} -kx_0 + \frac{\mu}{R} + kL = 0 \\ -\left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \geq 0 \end{cases}$$

in cui ovviamente la seconda disequazione che non può essere verificata. L'unica configurazione di equilibrio di confine è quindi $(\theta, x) = (0, \mu/kR)$.

(d) Stabilità degli equilibri ordinari

L'analisi di stabilità degli equilibri ordinari richiede preliminarmente il calcolo dell'hessiana del potenziale totale, ovvero delle derivate parziali seconde:

$$U_{\theta\theta} = -kLx \sin \theta - \frac{FL}{2} \sin \theta - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta$$

$$U_{\theta x} = U_{x\theta} = kL \cos \theta \quad U_{xx} = -k$$

con $F = -2\mu/R$. Nell'unico equilibrio ordinario $(\theta, x) = (\theta^*, x^*) = \left(\theta^*, \frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^*\right)$ si ha:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta} &= -kL \left(\frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^*\right) \sin \theta^* + \frac{\mu L}{R} \sin \theta^* - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta^* = \\ &= -kL^2 \sin^2 \theta^* - \left[\frac{mgL}{2} + kL(h - R)\right] \cos \theta^* = \\ &= -kL^2 \left[\sin^2 \theta^* + \left(\frac{mg}{2kL} + \frac{h - R}{L}\right) \cos \theta^*\right] = -kL^2 (\sin^2 \theta^* + \cos^2 \theta^*) = -kL^2 \end{aligned}$$

$$U_{\theta x} = U_{x\theta} = kL \cos \theta^*$$

$$U_{xx} = -k$$

in modo che l'hessiana del potenziale diventa:

$$H_U(\theta^*, x^*) = \begin{pmatrix} -kL^2 & kL \cos \theta^* \\ kL \cos \theta^* & -k \end{pmatrix}.$$

Il determinante della matrice è strettamente positivo:

$$\det H_U(\theta^*, x^*) = k^2 L^2 - k^2 L^2 \cos^2 \theta^* = k^2 L^2 \sin^2 \theta^* > 0$$

in quanto $\theta^* \in (0, \pi/2)$, mentre per la traccia vale:

$$\text{tr}H_U(\theta^*, x^*) = -kL^2 - k < 0 .$$

L'hessiana del potenziale presenta in (θ^*, x^*) due autovalori strettamente positivi, per cui il corrispondente equilibrio costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

(e) Reazioni vincolari in A e C in tutte le configurazioni di equilibrio

Le reazioni vincolari agenti sull'asta e sul disco, rispettivamente nei punti A e C , si deducono dalle equazioni cardinali della statica, e più precisamente da quelle dell'impulso. L'equazione cardinale della quantità di moto per l'asta, nel caso statico si scrive

$$0 = F \hat{e}_1 - mg \hat{e}_2 + k(G - B) + \vec{\Phi}_A$$

mentre per il disco assume la forma:

$$0 = -Mg \hat{e}_2 - k(G - B) + \vec{\Phi}_C .$$

Dalla prima equazione si ricava:

$$\vec{\Phi}_A = -F \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 - k(G - B)$$

e analogamente dalla seconda:

$$\vec{\Phi}_C = Mg \hat{e}_2 + k(G - B) .$$

Basta poi sostituire le espressioni esplicite di F e di $G - B$ per ottenere:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \frac{2\mu}{R} \hat{e}_1 + mg \hat{e}_2 - k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 - k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2 = \\ &= \left(\frac{2\mu}{R} - kx + kL \sin \theta \right) \hat{e}_1 + \left[mg - k(R - h + L \cos \theta) \right] \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_C &= Mg \hat{e}_2 + k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + k(R - h + L \cos \theta) \hat{e}_2 = \\ &= k(x - L \sin \theta) \hat{e}_1 + \left[Mg + k(R - h + L \cos \theta) \right] \hat{e}_2 . \end{aligned}$$

Nella configurazione di equilibrio ordinaria $(\theta, x) = (\theta^*, x^*)$ si ha allora

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \left(\frac{2\mu}{R} - \frac{\mu}{R} - kL \sin \theta^* + kL \sin \theta^* \right) \hat{e}_1 + \left[mg + k(h - R - L \cos \theta^*) \right] \hat{e}_2 = \\ &= \frac{\mu}{R} \hat{e}_1 + \left[mg + k(h - R) - kL \cos \theta^* \right] \hat{e}_2 = \\ &= \frac{\mu}{R} \hat{e}_1 + \left[mg + k(h - R) - \frac{mg}{2} - k(h - R) \right] \hat{e}_2 = \frac{\mu}{R} \hat{e}_1 + \frac{mg}{2} \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e l'analogha espressione per $\vec{\Phi}_C$:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_C &= k\left(\frac{\mu}{kR} + L \sin \theta^* - L \sin \theta^*\right)\hat{e}_1 + \left[Mg + k(R - h) + kL \cos \theta^*\right]\hat{e}_2 = \\ &= \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + \left[Mg + k(R - h) + \frac{mg}{2} + k(h - R)\right]\hat{e}_2 = \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + \left(M + \frac{m}{2}\right)g\hat{e}_2 .\end{aligned}$$

Per la configurazione di equilibrio di confine $(\theta, x) = (0, \mu/kR)$ risulta invece:

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_A &= \left(\frac{2\mu}{R} - \frac{\mu}{R} + 0\right)\hat{e}_1 + \left[mg + k(h - R - L)\right]\hat{e}_2 = \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + [mg + k(h - R - L)]\hat{e}_2 \\ \vec{\Phi}_C &= k\left(\frac{\mu}{kR} - 0\right)\hat{e}_1 + \left[Mg - k(h - R - L)\right]\hat{e}_2 = \frac{\mu}{R}\hat{e}_1 + [Mg - k(h - R - L)]\hat{e}_2\end{aligned}$$

che completa il risultato.

Esercizio 1

Un punto materiale P si muove lungo l'asse coordinato Ox sotto l'azione della forza:

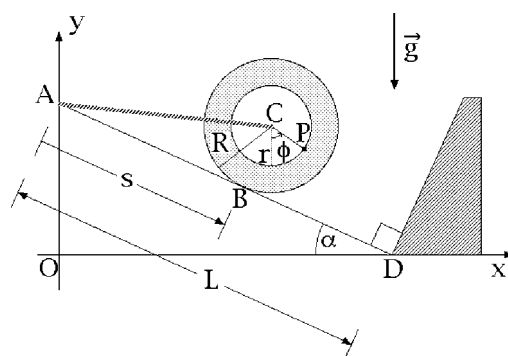
$$F = -2 \sin x \cos x + \cos x$$

Determinare:

- (a) le configurazioni di equilibrio del sistema;
- (b) la stabilità degli equilibri del sistema;
- (c) tutte e sole le condizioni iniziali corrispondenti a moti a meta asintotica del sistema;
- (d) tutte e sole le condizioni iniziali per cui si hanno moti di tipo oscillatorio;
- (e) tutte e sole le condizioni iniziali per le quali il moto risulta indefinitamente progressivo, non limitato.

Esercizio 2

In un piano verticale Oxy , una ruota \mathbb{W} rotola senza strisciare lungo la guida rettilinea AD , inclinata di un angolo α rispetto all'asse orizzontale Ox e interrotta in D da una parete rigida piana ad essa ortogonale (vedi figura). La ruota, di massa M , consiste in una corona circolare omogenea di centro C , raggio interno r e raggio esterno R ; un punto P di massa m può scorrere senza attrito lungo il suo bordo interno. Il sistema è pesante e una molla ideale di costante elastica $k > 0$ collega il centro C con il punto fisso A della guida. La ruota è infine soggetta ad un sistema di forze di risultante $\vec{R} = F \hat{e}_1$ e momento risultante in C $\vec{M}_C = \mu \hat{e}_3 + F s \sin \phi \hat{e}_1$, dove F , μ sono costanti assegnate mentre s e ϕ rappresentano le coordinate lagrangiane (vedi figura).



Posto $|A - D| = L > 2R$ ed assunti i vincoli ideali, determinare:

- (a) l'energia cinetica del sistema;
- (b) le equazioni lagrangiane del moto del sistema;
- (c) la condizione affinché per $s = L - R$ si abbia almeno una configurazione di equilibrio;
- (d) la condizione affinché il sistema ammetta almeno una configurazione di equilibrio ordinaria, ricavando poi gli equilibri ordinari corrispondenti e analizzandone infine le proprietà di stabilità;

(e) le frequenze normali delle piccole oscillazioni nell'intorno di un equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Configurazioni di equilibrio

Le configurazioni di equilibrio si ottengono uguagliando a zero la sollecitazione attiva applicata al punto materiale P e sono pertanto tutte e sole le soluzioni dell'equazione trigonometrica:

$$-2 \sin x \cos x + \cos x = \cos x(-2 \sin x + 1) = 2 \cos x \left(-\sin x + \frac{1}{2} \right) = 0 .$$

Annullando il primo fattore si ottiene l'equazione $\cos x = 0$, le cui soluzioni sono:

$$x = +\pi/2 , \quad -\pi/2$$

a meno di multipli interi di 2π . Le configurazioni di equilibrio residue si deducono ponendo a zero anche il secondo fattore:

$$\sin x - \frac{1}{2} = 0$$

per cui risulta:

$$x = +\pi/6 , \quad 5\pi/6 .$$

(b) Stabilità degli equilibri

L'analisi di stabilità degli equilibri richiede che si riconosca la sollecitazione posizionale come conservativa. Ciò è certamente vero trattandosi di sollecitazione posizionale in un sistema unidimensionale. Il potenziale relativo è dato dall'integrale indefinito:

$$U(x) = \int (-2 \sin x \cos x + \cos x) dx = -\sin^2 x + \sin x$$

la cui derivata seconda si scrive:

$$U''(x) = 2(\sin^2 x - \cos^2 x) - \sin x$$

e porge:

$$\begin{aligned} U''(\pi/2) &= 1 > 0 & U''(-\pi/2) &= 3 > 0 \\ U''(\pi/6) &= -\frac{3}{2} < 0 & U''(5\pi/6) &= -\frac{3}{2} < 0 . \end{aligned}$$

Dal segno della derivata seconda calcolata nelle varie configurazioni di equilibrio si conclude che:

- (i) $x = \pi/2$ è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, essendo $U''(\pi/2) > 0$;
- (ii) $x = -\pi/2$ è instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet, avendosi ancora $U''(-\pi/2) > 0$;

- (iii) $x = \pi/6$ costituisce un massimo relativo proprio del potenziale, stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet;
- (iv) $x = 5\pi/6$ rappresenta anch'esso un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet, come nel caso precedente.

Si osservi che in nessun caso la stabilità risulta asintotica, dal momento che l'energia meccanica del sistema è un integrale primo e si conserva dunque lungo tutti i moti del sistema.

(c) Condizioni iniziali corrispondenti a moti a meta asintotica

L'esistenza dell'integrale primo dell'energia meccanica:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x$$

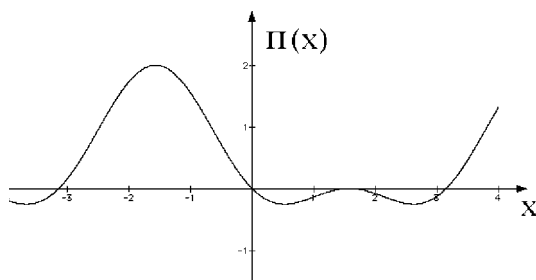
consente di applicare l'analisi qualitativa di Weierstrass allo studio dei moti del sistema. Indicata con:

$$\Pi(x) = -U(x) = \sin^2 x - \sin x$$

l'energia potenziale del sistema, dalla precedente analisi di stabilità e dalle relazioni:

$$\Pi(+\pi/2) = 0 \quad \Pi(-\pi/2) = 2 \quad \Pi(\pi/6) = -\frac{1}{4} \quad \Pi(5\pi/6) = -\frac{1}{4}$$

è immediato desumere che il grafico della funzione Π deve avere l'andamento illustrato in figura:



Le condizioni iniziali (x_0, \dot{x}_0) corrispondenti a moti a meta asintotica — nel passato o nel futuro — sono tutte e sole quelle per le quali l'energia meccanica totale assume i valori:

$$H(\pi/2, 0) = \Pi(\pi/2) = 0 \quad \text{e} \quad H(-\pi/2, 0) = \Pi(-\pi/2) = 2$$

semprché si abbia $\dot{x}_0 \neq 0$. Nel primo caso i moti sono a meta asintotica tanto nel passato quanto nel futuro e corrispondono ad orbite omocline del sistema. Viceversa, nel secondo caso i moti risultano ancora a meta asintotica sia nel passato che nel futuro, ma sono associati ad orbite eterocline, in quanto i limiti per $t \rightarrow -\infty$ e per $t \rightarrow +\infty$ della soluzione $x(t)$ sono configurazioni di equilibrio instabile **distinte**. Pertanto le condizioni iniziali richieste sono quelle appartenenti all'insieme:

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \dot{x} \neq 0, \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x = 0 \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \dot{x} \neq 0, \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x = 2 \right\}.$$

(d) Condizioni iniziali per i moti oscillatori

Dal grafico dell'energia potenziale si deduce che le condizioni iniziali (x_0, \dot{x}_0) per i moti oscillatori (o periodici) sono tutte e sole quelle che soddisfano le disequazioni:

$$\Pi(\pi/6) < H(x_0, \dot{x}_0) < \Pi(\pi/2) \quad \text{oppure} \quad \Pi(\pi/2) < H(x_0, \dot{x}_0) < \Pi(-\pi/2)$$

e dunque appartengono all'insieme:

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{4} < \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x < 0 \right\} \cup \\ \cup \left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x < 2 \right\}.$$

(e) Condizioni iniziali per i moti indefinitamente progressivi, non limitati

Affinché il moto di condizioni iniziali $(x, \dot{x}) = (x_0, \dot{x}_0) \in \mathbb{R}^2$ sia indefinitamente progressivo nel futuro e non limitato occorre e basta che $\dot{x}_0 > 0$ e inoltre:

$$H(x_0, \dot{x}_0) > H(-\pi/2, 0) = \Pi(-\pi/2) = 2.$$

Le condizioni iniziali richieste sono dunque tutte e soltanto quelle appartenenti all'insieme:

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^2 : \dot{x} > 0, \frac{m}{2} \dot{x}^2 + \sin^2 x - \sin x > 2 \right\}.$$

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema viene determinata come somma di due contributi, l'uno dovuto alla ruota \mathbb{W} e l'altro al punto materiale P .

Energia cinetica della ruota

Poiché la ruota non presenta punti fissi, conviene calcolarne l'energia cinetica facendo uso del teorema di König:

$$T_{\mathbb{W}} = \frac{M}{2} |\dot{C}|^2 + \frac{1}{2} I_{Cz}^{\mathbb{W}} |\vec{\omega}_{\mathbb{W}}|^2.$$

La velocità del baricentro C si ottiene derivando rispetto al tempo il suo vettore posizione:

$$\begin{aligned} C - A &= B - A + C - B = s \cos \alpha \hat{e}_1 - s \sin \alpha \hat{e}_2 + R \sin \alpha \hat{e}_1 + R \cos \alpha \hat{e}_2 = \\ &= (s \cos \alpha + R \sin \alpha) \hat{e}_1 + (-s \sin \alpha + R \cos \alpha) \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

ed è data dall'espressione:

$$\dot{C} = \frac{d}{dt}(C - A) = \dot{s} \cos \alpha \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \alpha \hat{e}_2$$

Per il momento d'inerzia della ruota rispetto all'asse Cz si ha invece:

$$I_{Cz}^{\mathbb{W}} = \int_r^R d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \frac{M}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{2M}{R^2 - r^2} \frac{R^4 - r^4}{4} = \frac{M}{2}(R^2 + r^2)$$

e la corrispondente velocità angolare vale:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{W}} = -\frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_3 .$$

In tal modo l'energia cinetica $T_{\mathbb{W}}$ si riduce a:

$$T_{\mathbb{W}} = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{2} (R^2 + r^2) \left| -\frac{\dot{s}}{R} \hat{e}_3 \right|^2 = \frac{M}{2} \dot{s}^2 + \frac{M}{4R^2} (R^2 + r^2) \dot{s}^2 = \frac{M}{4} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \dot{s}^2 .$$

Il calcolo rigoroso della velocità angolare $\vec{\omega}_{\mathbb{W}} = \omega \hat{e}_3$ della ruota può essere eseguito applicando la condizione di puro rotolamento, la quale impone che si abbia:

$$\begin{aligned} 0 = \dot{B} &= \dot{C} + \omega \hat{e}_3 \wedge (B - C) = \dot{s} \cos \alpha \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \alpha \hat{e}_2 + \omega \hat{e}_3 \wedge (-R \sin \alpha \hat{e}_1 - R \cos \alpha \hat{e}_2) \\ &= \dot{s} \cos \alpha \hat{e}_1 - \dot{s} \sin \alpha \hat{e}_2 + \omega (-R \sin \alpha \hat{e}_2 + R \cos \alpha \hat{e}_1) = (\dot{s} + R\omega)(\cos \alpha \hat{e}_1 - \sin \alpha \hat{e}_2) \end{aligned}$$

e conduce pertanto all'equazione:

$$\dot{s} + R\omega = 0$$

da cui segue il risultato richiesto.

Energia cinetica del punto materiale P

La velocità assoluta del punto P si ricava dal corrispondente vettore posizione, convenientemente espresso in termini dei parametri lagrangiani:

$$\begin{aligned} P - A &= P - C + C - A = r \sin \phi \hat{e}_1 - r \cos \phi \hat{e}_2 + C - A = \\ &= (r \sin \phi + s \cos \alpha + R \sin \alpha) \hat{e}_1 + (-r \cos \phi - s \sin \alpha + R \cos \alpha) \hat{e}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

derivandolo rispetto al tempo:

$$\dot{P} = \frac{d}{dt}(P - A) = (r \cos \phi \dot{\phi} + \dot{s} \cos \alpha) \hat{e}_1 + (r \sin \phi \dot{\phi} - \dot{s} \sin \alpha) \hat{e}_2 .$$

L'energia cinetica si scrive perciò:

$$T_P = \frac{m}{2} |\dot{P}|^2 = \frac{m}{2} [r^2 \dot{\phi}^2 + 2r \cos(\alpha + \phi) \dot{\phi} \dot{s} + \dot{s}^2] .$$

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale risulta dalla somma dei termini relativi alla ruota e al punto materiale P :

$$T = T_P + T_{\mathbb{W}} = \frac{m}{2} [r^2 \dot{\phi}^2 + 2r \cos(\alpha + \phi) \dot{\phi} \dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{M}{4} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \dot{s}^2$$

ed è costituita da una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate $(\dot{\phi}, \dot{s})$:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\phi} \ \dot{s}) \begin{pmatrix} mr^2 & mr \cos(\alpha + \phi) \\ mr \cos(\alpha + \phi) & m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\dot{\phi} \ \dot{s}) \mathbb{A} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{s} \end{pmatrix}$$

come è evidente dai segni positivi di determinante e traccia della matrice rappresentativa:

$$\det(\mathbb{A}) = m^2 r^2 \sin^2(\alpha + \phi) + \frac{Mmr^2}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2}\right) > 0 \quad \text{tr}(\mathbb{A}) = mr^2 + m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2}\right) > 0$$

ed è peraltro imposto dal carattere scleronomo del sistema.

(b) Equazioni di Lagrange

Per la determinazione delle equazioni lagrangiane del sistema è necessario procedere al calcolo del potenziale totale, nonché alle componenti lagrangiane delle eventuali sollecitazioni non posizionali conservative. Il sistema è soggetto per ipotesi alle forze peso, all'interazione elastica fra i punti C ed A , ed infine a un sistema di forze applicate alla ruota, di risultante e momento risultante in C :

$$\vec{R} = F \hat{e}_1 \quad \vec{M}_C = \mu \hat{e}_3 + F s \sin \phi \hat{e}_1$$

rispettivamente. Il potenziale elastico della molla AC segue da una immediata applicazione del teorema di Pitagora al triangolo ABC , rettangolo in B :

$$U_{\text{el}} = -\frac{k}{2}|C - A|^2 = -\frac{k}{2}(s^2 + R^2).$$

Per quanto riguarda il potenziale delle forze peso, questo è dato dalla somma di un termine relativo alla ruota \mathbb{W} e di un termine associato al punto materiale P . Vale infatti:

$$U_g = -Mg \hat{e}_2 \cdot (C - A) - mg \hat{e}_2 \cdot (P - A)$$

e quindi, sostituendo le espressioni (1) e (2) per i vettori $C - A$ e $P - A$:

$$\begin{aligned} U_g &= -Mg(-s \sin \alpha + R \cos \alpha) - mg(-r \cos \phi - s \sin \alpha + R \cos \alpha) = \\ &= Mg(s \sin \alpha - R \cos \alpha) + mg(r \cos \phi + s \sin \alpha - R \cos \alpha). \end{aligned}$$

Le componenti lagrangiane del sistema di forze applicate alla ruota vengono determinate per mezzo della formula consueta, facendo uso dell'angolo $-s/R$ che esprime la rotazione della ruota rispetto all'osservatore fisso e dell'espressione del baricentro C in termini delle coordinate lagrangiane. Si ha così:

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{\partial C}{\partial s} \cdot \vec{R} + \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{s}{R}\right) \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = \frac{\partial C}{\partial s} \cdot F \hat{e}_1 + \frac{\partial}{\partial s} \left(-\frac{s}{R}\right) \hat{e}_3 \cdot (\mu \hat{e}_3 + R s \sin \phi \hat{e}_1) = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} (C - A) \cdot F \hat{e}_1 - \frac{\mu}{R} = F \frac{\partial}{\partial s} [(C - A) \cdot \hat{e}_1] - \frac{\mu}{R} = \\ &= F \frac{\partial}{\partial s} (s \cos \alpha + R \sin \alpha) - \frac{\mu}{R} = F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \end{aligned}$$

e:

$$Q_\phi = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \phi} \cdot \vec{R} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(-\frac{s}{R} \right) \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = 0 \cdot \vec{R} + 0 \hat{e}_3 \cdot \vec{M}_C = 0$$

e poiché le coordinate lagrangiane sono definite nell'insieme convesso $\{(\phi, s) \in \mathbb{R}^2 : s \leq L - R\}$, se ne conclude che le sollecitazioni in esame sono posizionali conservative, con potenziale:

$$U_{\mathbb{W}} = \left(F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \right) s .$$

Potenziale totale del sistema

Una volta stabilito che tutte le sollecitazioni attive applicate hanno natura posizionale e conservativa, il potenziale del sistema viene calcolato come somma dei potenziali elastico, gravitazionale e relativo al sistema di forze applicate alla ruota \mathbb{W} :

$$\begin{aligned} U(\phi, s) &= U_{\text{el}} + U_{\text{g}} + U_{\mathbb{W}} = \\ &= -\frac{k}{2}s^2 + Mg \sin \alpha s + mgr \cos \phi + mg \sin \alpha s + \left(F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \right) s = \\ &= -\frac{k}{2}s^2 + \left[Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \right] s + mgr \cos \phi \end{aligned}$$

essendosi omesse tutte le costanti additive, inessenziali.

Lagrangiana

La lagrangiana del sistema è definita dalla somma dell'energia cinetica e del potenziale totale:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T + U &= \frac{m}{2} [r^2 \dot{\phi}^2 + 2r \cos(\alpha + \phi) \dot{\phi} \dot{s} + \dot{s}^2] + \frac{M}{4} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \dot{s}^2 - \\ &\quad - \frac{k}{2}s^2 + \left[Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \right] s + mgr \cos \phi . \end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange

Le equazioni lagrangiane del moto si deducono dalle espressioni che compaiono nei binomi di Lagrange:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= mr^2 \dot{\phi} + mr \cos(\alpha + \phi) \dot{s} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) &= mr^2 \ddot{\phi} + mr \cos(\alpha + \phi) \ddot{s} - mr \sin(\alpha + \phi) \dot{\phi} \dot{s} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= -mr \sin(\alpha + \phi) \dot{\phi} \dot{s} - mgr \sin \phi \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} &= \left[m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \dot{s} + mr \cos(\alpha + \phi) \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) &= \left[m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \ddot{s} + mr \cos(\alpha + \phi) \ddot{\phi} - mr \sin(\alpha + \phi) \dot{\phi}^2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} &= -ks + Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \end{aligned}$$

e risultano pertanto:

$$\begin{cases} mr^2\ddot{\phi} + mr \cos(\alpha + \phi)\ddot{s} + mgr \sin \phi = 0 \\ mr \cos(\alpha + \phi)\ddot{\phi} + \left[m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \ddot{s} - mr \sin(\alpha + \phi)\dot{\phi}^2 + \\ \quad + ks - Mg \sin \alpha - mg \sin \alpha - F \cos \alpha + \frac{\mu}{R} = 0 . \end{cases}$$

(c) **Condizione affinché per $s = L - R$ si abbia almeno una configurazione di equilibrio**

Qualsiasi configurazione per la quale si abbia $s = L - R$ è necessariamente di confine per il sistema; la condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio viene dunque espressa per mezzo del teorema dei lavori virtuali. La configurazione $(\phi, s) = (\phi_0, L - R)$, con $\phi_0 \in \mathbb{R}$, è di equilibrio se e soltanto se:

$$U_\phi(\phi_0, L - R) \delta\phi + U_s(\phi_0, L - R) \delta s \leq 0 \quad \forall \delta\phi \in \mathbb{R}, \quad \forall \delta s \leq 0$$

ossia:

$$\begin{cases} U_\phi(\phi_0, L - R) = 0 \\ U_s(\phi_0, L - R) \geq 0 . \end{cases}$$

Questo sistema assume la forma esplicita:

$$\begin{cases} -mgr \sin \phi_0 = 0 \\ -k(L - R) + Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \geq 0 \end{cases}$$

dalla quale si deduce che $\phi_0 = 0, \pi$ e:

$$L - R \leq \frac{1}{k} \left[Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \right] = s^*$$

che è la condizione cercata.

(d) **Condizione affinché il sistema ammetta almeno una configurazione di equilibrio ordinaria. Determinazione degli equilibri ordinari e analisi di stabilità**

Gli equilibri ordinari $(\phi, s) = (\phi_0, s_0)$ del sistema sono individuati da:

$$\begin{cases} -mgr \sin \phi_0 = 0 \\ -ks_0 + Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} = 0 \end{cases}$$

a condizione che si abbia $s_0 < L - R$. Poiché chiaramente:

$$s_0 = \frac{1}{k} \left[Mg \sin \alpha + mg \sin \alpha + F \cos \alpha - \frac{\mu}{R} \right] = s^* ,$$

la condizione affinché sia definita almeno una configurazione di equilibrio ordinaria si esprime allora nella forma:

$$s^* < L - R .$$

In tal caso le configurazioni di equilibrio sono tutte ordinarie e si riducono alle due seguenti:

$$(\phi, s) = (0, s^*) , \quad (\pi, s^*) .$$

Per l'analisi di stabilità basta considerare le derivate seconde del potenziale:

$$\begin{aligned} U_{\phi\phi}(\phi, s) &= -mgr \cos \phi \\ U_{\phi s}(\phi, s) &= U_{s\phi}(\phi, s) = 0 \\ U_{ss}(\phi, s) &= -k \end{aligned}$$

e la corrispondente matrice hessiana:

$$H_U(\phi, s) = \begin{pmatrix} -mgr \cos \phi & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} .$$

In $(\phi, s) = (0, s^*)$ l'hessiana del potenziale è definita negativa:

$$H_U(0, s^*) = \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

e la configurazione risulta un massimo relativo proprio del potenziale, la cui stabilità segue dal teorema di Lagrange-Dirichlet.

Per $(\phi, s) = (\pi, s^*)$ la matrice hessiana è indefinita:

$$H_U(\pi, s^*) = \begin{pmatrix} mgr & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$$

e la configurazione di equilibrio risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

(e) Frequenze normali delle piccole oscillazioni

L'unica configurazione di equilibrio ordinaria stabile del sistema è $(\phi, s) = (0, s^*)$, per $s^* < L - R$. L'equazione per le pulsazioni normali delle piccole oscillazioni intorno a tale configurazione di equilibrio si scrive allora:

$$\det[\omega^2 \mathbb{A}(0, s^*) + H_U(0, s^*)] = 0$$

ossia:

$$\det \left[\omega^2 \begin{pmatrix} mr^2 & \\ mr \cos \alpha & m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mgr & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \right] = 0$$

ed equivale a:

$$\det \begin{pmatrix} mr^2\omega^2 - mgr & mr \cos \alpha \omega^2 \\ mr \cos \alpha \omega^2 & \left[m + \frac{M}{2} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \omega^2 - k \end{pmatrix} = 0 .$$

Di qui si deduce l'equazione caratteristica:

$$r^2 \left[\sin^2 \alpha + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \omega^4 - r^2 \frac{k}{m} \omega^2 - gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \omega^2 + gr \frac{k}{m} = 0$$

le cui soluzioni in ω^2 :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{r^2 \frac{k}{m} + gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \pm \sqrt{\Delta}}{2r^2 \left[\sin^2 \alpha + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right]}$$

sono entrambe reali e positive, grazie al segno positivo del discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(r^2 \frac{k}{m} \right)^2 + g^2 r^2 \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^2 + 2r^2 \frac{k}{m} gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] - \\ &- 4r^2 \frac{k}{m} gr \sin^2 \alpha - 4r^2 \frac{k}{m} gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] + 4r^2 \frac{k}{m} gr = \\ &= \left(r^2 \frac{k}{m} \right)^2 + g^2 r^2 \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right]^2 - 2r^2 \frac{k}{m} gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] + \\ &+ 4r^2 \frac{k}{m} gr \cos^2 \alpha = \\ &= \left[r^2 \frac{k}{m} - gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \right]^2 + 4gr^3 \frac{k}{m} \cos^2 \alpha > 0 \end{aligned}$$

e alla diseuguaglianza:

$$-4r^2 \left[\sin^2 \alpha + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] gr \frac{k}{m} < 0 .$$

Le frequenze normali delle piccole oscillazioni valgono pertanto:

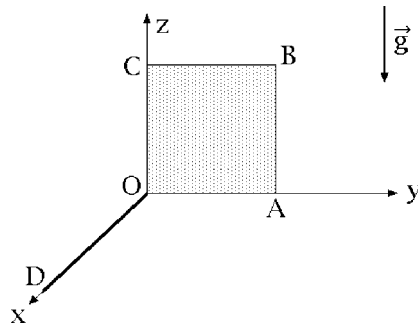
$$\nu_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \omega_{\pm} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r^2 \frac{k}{m} + gr \left[1 + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right] \pm \sqrt{\Delta}}{2r^2 \left[\sin^2 \alpha + \frac{M}{2m} \left(3 + \frac{r^2}{R^2} \right) \right]}} .$$

Esercizio 1

In una terna di riferimento $Oxyz$ si consideri un corpo rigido pesante costituito da una lamina quadrata $OABC$ e da un'asta OD , saldate rigidamente in O . L'asta OD — omogenea — è collocata lungo l'asse Ox , ha lunghezza L e massa m . La lamina ha lato L ed è posta nel primo quadrante del piano coordinato Oyz , con una densità areale di massa data dall'espressione:

$$\sigma(y, z) = \frac{m}{L^4}y(L - z)$$

nel generico punto $P \in OABC$ di coordinate $(y, z) \in [0, L]^2$. L'intero sistema poggia sul piano orizzontale Oxy , che si assumere perfettamente liscio.

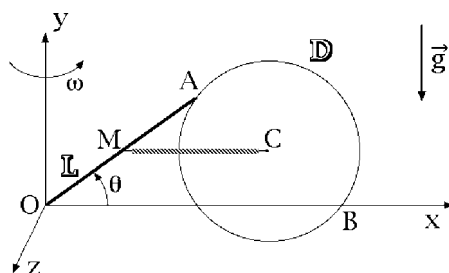


Determinare:

- (a) la massa totale del sistema;
- (b) la posizione del centro di massa del sistema;
- (c) il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse verticale Oz ;
- (d) se la configurazione del sistema è di equilibrio;
- (e) se la natura della configurazione (equilibrio/non equilibrio) può essere alterata fissando rigidamente sulla superficie del quadrato un punto materiale S di massa conveniente μ in una posizione opportuna.

Esercizio 2

Un sistema pesante è formato da un'asta \mathbb{L} di estremi O ed A e da un disco circolare \mathbb{D} , entrambi rigidi. \mathbb{L} ha l'estremo O fisso nell'origine di una terna cartesiana ortogonale $Oxyz$, con l'asse Oy verticale, mentre A è incernierato ad un punto fissato sul bordo del disco \mathbb{D} . \mathbb{L} ha massa m_1 e lunghezza L , con densità in un generico punto $P \in \mathbb{L}$ data da $\lambda(\xi)$, essendo $\xi = |P - O| \in [0, L]$. Il disco \mathbb{D} è omogeneo, con massa m_2 , raggio $L/2$ e centro C . Il punto B del bordo del disco diametralmente opposto ad A è vincolato a muoversi lungo l'asse orizzontale Ox . Asta e disco si muovono nel piano verticale Oxy , che ruota attorno ad Oy con velocità angolare costante ω rispetto ad una terna inerziale. Infine, una molla di costante elastica $k > 0$ è applicata fra C ed il punto medio M dell'asta.



Nell'ipotesi che i vincoli siano ideali, e facendo uso dell'angolo θ mostrato in figura come coordinata lagrangiana, determinare:

- l'energia cinetica del sistema nel riferimento $Oxyz$;
- le equazioni lagrangiane del moto del sistema;
- le configurazioni di equilibrio relative alla stessa terna;
- le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio;
- la frequenza delle piccole oscillazioni nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile a scelta.

Soluzione dell'esercizio 1

(a) Massa del sistema

La massa M del sistema viene determinata come somma delle masse dell'asta e della lamina quadrata. Poiché la massa m dell'asta OA si assume nota, si tratta di ricavare la massa di $OABC$ integrando la densità σ sull'intera superficie del quadrato. La massa viene quindi determinata dall'espressione:

$$\begin{aligned} M &= m + \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{m}{L^4} y(L-z) = m + \int_0^L y dy \int_0^L (L-z) dz \frac{m}{L^4} = \\ &= m + \frac{m}{L^4} \frac{L^2}{2} \left[-\frac{(L-z)^2}{2} \right]_0^L = m + \frac{m}{L^4} \frac{L^2}{2} \frac{L^2}{2} = m + \frac{m}{4} = \frac{5}{4}m \end{aligned}$$

(b) Centro di massa

Il vettore posizione del baricentro del sistema, rispetto alla terna $Oxyz$, si ricava applicando la proprietà distributiva all'asta ed alla lamina quadrata. Il baricentro dell'asta omogenea OA coincide con il suo punto medio, mentre per la lamina quadrata il centro di massa deve essere individuato per mezzo della definizione, che richiede il calcolo di un integrale doppio. Per il baricentro G del sistema si ha pertanto:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{4}{5m} \left[m \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \int_0^L dy \int_0^L dz \frac{m}{L^4} y(L-z) (y \hat{e}_2 + z \hat{e}_3) \right] = \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{1}{L^4} \int_0^L y^2 dy \int_0^L (L-z) dz \hat{e}_2 + \frac{1}{L^4} \int_0^L y dy \int_0^L (L-z)z dz \hat{e}_3 \right] = \end{aligned}$$

ed eseguendo gli integrali:

$$\begin{aligned} G - O &= \frac{4}{5} \left\{ \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{1}{L^4} \frac{L^3}{3} \frac{L^2}{2} \hat{e}_2 + \frac{1}{L^4} \frac{L^2}{2} \left[\frac{Lz^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^L \hat{e}_3 \right\} = \\ &= \frac{4}{5} \left\{ \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{6} \hat{e}_2 + \frac{1}{2L^2} \left[\frac{L^3}{2} - \frac{L^3}{3} \right] \hat{e}_3 \right\} = \\ &= \frac{4}{5} \left[\frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{L}{6} \hat{e}_2 + \frac{L}{12} \hat{e}_3 \right] = \frac{2}{5}L \hat{e}_1 + \frac{2}{15}L \hat{e}_2 + \frac{1}{15}L \hat{e}_3 \end{aligned}$$

che costituisce il risultato richiesto.

(c) Momento d'inerzia rispetto all'asse verticale Oz

Il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse Oz è la somma dei momenti d'inerzia, relativi allo stesso asse, di asta e lamina quadrata. Risulta perciò:

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \int_0^L x^2 \frac{m}{L} dx + \int_0^L dy \int_0^L dz y^2 \frac{m}{L^4} y(L-z) = \frac{m}{L} \frac{L^3}{3} + \int_0^L y^3 dy \int_0^L (L-z) dz \frac{m}{L^4} = \\ &= \frac{mL^2}{3} + \frac{L^4}{4} \frac{L^2}{2} \frac{m}{L^4} = \frac{mL^2}{3} + \frac{mL^2}{8} = \frac{11}{24}mL^2. \end{aligned}$$

(d) **Equilibrio**

L'involuppo convesso della base d'appoggio, costituita dai segmenti OD ed OA , è il triangolo rettangolo isoscele OAD , i cui punti $P(x, y)$ soddisfano tutti e soli il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq L \end{cases}$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché la configurazione sia di equilibrio è che la proiezione ortogonale Q del baricentro G sul piano d'appoggio Oxy — centro di pressione — appartenga ad OAD . Nella fattispecie:

$$x_Q = x_G = \frac{2}{5}L \geq 0 \quad y_Q = y_G = \frac{2}{15}L \geq 0$$

per cui:

$$x_Q + y_Q = \frac{2}{5}L + \frac{2}{15}L = \frac{8}{15}L < L$$

e quindi la configurazione costituisce un equilibrio per il sistema.

(e) **Variazione dell'equilibrio a seguito della introduzione di un punto materiale addizionale sulla superficie della lamina quadrata**

Il baricentro del sistema lamina-punto, $OABC \cup S$, appartiene sempre al relativo involuppo convesso, lo stesso quadrato $OABC$. Indicate con y^* e z^* le coordinate di tale baricentro, si avrà per il baricentro del sistema l'espressione:

$$G - O = \frac{1}{\frac{5}{4}m + \mu} \left[m \frac{L}{2} \hat{e}_1 + (y^* \hat{e}_2 + z^* \hat{e}_3) \left(\frac{m}{4} + \mu \right) \right] \quad y^*, z^* \in [0, L]$$

mentre il centro di pressione sarà individuato da:

$$Q - O = \frac{m}{\frac{5}{4}m + \mu} \frac{L}{2} \hat{e}_1 + \frac{\frac{m}{4} + \mu}{\frac{5}{4}m + \mu} y^* \hat{e}_2 \quad y^* \in [0, L]$$

in modo che:

$$x_Q = \frac{m}{\frac{5}{4}m + \mu} \frac{L}{2} > 0 \quad y_Q = \frac{\frac{m}{4} + \mu}{\frac{5}{4}m + \mu} y^* \geq 0$$

e

$$x_Q + y_Q = \frac{m \frac{L}{2} + \left(\frac{m}{4} + \mu \right) y^*}{\frac{5}{4}m + \mu} < \frac{mL + \left(\frac{m}{4} + \mu \right) L}{\frac{5}{4}m + \mu} = L$$

e la condizione di equilibrio risulta sempre verificata, quali che siano la massa $\mu > 0$ e le coordinate $y_S \in [0, L]$ e $z_S \in [0, L]$ del punto addizionale S .

Soluzione dell'esercizio 2

(a) Energia cinetica

L'energia cinetica del sistema viene determinata come somma di due contributi, l'uno dovuto all'asta \mathbb{L} e l'altro al disco \mathbb{D} .

Energia cinetica dell'asta

L'asta ha l'estremo O fisso e la sua velocità angolare è data dall'espressione:

$$\vec{\omega}_{\mathbb{L}} = \dot{\theta} \hat{e}_3 ;$$

per l'energia cinetica si ha dunque:

$$T_{\mathbb{L}} = \frac{1}{2} \Lambda \dot{\theta}^2$$

essendo Λ il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse fisso Oz :

$$\Lambda = \int_0^L \xi^2 \lambda(\xi) d\xi .$$

Energia cinetica del disco \mathbb{D}

Il disco \mathbb{D} è privo di punti fissi e la sua energia cinetica può essere convenientemente espressa per mezzo del teorema di König. A questo scopo si ricava preliminarmente il vettore posizione del baricentro C in termini della coordinata lagrangiana θ :

$$\begin{aligned} C - O &= A - O + C - A = L \cos \theta \hat{e}_1 + L \sin \theta \hat{e}_2 + \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_1 - \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2 = \\ &= \frac{3}{2} L \cos \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \sin \theta \hat{e}_2 \end{aligned}$$

e si deriva rispetto al tempo la relazione così ottenuta per avere la velocità del baricentro stesso rispetto alla terna $Oxyz$:

$$\dot{C} = \left(-\frac{3}{2} L \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{L}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) \dot{\theta} .$$

L'energia cinetica del baricentro risulta perciò:

$$\frac{m_2}{2} |\dot{C}|^2 = \frac{m_2}{2} \left[\frac{9}{4} L^2 \sin^2 \theta + \frac{L^2}{4} \cos^2 \theta \right] \dot{\theta}^2 = \frac{m_2}{2} L^2 \dot{\theta}^2 \left[\frac{1}{4} + 2 \sin^2 \theta \right]$$

mentre quella del moto attorno al baricentro si deduce osservando che detto moto è di tipo rotatorio attorno all'asse fisso Cz e con velocità angolare $-\dot{\theta} \hat{e}_3$:

$$T'_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} I_{Cz} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{L}{2} \right)^2 \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{m_2 L^2}{16} \dot{\theta}^2 .$$

Il teorema di König consente allora di scrivere l'espressione dell'energia cinetica di \mathbb{D} nella forma:

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{m_2}{2} |\dot{C}|^2 + T'_{\mathbb{D}} = m_2 L^2 \dot{\theta}^2 \left(\sin^2 \theta + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = m_2 L^2 \dot{\theta}^2 \left(\frac{3}{16} + \sin^2 \theta \right) .$$

Energia cinetica del sistema

Basta ora sommare le energie cinetiche dell'asta \mathbb{L} e del disco \mathbb{D} per pervenire all'energia cinetica totale del sistema, relativa alla terna $Oxyz$:

$$T = T_{\mathbb{L}} + T_{\mathbb{D}} = \left[\frac{\Lambda}{2} + m_2 L^2 \left(\frac{3}{16} + \sin^2 \theta \right) \right] \dot{\theta}^2 .$$

(b) Equazioni di Lagrange

Tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema sono di natura posizionale e conservativa. Si tratta quindi di procedere alla determinazione del potenziale del sistema, che risulterà dalla somma dei potenziali delle singole sollecitazioni. Una volta individuato il potenziale totale, la somma di questo con l'energia cinetica ottenuta al punto precedente definirà la lagrangiana del sistema, la quale a sua volta consentirà di scrivere l'unica equazione lagrangiana del moto del sistema.

Potenziale

Le sollecitazioni attive agenti sul sistema sono il peso, l'interazione elastica fra i punti M e C e le forze centrifughe, unitamente alle forze di Coriolis. Si verificherà nel seguito che le sollecitazioni di Coriolis hanno componente lagrangiana nulla e che non influiscono perciò sul moto del sistema. Ci si può dunque limitare a ricavare i soli potenziali delle sollecitazioni residue. Il potenziale della forza peso è la somma dei potenziali gravitazionali dell'asta \mathbb{L} e del disco \mathbb{D} . Per l'asta si ha immediatamente l'espressione:

$$U_g^{\mathbb{L}} = -m_1 g \xi_G \sin \theta$$

in cui:

$$\xi_G = \frac{1}{m_1} \int_0^L \xi \lambda(\xi) d\xi ,$$

mentre per il disco vale invece:

$$U_g^{\mathbb{D}} = -m_2 g \frac{L}{2} \sin \theta$$

in modo che il potenziale gravitazionale totale diventa:

$$U_g = U_g^{\mathbb{L}} + U_g^{\mathbb{D}} = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta .$$

Il calcolo del potenziale elastico è altrettanto semplice e porge:

$$U_{el} = -\frac{k}{2} |C - M|^2 = -\frac{k}{2} (L \cos \theta)^2 = -\frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta .$$

Quanto alle sollecitazioni centrifughe, il corrispondente potenziale viene espresso come somma di un contributo relativo all'asta:

$$U_{\text{cf}}^{\text{L}} = \frac{\omega^2}{2} \int_0^L \xi^2 \cos^2 \theta \lambda(\xi) d\xi = \frac{\omega^2}{2} \Lambda \cos^2 \theta$$

e di uno relativo al disco:

$$U_{\text{cf}}^{\text{D}} = \frac{\omega^2}{2} \left[m_2 \left(L \cos \theta + \frac{L}{2} \cos \theta \right)^2 + I_{Cy} \right]$$

che peraltro, essendo I_{Cy} costante per simmetria, si può scrivere nella forma ridotta:

$$U_{\text{cf}}^{\text{D}} = \frac{9}{8} m_2 L^2 \omega^2 \cos^2 \theta .$$

Il potenziale centrifugo del sistema diviene pertanto:

$$U_{\text{cf}} = \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta .$$

Si è ora in condizione di determinare il potenziale totale del sistema, come somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo:

$$U = U_g + U_{\text{el}} + U_{\text{cf}} = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta .$$

Lagrangiana

La lagrangiana del sistema è per definizione la somma dell'energia cinetica e del potenziale totale, e si scrive perciò:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T + U = & \left[\frac{\Lambda}{2} + m_2 L^2 \left(\frac{3}{16} + \sin^2 \theta \right) \right] \dot{\theta}^2 - \\ & - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta . \end{aligned}$$

Equazioni di Lagrange

Poiché il sistema è olonomo e ad un grado di libertà, le equazioni di Lagrange si riducono all'unica equazione:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_{\theta}^{\text{Cor}}$$

con $Q_{\theta}^{\text{Cor}} = 0$ in quanto il moto del sistema avviene in un piano passante per l'asse di rotazione Oy della terna di riferimento $Oxyz$ rispetto alla terna inerziale. Sostituendo l'espressione della lagrangiana si perviene dunque all'equazione pura del moto:

$$\frac{d}{dt} \left[\dot{\theta} \left[\Lambda + m_2 L^2 \left(\frac{3}{8} + 2 \sin^2 \theta \right) \right] \right] =$$

$$= -\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g \cos \theta + \left[kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)\right] \sin \theta \cos \theta .$$

(c) **Configurazioni di equilibrio relativo**

Le configurazioni di equilibrio relative alla terna non inerziale $Oxyz$ sono i punti critici del potenziale totale U e si ottengono dunque risolvendo l'equazione trigonometrica:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}(\theta) = -\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g \cos \theta + \left[kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)\right] \sin \theta \cos \theta = 0$$

ovvero l'equazione equivalente:

$$\cos \theta \left[-1 + \frac{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)}{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)} \sin \theta \right] = 0 .$$

Tutte le soluzioni di tale equazione si ottengono annullando i singoli fattori presenti a primo membro. Da $\cos \theta = 0$ si deducono le soluzioni:

$$\theta = +\frac{\pi}{2} , \quad -\frac{\pi}{2}$$

sempre definite. Le soluzioni associate a:

$$-1 + \frac{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)}{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)} \sin \theta = 0$$

sono invece definite e distinte dalle precedenti se e solo se

$$\frac{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)}{\left|kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)\right|} < 1 \tag{0.1}$$

nel qual caso risulta:

$$\theta = \theta^* , \quad \pi - \theta^*$$

essendosi posto:

$$\theta^* = \arcsin \left[\frac{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)}{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)} \right] .$$

(d) **Stabilità degli equilibri**

Per l'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio occorre analizzare il segno della derivata seconda del potenziale totale:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta) = U_{\theta\theta}(\theta) = \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2}\right) g \sin \theta + \left[kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \right] (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

che conviene studiare separatamente per ogni singola configurazione di equilibrio. Nella discussione che segue è anche opportuno introdurre, per brevità, le notazioni:

$$\alpha = \frac{kL^2 + g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right)}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} \quad \beta = \frac{kL^2 - g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right)}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2}$$

con

$$\beta < \alpha \quad \text{e} \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{kL^2}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} .$$

Configurazione $\theta = +\pi/2$. Nel caso di $\theta = +\pi/2$ vale:

$$\begin{aligned} U_{\theta\theta}(\pi/2) &= \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g - \left[kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \right] = \\ &= \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g - kL^2 + \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \end{aligned}$$

in modo che:

(i) per $U_{\theta\theta}(+\pi/2) > 0$, ovvero:

$$\omega^2 > \frac{kL^2 - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} = \beta ,$$

la configurazione $\theta = \pi/2$ risulta instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet;

(ii) se viceversa $U_{\theta\theta}(+\pi/2) < 0$ si ha equivalentemente

$$\omega^2 < \frac{kL^2 - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g}{\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2} = \beta$$

e quindi $\theta = \pi/2$ è un massimo relativo proprio del potenziale U , stabile in forza del teorema di Lagrange-Dirichlet;

(iii) qualora infine si verifichi la condizione $U_{\theta\theta}(+\pi/2) = 0$, ossia:

$$\omega^2 = \frac{kL^2 - \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \beta ,$$

ricorre un caso critico, non potendosi riconoscere in $\theta = +\pi/2$ la presenza di un massimo relativo proprio di U per mezzo della sola derivata seconda e non potendosi perciò applicare né il teorema di Lagrange-Dirichlet né quello di inversione parziale.

Configurazione $\theta = -\pi/2$. La configurazione $\theta = -\pi/2$ conduce a:

$$U_{\theta\theta}(-\pi/2) = -\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g - kL^2 + \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)$$

e risulta perciò:

(i) instabile per il teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet qualora si abbia:

$$\omega^2 > \frac{kL^2 + \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha ;$$

(ii) stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet nel caso che:

$$\omega^2 < \frac{kL^2 + \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha ;$$

(iii) critica per

$$\omega^2 = \frac{kL^2 + \left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)g}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha ,$$

avendosi $U_{\theta\theta}(-\pi/2) = 0$.

Configurazioni $\theta = \theta^*$, $\pi - \theta^*$. Vale la pena di osservare preliminarmente che $U(\pi - \theta) = U(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$, per cui le proprietà di stabilità di θ^* e $\pi - \theta^*$ sono le stesse. È dunque sufficiente analizzare la stabilità di una sola delle due configurazioni di equilibrio, ad esempio di θ^* . Dall'espressione di θ^* si ricava:

$$U_{\theta\theta}(\theta^*) = \cos^2\theta^* \left[\frac{kL^2 - \omega^2\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)}{g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)} \right] \neq 0$$

in forza della condizione di esistenza (0.1). Il segno di $U_{\theta\theta}(\theta^*)$ coincide con quello di:

$$kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)$$

e dunque $\theta = \theta^*$ risulta:

stabile per $\omega^2 > kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ in virtù del teorema di Lagrange-Dirichlet;

instabile per $\omega^2 < kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ in conseguenza del teorema di inversione parziale di Lagrange-Dirichlet.

Le configurazioni di equilibrio θ^* e $\pi - \theta^*$ sono definite a condizione che si abbia

$$g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) < \left| kL^2 - \omega^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \right|.$$

Per $\omega^2 < kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ detta condizione equivale a:

$$\omega^2 < \left[kL^2 - g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) \right] \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$$

mentre per $\omega^2 > kL^2 \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}$ essa si riduce a:

$$\omega^2 > \left[kL^2 + g \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) \right] \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right)^{-1}.$$

Le condizioni di esistenza degli equilibri θ^* e $\pi - \theta^*$ possono quindi esprimersi semplicemente come:

$$\omega^2 < \beta \quad \text{oppure :} \quad \omega^2 > \alpha.$$

Osservazione. Casi critici per il potenziale

È possibile precisare le proprietà di stabilità delle configurazioni di equilibrio $\theta = +\pi/2$ e $\theta = -\pi/2$ anche nei due casi critici precedentemente individuati. A questo scopo è sufficiente procedere ad una analisi locale del potenziale:

$$U(\theta) = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \sin \theta - \frac{kL^2}{2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2}{2} \left(\Lambda + \frac{9}{4} m_2 L^2 \right) \cos^2 \theta$$

che non si limiti al semplice calcolo della derivata seconda.

Primo caso critico: $\theta = +\pi/2$ con $\omega^2 = \beta$.

Il potenziale diventa:

$$U(\theta) = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \left(\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) = - \left(m_1 \xi_G + m_2 \frac{L}{2} \right) g \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)(2\sin\theta - \sin^2\theta + 1) = -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)[-(1 - \sin\theta)^2 + 2] = \\
&= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \sin\theta)^2\right]
\end{aligned}$$

e quindi, posto $\theta = \pi/2 + \eta$:

$$\begin{aligned}
U\left(\frac{\pi}{2} + \eta\right) &= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\eta)^2\right] = \\
&= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - 2\sin^4\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] = \\
&= +g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[2\sin^4\left(\frac{\eta}{2}\right) - 1\right] > U\left(\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$, $|\eta| < 2\pi$, $\eta \neq 0$. In definitiva, $\theta = \pi/2$ è un minimo relativo proprio di U , per la cui stabilità o instabilità nulla potrebbe concludersi sulla base dei teoremi generali noti — Lagrange-Dirichlet e inversione parziale relativa. Trattandosi tuttavia di sistema posizionale conservativo ad un solo grado di libertà, l'analisi qualitativa dei moti può essere condotta mediante la **discussione di Weierstrass**, dalla quale segue direttamente ed immediatamente l'**instabilità** della configurazione in esame.

Secondo caso critico: $\theta = -\pi/2$ con $\omega^2 = \alpha$.

Per il potenziale si ha l'espressione:

$$\begin{aligned}
U(\theta) &= -g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta\right) = -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)(2\sin\theta - 1 + \sin^2\theta) \\
&= -\frac{1}{2}g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[(1 + \sin\theta)^2 - 2\right] = g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 + \sin\theta)^2\right]
\end{aligned}$$

e con la sostituzione $\theta = -\pi/2 + \eta$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
U\left(-\frac{\pi}{2} + \eta\right) &= g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - \frac{1}{2}(1 - \cos\eta)^2\right] = \\
&= g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)\left[1 - 2\sin^4\left(\frac{\eta}{2}\right)\right] < U\left(-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\forall \eta \in \mathbb{R}$, $|\eta| < 2\pi$, $\eta \neq 0$. La configurazione $\theta = -\pi/2$ costituisce pertanto un massimo relativo proprio del potenziale ed è stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet.

Il grafico riportato nella pagina seguente illustra il diagramma di biforcazione del sistema, nell'ipotesi che si abbia $\beta > 0$.

(e) **Frequenze normali delle piccole oscillazioni**

Consideriamo ad esempio $\theta = -\pi/2$ per

$$\omega^2 < \frac{kL^2 + g\left(m_1\xi_G + m_2\frac{L}{2}\right)}{\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2} = \alpha .$$

La derivata seconda del potenziale in $\theta = -\pi/2$ è già stata determinata:

$$U_{\theta\theta}(-\pi/2) = \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\omega^2 - \alpha) < 0$$

in modo che risulta:

$$U(\theta) = U(-\pi/2) + \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\omega^2 - \alpha)\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2 + o\left[\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2\right] \quad (\theta \rightarrow -\pi/2).$$

L'energia cinetica nell'intorno di $(\theta, \dot{\theta}) = (-\pi/2, 0)$ si approssima invece con:

$$\left[\frac{\Lambda}{2} + m_2L^2\left(\frac{3}{16} + \sin^2\theta\right)\right]_{\theta=-\pi/2}\dot{\theta}^2 = \left(\frac{\Lambda}{2} + m_2L^2\frac{19}{16}\right)\dot{\theta}^2.$$

La lagrangiana delle piccole oscillazioni è allora:

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \left(\frac{\Lambda}{2} + m_2L^2\frac{19}{16}\right)\dot{\theta}^2 + \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\omega^2 - \alpha)\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)^2$$

e l'equazione corrispondente è quella di un oscillatore armonico semplice:

$$\left(\Lambda + m_2L^2\frac{19}{8}\right)\ddot{\theta} + \left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right)(\alpha - \omega^2)\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

di pulsazione:

$$\Omega = \sqrt{(\alpha - \omega^2)\left(\Lambda + \frac{9}{4}m_2L^2\right) / \left(\Lambda + m_2L^2\frac{19}{8}\right)}.$$

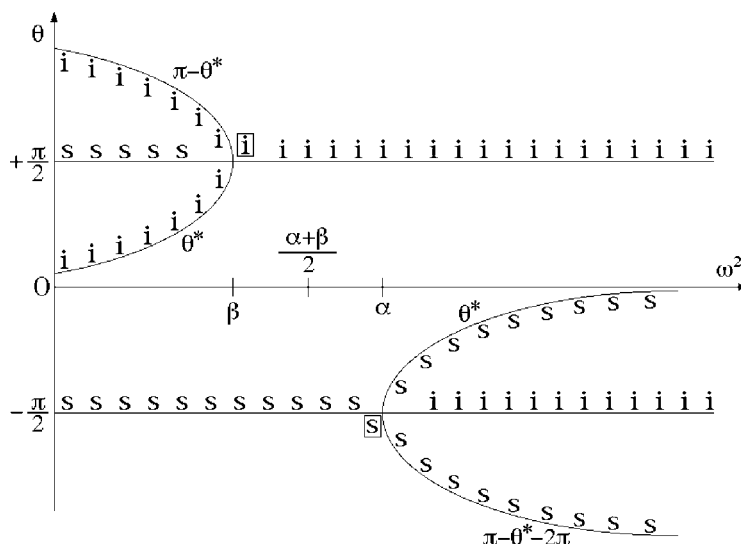


Diagramma di biforcazione del sistema per $\beta > 0$

Osservazione. Reazioni vincolari

Si vuole procedere alla determinazione delle reazioni vincolari esterne applicate alle parti rigide costituenti il sistema. Dette reazioni agiscono di necessità nei soli punti O , A dell'asta \mathbb{L} e A , B del disco \mathbb{D} . Complessivamente le reazioni vincolari indipendenti sono tre; sono infatti presenti le reazioni vincolari:

- $\vec{\Phi}_1$ applicata all'asta \mathbb{L} dall'asse Oy in O ;
- $\vec{\Phi}_2$ esercitata sull'asta in A dal disco \mathbb{D} ;
- $-\vec{\Phi}_2$ prodotta dal disco \mathbb{D} dall'asta \mathbb{L} in A (opposta alla precedente in virtù del principio di azione e reazione);
- $\vec{\Phi}_3$ esercitata sul disco in B dall'asse Ox .

Le equazioni cardinali dell'impulso per asta e disco si scrivono rispettivamente:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_1 + \vec{\Phi}_2 = m_1 \ddot{G} \\ -\vec{\Phi}_2 + \vec{\Phi}_3 = m_2 \ddot{C} \end{cases}$$

e da esse si ricava:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_1 = m_1 \ddot{G} - \vec{\Phi}_2 \\ \vec{\Phi}_3 = m_2 \ddot{C} + \vec{\Phi}_2. \end{cases} \quad (0.2)$$

L'equazione cardinale del momento angolare per l'asta, nel polo fisso O , porge inoltre:

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O^{\mathbb{L}} = (G - O) \wedge (-m_1 g \hat{e}_2) + \vec{M}_O^{\mathbb{L},cf} + (A - O) \wedge \vec{\Phi}_2$$

e individua $\vec{\Phi}_2$ a meno di un vettore $\lambda_1(A - O)$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, una volta determinato il momento risultante $\vec{M}_O^{\mathbb{L},cf}$ in O delle forze centrifughe agenti sull'asta.

Analogamente, per il disco \mathbb{D} si ha l'equazione cardinale del momento angolare nel polo mobile B :

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_B^{\mathbb{D}} = -m_2 \dot{B} \wedge \dot{C} + (C - B) \wedge (-m_2 g \hat{e}_2) + \vec{M}_B^{\mathbb{D},cf} + (A - B) \wedge \vec{\Phi}_2$$

la quale fissa $\vec{\Phi}_2$ a meno di un vettore $\lambda_2(A - B)$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, in termini del momento risultante $\vec{M}_B^{\mathbb{D},cf}$ in B delle forze centrifughe applicate al disco.

Poiché il moto del sistema è piano, i vettori (noti):

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \vec{K}_O^{\mathbb{L}} - (G - O) \wedge (-m_1 g \hat{e}_2) - \vec{M}_O^{\mathbb{L},cf} \\ & \frac{d}{dt} \vec{K}_B^{\mathbb{D}} + m_2 \dot{B} \wedge \dot{C} - (C - B) \wedge (-m_2 g \hat{e}_2) - \vec{M}_B^{\mathbb{D},cf} \end{aligned}$$

risultano diretti secondo \hat{e}_3 e possono allora essere indicati nella forma $\mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3$ e $\mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3$, rispettivamente. Le equazioni cardinali del momento angolare per asta e disco diventano così:

$$\mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 = (A - O) \wedge \vec{\Phi}_2 \quad \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3 = (A - B) \wedge \vec{\Phi}_2$$

ed implicano entrambe che si abbia $\hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 = 0$, per esempio:

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{e}_3 \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 = \hat{e}_3 \wedge [(A - O) \wedge \vec{\Phi}_2] = \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 (A - O) - (A - O) \cdot \hat{e}_3 \vec{\Phi}_2 = \\ &= \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 (A - O) - 0 \vec{\Phi}_2 = \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 (A - O) \quad \implies \quad \hat{e}_3 \cdot \vec{\Phi}_2 = 0. \end{aligned}$$

Tali equazioni possono essere risolte in $\vec{\Phi}_2$ e forniscono le espressioni:

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_2 = -\frac{1}{|A - O|^2} (A - O) \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 + \lambda_1 (A - O) \\ \vec{\Phi}_2 = -\frac{1}{|A - B|^2} (A - B) \wedge \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3 + \lambda_2 (A - B) \end{cases} \quad (0.3)$$

in cui i vettori:

$$A - O, \quad A - B, \quad -\frac{1}{|A - O|^2} (A - O) \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3, \quad \frac{1}{|A - B|^2} (A - B) \wedge \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3$$

sono tutti noti. Sottraendo membro a membro, dalle (0.3) si deduce

$$\lambda_1 (A - O) - \lambda_2 (A - B) = \frac{1}{|A - O|^2} (A - O) \wedge \mu_{\mathbb{L}}\hat{e}_3 - \frac{1}{|A - B|^2} (A - B) \wedge \mu_{\mathbb{D}}\hat{e}_3$$

e poiché tutti i vettori a primo e a secondo membro sono ortogonali ad \hat{e}_3 , con $A - O$ e $A - B$ linearmente indipendenti per ogni configurazione in cui si abbia $B \neq O$, gli scalari λ_1 e λ_2 sono determinati univocamente e con essi risulta determinato univocamente anche $\vec{\Phi}_2$. Una volta calcolato $\vec{\Phi}_2$, i vettori $\vec{\Phi}_1$ e $\vec{\Phi}_3$ si individuano immediatamente per mezzo delle (0.2). In conclusione, le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_1, \vec{\Phi}_2, \vec{\Phi}_3$ sono determinate in modo univoco lungo qualsiasi moto del sistema per ogni configurazione in cui si abbia $B \neq O$ — ovvero $\theta \neq (n + \frac{1}{2})\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Osservazione. Equilibri e stabilità in presenza di una resistenza viscosa

Si vogliono determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, analizzandone le relative proprietà di stabilità, nell'ipotesi che accanto alle sollecitazioni posizionali conservative già considerate in precedenza si introduca una ulteriore sollecitazione del tipo:

$$-\beta \dot{C}$$

con $\beta > 0$ costante, applicata in C . La velocità \dot{C} è già stata determinata precedentemente:

$$\dot{C} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \dot{\theta} = \left(-\frac{3}{2} \sin \theta \hat{e}_1 + \frac{1}{2} \cos \theta \hat{e}_2 \right) L \dot{\theta}$$

per cui l'unica componente lagrangiana della nuova sollecitazione risulta:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -\beta \dot{C} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \dot{\theta} \frac{\partial C}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial C}{\partial \theta} = -\beta \dot{\theta} \left| \frac{\partial C}{\partial \theta} \right|^2 = \\ &= -\beta \dot{\theta} \frac{L^2}{4} (9\sin^2\theta + \cos^2\theta) = -\beta \frac{L^2}{4} (1 + 8\sin^2\theta) \dot{\theta} \end{aligned}$$

e non dipende esplicitamente dal tempo. La potenza della sollecitazione è non positiva:

$$\pi = Q_\theta \dot{\theta} = -\beta \frac{L^2}{4} (1 + 8\sin^2\theta) \dot{\theta}^2 \leq 0 \quad \forall (\theta, \dot{\theta}) \in \mathbb{R}^2$$

e si annulla soltanto a velocità generalizzata nulla:

$$\pi = -\beta \frac{L^2}{4} (1 + 8\sin^2\theta) \dot{\theta}^2 = 0 \quad \implies \quad \dot{\theta} = 0$$

il che consente di riconoscere il carattere **completamente dissipativo** della sollecitazione in esame. Si hanno allora i seguenti asserti:

- (i) poiché Q_θ è a potenza non positiva e continua in θ , le configurazioni di equilibrio trovate nel caso puramente conservativo **restano invariate e non ne insorgono altre**;
- (ii) tali configurazioni erano risultate in numero finito, dunque necessariamente **isolate**;
- (iii) Q_θ ha natura **completamente dissipativa**, come verificato.

Le proposizioni (ii) e (iii) autorizzano ad applicare i criteri di Barbasin-Krasovskii all'analisi di stabilità delle configurazioni di equilibrio (i). Si deduce allora che:

- (a) le configurazioni di equilibrio giudicate stabili nel caso conservativo, in quanto massimi relativi propri del potenziale U , risultano ora **asintoticamente stabili**;
- (b) tutte le altre configurazioni di equilibrio del caso conservativo **non** costituiscono massimi relativi propri del potenziale U e sono **isolate**. Ciò basta per assicurare l'instabilità di dette configurazioni.