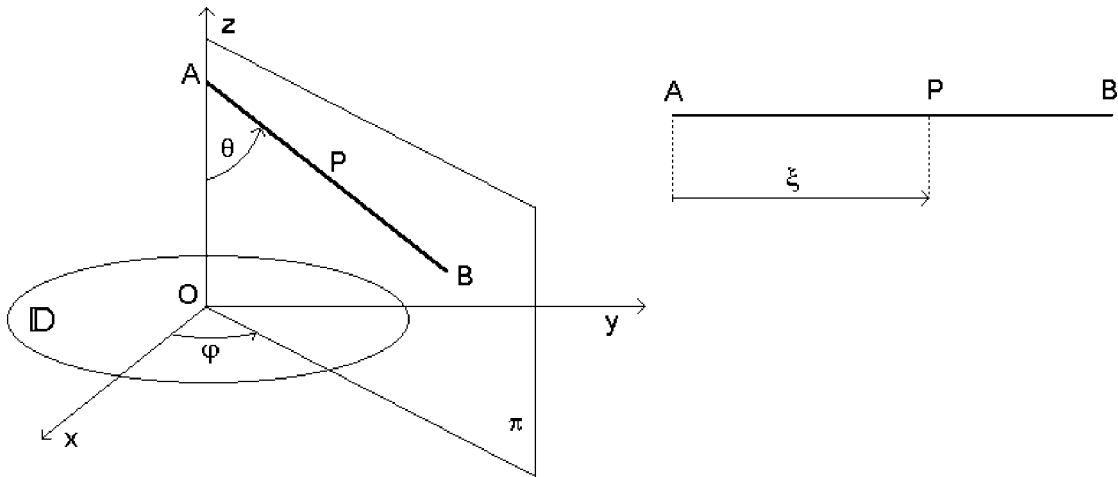


PROBLEMI RISOLTI DI MECCANICA RAZIONALE

Dispense per i corsi di Meccanica Razionale 1 e 2. Prof. Stefano Siboni

Esercizio 1. Energia cinetica di un sistema scleronomo a 2 g.d.l. in 3D

In una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$ si consideri un disco circolare \mathbb{D} , libero di ruotare nel piano Oxy attorno al punto fisso O e dotato di momento d'inerzia I rispetto all'asse Oz . Il disco è connesso rigidamente ad un'asta verticale OA , alla cui estremità A si incerniera una seconda asta AB , di massa m e lunghezza ℓ , libera di ruotare in un piano verticale fisso rispetto al disco. Indicato con P un generico punto di AB e posto $\xi \equiv |P - A| \in [0, \ell]$, la distribuzione di massa lungo AB è caratterizzata da una opportuna densità $\lambda(\xi) \geq 0$. Si faccia uso dei parametri φ (angolo di rotazione del disco rispetto al piano Oxz) e θ — angolo di rotazione dell'asta AB rispetto alla direzione verticale — mostrati in figura per determinare l'espressione dell'energia cinetica totale relativa ad $Oxyz$ del sistema.



Soluzione

L'energia cinetica del sistema consta della somma di due termini, l'uno relativo all'asta AB e l'altro al disco \mathbb{D} . Il termine di energia cinetica del disco si calcola immediatamente, tenuto conto del fatto che il moto rigido di \mathbb{D} avviene attorno all'asse fisso Oz con velocità angolare $\dot{\varphi} \hat{e}_3$

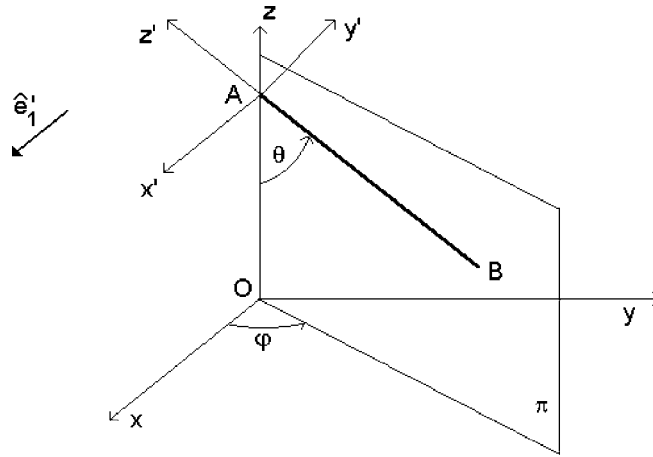
$$T_{\mathbb{D}} = \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2.$$

Quanto all'energia cinetica dell'asta T_{AB} , essa può essere valutata in vario modo. Di seguito si illustrano tre metodi equivalenti per ottenere il risultato.

Primo metodo. Teorema dell'energia cinetica per un sistema rigido con un punto fisso

Il punto A dell'asta è vincolato in posizione fissa, per cui si può calcolare l'energia cinetica richiesta applicando l'espressione per l'energia cinetica di un sistema rigido con punto fisso. Trattandosi di sistema a due gradi di libertà, conviene procedere in modo sistematico individuando una terna cartesiana solidale all'asta, con origine in A , e ricavando le

componenti del vettore velocità angolare istantanea di AB , nonché della matrice d'inerzia, rispetto a tale terna. La terna solidale $Ax'y'z'$ abbia l'asse Az' coincidente con la retta AB , l'asse Ax' normale al piano vincolare dell'asta ed infine l'asse Ay' perpendicolare ai precedenti ed orientato in modo che $Ax'y'z'$ risulti destra (vedi figura). Si indichi con



\hat{e}'_1 il versore associato ad Ax' . La matrice d'inerzia dell'asta rispetto ad $Ax'y'z'$ soddisfa le ovvie condizioni $L_{xx} = L_{yy}$, $L_{zz} = 0$, ed è principale per evidenti ragioni di simmetria

$$[L] = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Lambda \equiv \int_0^\ell \xi^2 \lambda(\xi) d\xi.$$

Altrettanto agevole è il calcolo della velocità angolare di $Ax'y'z'$ rispetto ad $Oxyz$, osservato che φ e θ sono due angoli euleriani, associati alle rotazioni attorno ad Oz ed Ax' rispettivamente

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_3 + \dot{\theta} \hat{e}'_1.$$

Le componenti in $Ax'y'z'$ di $\vec{\omega}$ si deducono dalle identità vettoriali

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}'_1 + \dot{\varphi} (\cos \theta \hat{e}'_3 + \sin \theta \hat{e}'_2) = \dot{\theta} \hat{e}'_1 + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}'_2 + \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}'_3.$$

L'espressione cercata è allora

$$T_{AB} = \frac{1}{2} (\dot{\theta} \quad \sin \theta \dot{\varphi} \quad \cos \theta \dot{\varphi}) \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \sin \theta \dot{\varphi} \\ \cos \theta \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \Lambda (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Secondo metodo. Teorema di König

Per individuare il baricentro G dell'asta occorre e basta determinarne l'ascissa ξ_G lungo l'asta, per mezzo della definizione

$$\xi_G = \frac{1}{m} \int_0^\ell \xi \lambda(\xi) d\xi \quad m = \int_0^\ell \lambda(\xi) d\xi$$

e quindi

$$G - O = A - O + (B - A) \frac{\xi_G}{\ell}.$$

Di qui si deducono le componenti cartesiane in $Oxyz$ del vettore $G - O$

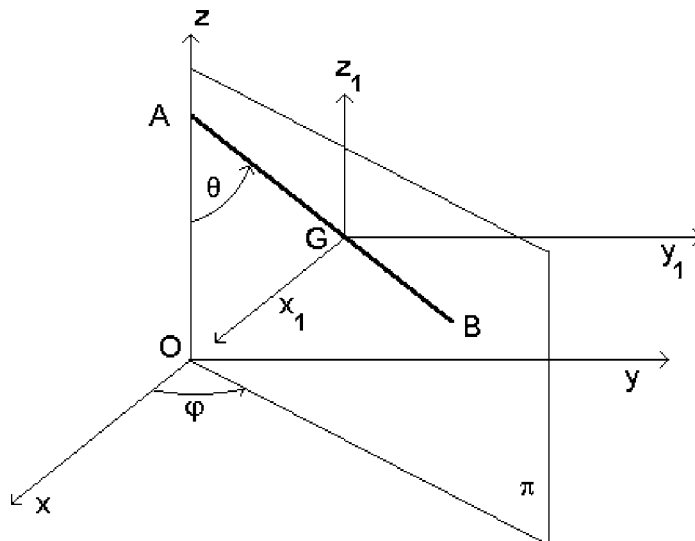
$$(\xi_G \sin \theta \cos \varphi, \xi_G \sin \theta \sin \varphi, |A - O| - \xi_G \cos \theta)$$

ed il modulo quadrato della velocità di G

$$\begin{aligned} |\dot{G}|^2 &= (\dot{x}_G)^2 + (\dot{y}_G)^2 + (\dot{z}_G)^2 = (\xi_G \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \xi_G \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi})^2 + \\ &+ (\xi_G \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \xi_G \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi})^2 + (\xi_G \sin \theta \dot{\theta})^2 = \xi_G^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \end{aligned}$$

Introdotta la terna cartesiana baricentrale $Gx_1y_1z_1$ (con gli assi rispettivamente paralleli a quelli di $Oxyz$), il teorema di König porge

$$T_{AB} = \frac{m}{2} \xi_G^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + T_{AB, Gx_1y_1z_1}.$$



Il calcolo dell'energia cinetica per il moto attorno al baricentro, $T_{AB, Gx_1y_1z_1}$, procede come quello di T_{AB} nel caso precedente (primo metodo), salvo che l'origine del sistema solidale

è ora G (terna di assi *centrali* d'inerzia) ed i momenti Λ sono sostituiti da

$$\Lambda_G \equiv \int_0^\ell (\xi - \xi_G)^2 \lambda(\xi) d\xi.$$

Il risultato è così

$$T_{AB, Gx_1y_1z_1} = \frac{1}{2} \Lambda_G (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2),$$

dal quale si deduce

$$T_{AB} = \frac{1}{2} (m\xi_G^2 + \Lambda_G) (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

L'espressione ottenuta coincide con quella ricavata con il metodo precedente, siccome per Huygens-Steiner vale l'identità $\Lambda = m\xi_G^2 + \Lambda_G$, che non è inopportuno verificare direttamente

$$\begin{aligned} \Lambda_G &= \int_0^\ell (\xi - \xi_G)^2 \lambda(\xi) d\xi = \int_0^\ell \xi^2 \lambda(\xi) d\xi - 2\xi_G \int_0^\ell \xi \lambda(\xi) d\xi + \xi_G^2 \int_0^\ell \lambda(\xi) d\xi = \\ &= \Lambda - 2m\xi_G^2 + m\xi_G^2 = \Lambda - m\xi_G^2. \end{aligned}$$

Terzo metodo. Integrazione diretta sull'atto di moto

Un punto generico Q , di ascissa curvilinea $\xi \in [0, \ell]$, dell'asta è individuato dal vettore

$$Q - O = \xi \sin \theta \cos \varphi \hat{e}_1 + \xi \sin \theta \sin \varphi \hat{e}_2 + (\overline{OA} - \xi \cos \theta) \hat{e}_3$$

e la sua velocità si scrive

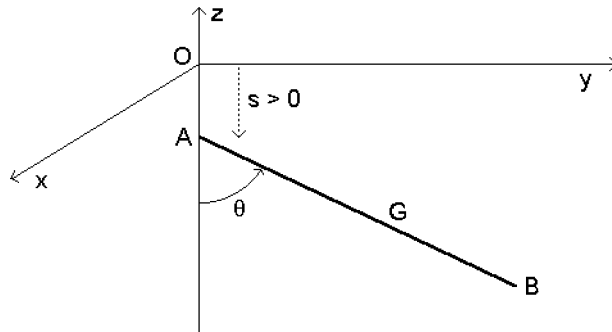
$$\dot{Q} = (\xi \cos \theta \cos \varphi \dot{\theta} - \xi \sin \theta \sin \varphi \dot{\varphi}) \hat{e}_1 + (\xi \cos \theta \sin \varphi \dot{\theta} + \xi \sin \theta \cos \varphi \dot{\varphi}) \hat{e}_2 + \xi \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_3.$$

Perciò $|\dot{Q}|^2 = \xi^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$ ed è quindi possibile calcolare l'espressione di T applicando la definizione

$$T_{AB} = \frac{1}{2} \int_0^\ell |\dot{Q}|^2 \lambda(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_0^\ell \xi^2 \lambda(\xi) d\xi (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2} \Lambda (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2).$$

Esercizio 2. Energia cinetica di un sistema scleronomo a 2 g.d.l.

In un riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ è data un'asta rigida omogenea di estremi A e B , avente massa m e lunghezza ℓ . L'asta è vincolata a giacere nel piano coordinato Oyz , mantenendo l'estremo A sull'asse Oz . Scrivere l'espressione per l'energia cinetica dell'asta rispetto alla terna di riferimento $Oxyz$, facendo uso dei parametri lagrangiani s e θ mostrati in figura.



Soluzione

Mostriamo come sia possibile pervenire al risultato seguendo tre metodi diversi, fra loro equivalenti.

Primo metodo. Teorema di König

Trattandosi di asta omogenea il vettore posizione del baricentro G si scrive

$$G - O = \frac{\ell}{2} \sin \theta \hat{e}_2 - \left(\frac{\ell}{2} \cos \theta + s \right) \hat{e}_3$$

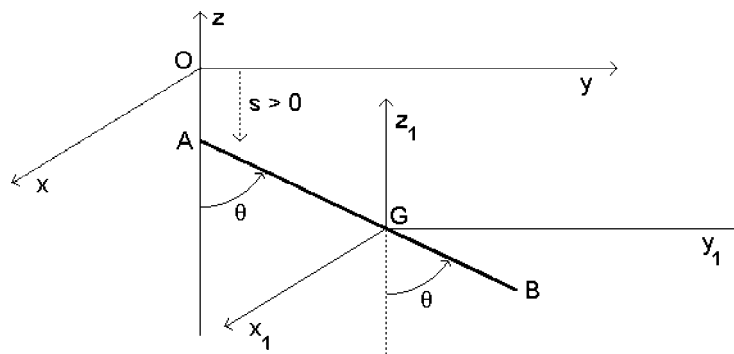
e la sua velocità relativa ad $Oxyz$ risulta

$$\dot{G} = \frac{\ell}{2} \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 + \left(\frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta} - \dot{s} \right) \hat{e}_3$$

di modulo quadrato

$$|\dot{G}|^2 = \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 - \ell \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} \tag{2.1}.$$

Per determinare l'energia cinetica del moto attorno al baricentro si considera una terna baricentrale $Gx_1y_1z_1$ (con origine in G ed assi orientati in modo costante rispetto ad $Oxyz$) avente gli assi Gx_1 , Gy_1 e Gz_1 rispettivamente paralleli ad Ox , Oy ed Oz :



Rispetto a tale riferimento l'asta ruota attorno all'asse fisso Gx_1 con velocità angolare $\dot{\theta} \hat{e}_1$, in quanto l'angolo θ è per definizione compreso fra una direzione fissa sull'asta (quella del segmento GB) ed una direzione fissa nel riferimento baricentrale (ovvero, equivalentemente in quello fisso $Oxyz$). Si osservi che a rigore sarebbe necessario introdurre un ulteriore riferimento solidale al corpo rigido, per esempio con un asse passante per l'asta, un secondo coincidente con Gx_1 ed il terzo perpendicolare ad entrambi. Il valore di θ verrebbe allora più precisamente interpretato come l'ampiezza dell'angolo diedro compreso fra il piano Gx_1z_1 del sistema baricentrale ed il piano coordinato individuato da Gx_1 e da AB nel riferimento solidale (vedi figura). In questo caso, data l'estrema semplicità del sistema in esame, l'introduzione della terna solidale non si rende strettamente indispensabile ed il risultato appare del tutto ovvio. Negli esercizi a seguire si converrà la scelta del riferimento solidale come operata implicitamente, lasciando al lettore i dettagli della sua individuazione. Indicato con $I_{x_1x_1}$ il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse coordinato Gx_1 , l'energia cinetica del moto attorno al baricentro vale allora

$$T_{Gx_1y_1z_1} = \frac{1}{2} I_{x_1x_1} \dot{\theta}^2 = \frac{m\ell^2}{24} \dot{\theta}^2$$

ed infine, tenuto conto della (2.1)

$$T = \frac{m}{2} |\dot{G}|^2 + T_{Gx_1y_1z_1} = \frac{m}{2} \left(\frac{\ell^2}{4} \dot{\theta}^2 + \dot{s}^2 - \ell \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} \right) + \frac{m\ell^2}{24} \dot{\theta}^2 = m \left(\frac{\ell^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} \right).$$

Secondo metodo. Integrazione diretta sull'atto di moto

Un punto generico Q dell'asta sia individuato dall'ascissa curvilinea $\xi \equiv \overline{AQ} \in [0, \ell]$. Le coordinate di Q in $Oxyz$ sono quindi

$$(0, \xi \sin \theta, -s - \xi \cos \theta)$$

e le componenti di \dot{Q} nello stesso riferimento

$$(0, \xi \cos \theta \dot{\theta}, -\dot{s} + \xi \sin \theta \dot{\theta}).$$

Si ha allora

$$|\dot{Q}|^2 = \xi^2 \cos^2 \theta \dot{\theta}^2 + (\xi \sin \theta \dot{\theta} - \dot{s})^2 = \xi^2 \dot{\theta}^2 - 2\xi \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} + \dot{s}^2$$

e l'energia cinetica diviene

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell |\dot{Q}|^2 \frac{m}{\ell} d\xi = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell [\xi^2 \dot{\theta}^2 - 2\xi \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} + \dot{s}^2] d\xi = m \left[\frac{\ell^2}{6} \dot{\theta}^2 + \frac{\dot{s}^2}{2} - \frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} \right]$$

che coincide con il risultato precedente.

Terzo metodo. Uso dell'asse istantaneo di rotazione

Il generico punto Q dell'asta ha vettore posizione

$$Q - O = \xi \sin \theta \hat{e}_2 + (-s - \xi \cos \theta) \hat{e}_3$$

e la sua velocità relativa ad $Oxyz$ risulta

$$\dot{Q} = \xi \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 + (-\dot{s} + \xi \sin \theta \dot{\theta}) \hat{e}_3$$

mentre la velocità angolare dell'asta vale $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_1$. Trattandosi di moto rigido piano, il centro di rotazione istantanea C è allora definito ed individuato dall'espressione

$$\begin{aligned} C - O &= Q - O + \frac{1}{\dot{\theta}} \hat{e}_1 \wedge \dot{Q} = Q - O + \frac{1}{\dot{\theta}} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi \cos \theta \dot{\theta} & -\dot{s} + \xi \sin \theta \dot{\theta} \end{vmatrix} = \\ &= Q - O + \frac{1}{\dot{\theta}} [(\dot{s} - \xi \sin \theta \dot{\theta}) \hat{e}_2 + \xi \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_3] = \\ &= \xi \sin \theta \hat{e}_2 + (-s - \xi \cos \theta) \hat{e}_3 + \left(\frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} - \xi \sin \theta \right) \hat{e}_2 + \xi \cos \theta \hat{e}_3 = \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} \hat{e}_2 - s \hat{e}_3, \end{aligned}$$

dove si è supposto che $\dot{\theta} \neq 0$. In definitiva, per $\dot{\theta} \neq 0$ il centro di rotazione istantanea è dato da

$$C - O = \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} \hat{e}_2 - s \hat{e}_3$$

indipendente da ξ , come deve essere. Qualora si abbia $\dot{\theta} = 0$ risulta invece

$$\dot{Q} = -\dot{s} \hat{e}_3 \quad \forall Q \in AB$$

e l'atto di moto è puramente traslatorio.

Nel caso $\dot{\theta} \neq 0$, essendo $A - O = -s \hat{e}_3$ e $B - O = \ell \sin \theta \hat{e}_2 + (-s - \ell \cos \theta) \hat{e}_3$, il vettore posizione del baricentro dell'asta ha la forma

$$G - O = \frac{1}{2} [(A - O) + (B - O)] = \frac{\ell}{2} \sin \theta \hat{e}_2 + \left(-s - \frac{\ell}{2} \cos \theta \right) \hat{e}_3.$$

Pertanto $|G - C|^2 = \left(\frac{\ell}{2} \sin \theta - \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} \right)^2 + \frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta$ ed il momento d'inerzia I_{Cx} dell'asta rispetto all'asse istantaneo di rotazione Cx vale, per Huygens-Steiner

$$I_{Cx} = \frac{m\ell^2}{12} + m \left[\left(\frac{\ell}{2} \sin \theta - \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} \right)^2 + \frac{\ell^2}{4} \cos^2 \theta \right] = m \left[\frac{\ell^2}{3} - \ell \sin \theta \frac{\dot{s}}{\dot{\theta}} + \frac{\dot{s}^2}{\dot{\theta}^2} \right].$$

L'atto di moto è puramente rotatorio attorno a C e dunque l'energia cinetica è data da

$$T = \frac{1}{2} I_{Cx} \dot{\theta}^2 = m \left[\frac{\ell^2}{6} \dot{\theta}^2 - \frac{\ell}{2} \sin \theta \dot{\theta} \dot{s} + \frac{\dot{s}^2}{2} \right] \quad (2.2)$$

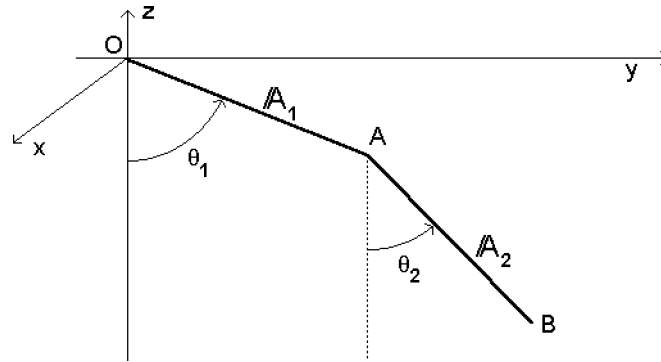
in accordo con il risultato già ottenuto. Per $\dot{\theta} = 0$ si ottiene invece

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell |\dot{Q}|^2 \frac{m}{\ell} d\xi = \frac{m}{2\ell} \int_0^\ell \dot{s}^2 d\xi = \frac{m}{2} \dot{s}^2$$

che è la forma assunta dalla (2.2) nell'ipotesi $\dot{\theta} = 0$.

Esercizio 3. Energia cinetica di un sistema scleronomo a 2 g.d.l.

Sia dato un sistema costituito da due aste rettilinee rigide omogenee, $OA \equiv \mathbb{A}_1$ ed $AB \equiv \mathbb{A}_2$, incernierate in A e vincolate a giacere nel piano Oyz di una terna di riferimento cartesiana ortogonale $Oxyz$, con il punto O fisso. \mathbb{A}_1 ha lunghezza ℓ_1 e massa m_1 , mentre \mathbb{A}_2 ha lunghezza ℓ_2 e massa m_2 . Facendo uso degli angoli θ_1 e θ_2 , indicati in figura, come parametri lagrangiani, si determini l'espressione dell'energia cinetica del sistema relativa ad $Oxyz$.


Soluzione

L'energia cinetica T del sistema è identificabile con la somma delle energie cinetiche $T_{\mathbb{A}_1}$ e $T_{\mathbb{A}_2}$ delle singole aste, che possono essere valutate separatamente.

Energia cinetica di \mathbb{A}_1

Nella terna $Oxyz$ il moto dell'asta avviene attorno all'asse fisso Ox e poiché θ_1 è l'angolo compreso fra la direzione Oz (fissa nel riferimento $Oxyz$) e quella di $A - O$ (fissa rispetto ad \mathbb{A}_1), la velocità angolare di \mathbb{A}_1 si riduce a $\dot{\theta}_1 \hat{e}_1$. Il teorema di Huygens-Steiner porge per il momento d'inerzia dell'asta relativo ad Ox l'espressione

$$I_{Ox} = \frac{m_1 \ell_1^2}{12} + m_1 \left(\frac{\ell_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m_1 \ell_1^2.$$

L'energia cinetica diviene infine

$$T_{\mathbb{A}_1} = \frac{1}{2} I_{Ox} \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{6} m_1 \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2.$$

Energia cinetica di \mathbb{A}_2

In modo analogo a quanto già osservato per \mathbb{A}_1 , la velocità angolare di \mathbb{A}_2 rispetto alla terna $Oxyz$ si verifica essere $\dot{\theta}_2 \hat{e}_1$. Data l'assenza di punti fissi, conviene applicare il teorema di König. Il baricentro G_2 di \mathbb{A}_2 ha in $Oxyz$ le coordinate

$$\left(0, \ell_1 \sin \theta_1 + \frac{\ell_2}{2} \sin \theta_2, -\ell_1 \cos \theta_1 - \frac{\ell_2}{2} \cos \theta_2 \right)$$

con

$$\begin{aligned} |\dot{G}_2|^2 &= \left[\ell_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell_2}{2} \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \right]^2 + \left[\ell_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{\ell_2}{2} \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \right]^2 = \\ &= \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{\ell_2^2}{4} \dot{\theta}_2^2 + \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \end{aligned}$$

Nella terna baricentrale $G_2x_1y_1z_1$ l'energia cinetica relativa (del cosiddetto moto attorno al baricentro) è espressa da

$$T_{\mathbb{A}_2, G_2x_1y_1z_1} = \frac{1}{2} \frac{m_2 \ell_2^2}{12} \dot{\theta}_2^2$$

e quindi per König l'energia cinetica rispetto ad $Oxyz$ risulta

$$\begin{aligned} T_{\mathbb{A}_2} &= \frac{m_2}{24} \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_2}{2} \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2}{8} \ell_2^2 \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_2}{2} \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 = \\ &= \frac{m_2 \ell_1^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{6} \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_2}{2} \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \end{aligned}$$

L'energia cinetica totale diventa così

$$T = T_{\mathbb{A}_1} + T_{\mathbb{A}_2} = \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{2} \right) \ell_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{6} \dot{\theta}_2^2 + \frac{m_2}{2} \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2. \quad (3.1)$$

Osservazione. L'energia cinetica totale è una forma quadratica definita positiva delle velocità generalizzate

Dalla (3.1) T risulta chiaramente una forma quadratica in $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2)$, di matrice rappresentativa — simmetrica —

$$M \equiv \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{2} \right) \ell_1^2 & \frac{m_2}{4} \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ \frac{m_2}{4} \ell_1 \ell_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) & \frac{m_2 \ell_2^2}{6} \end{pmatrix}.$$

M è definita positiva per qualsivoglia scelta di $(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \in \mathbb{R}^2$. Infatti

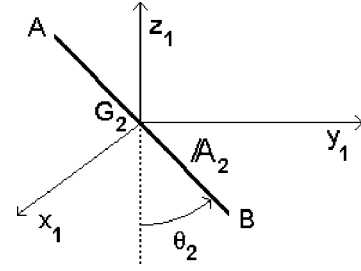
$$\begin{aligned} \det(M) &= \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{2} \right) \ell_1^2 \frac{m_2 \ell_2^2}{6} - \frac{m_2^2}{16} \ell_1^2 \ell_2^2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{36} \ell_1^2 \ell_2^2 + m_2^2 \ell_1^2 \ell_2^2 \left[\frac{1}{12} - \frac{1}{16} \cos^2(\theta_1 - \theta_2) \right] > 0 \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

mentre

$$\text{tr}(M) = \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{2} \right) \ell_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{6} > 0$$

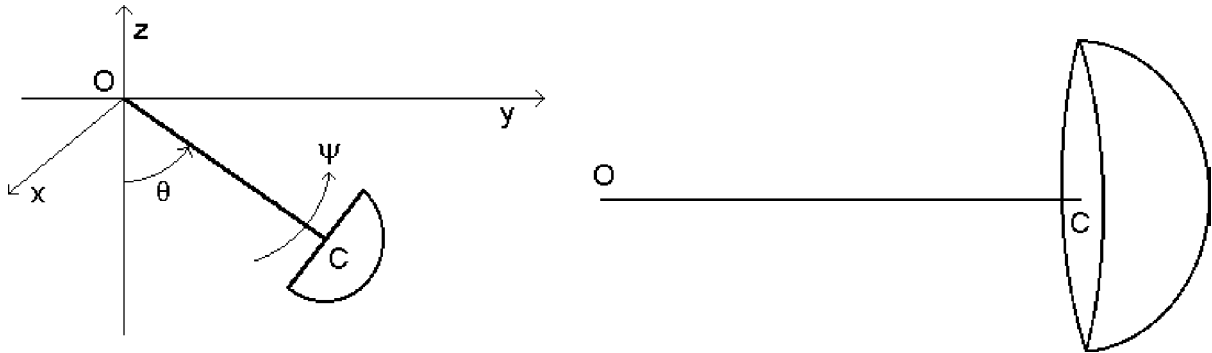
e siccome il prodotto e la somma degli autovalori di una generica matrice 2×2 sono dati rispettivamente dal determinante e dalla traccia della matrice stessa, si conclude che gli autovalori di M (necessariamente reali, causa la simmetria della matrice) sono entrambi positivi. Alla stessa conclusione si perviene applicando il criterio di Jacobi, osservato che

$$\det(M) > 0 \quad \text{e} \quad M_{11} \equiv \left(\frac{m_1}{6} + \frac{m_2}{2} \right) \ell_1^2 > 0.$$



Esercizio 4. Energia cinetica di un sistema scleronomo a 2 g.d.l. in 3D

Si considera una semisfera omogenea rigida di raggio R e massa m . Alla base circolare della semisfera è connessa rigidamente un'asta rettilinea OC di lunghezza ℓ e massa trascurabile, disposta secondo l'asse di simmetria della semisfera (C è pertanto il centro del cerchio che costituisce la base della semisfera). Il sistema rigido viene sospeso per il punto fisso O , origine della terna cartesiana $Oxyz$. L'asta OC è vincolata a giacere nel piano Oyz , ma può ruotare attorno al proprio asse OC solidalmente alla semisfera.



Scrivere l'espressione dell'energia cinetica relativa ad $Oxyz$ facendo uso degli angoli eulerei riportati in figura.

Soluzione

Si procede anche in questo caso al calcolo dell'energia cinetica seguendo tre metodi diversi, fra loro equivalenti.

Primo metodo. Teorema dell'energia cinetica per un sistema rigido con un punto fisso

Il metodo è applicabile (e certamente conveniente) causa la presenza del punto fisso O . Si sceglie la terna solidale con origine in O ed asse Oz' disposto lungo $O - C$. Gli altri due assi Ox' ed Oy' sono ortogonali, ma a parte ciò arbitrari. Introdotti gli usuali angoli di Eulero φ , θ , ψ , si osserva che dovendo OC giacere costantemente in Oyz la linea dei nodi $Oxy \cap Ox'y'$ viene a coincidere con l'asse Ox , cosicché $\varphi(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$. L'angolo $\theta(t)$ descriverà l'inclinazione del sistema rispetto all'asse Oz . $\psi(t)$ esprimerà invece la rotazione del corpo rigido attorno al proprio asse di simmetria OC . La velocità angolare $\vec{\omega}$ del sistema si ricava ponendo $\varphi(t) = 0 \forall t \in \mathbb{R}$ nell'espressione generale

$$\vec{\omega} = (\sin \theta \sin \psi \dot{\varphi} + \cos \psi \dot{\theta}) \hat{e}'_1 + (\sin \theta \cos \psi \dot{\varphi} - \sin \psi \dot{\theta}) \hat{e}'_2 + (\cos \theta \dot{\varphi} + \dot{\psi}) \hat{e}'_3$$

dalla quale si deduce

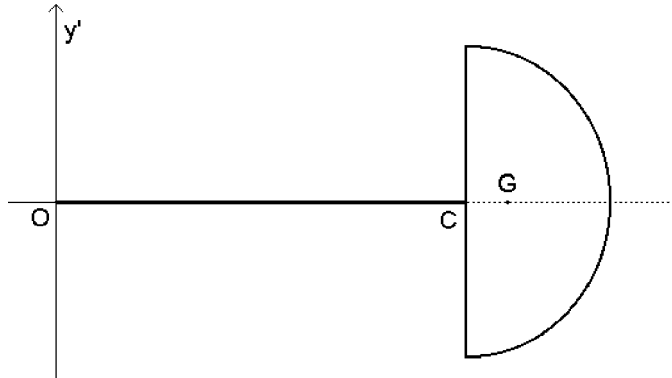
$$\vec{\omega} = \cos \psi \dot{\theta} \hat{e}'_1 - \sin \psi \dot{\theta} \hat{e}'_2 + \dot{\psi} \hat{e}'_3. \quad (4.1)$$

Allo stesso risultato si perviene direttamente notando che $\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{e}_1 + \dot{\psi} \hat{e}'_3$ e che $\hat{e}_1 = \cos \psi \hat{e}'_1 - \sin \psi \hat{e}'_2$.

La matrice d'inerzia $[L']$ rispetto al riferimento solidale si determina piuttosto agevolmente. Si osserva in primo luogo che i prodotti d'inerzia sono tutti nulli per evidenti ragioni di simmetria, e che pertanto $Ox'y'z'$ costituisce una terna principale. Inoltre L'_{zz} è pari alla metà del momento centrale d'inerzia di una sfera di raggio R e massa $2m$

$$L'_{zz} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} (2m) R^2 = \frac{2}{5} m R^2.$$

Rimangono da calcolare L'_{xx} ed L'_{yy} . La simmetria rotazionale attorno all'asse OC implica che $L'_{xx} = L'_{yy}$. D'altra parte il comune valore dei due momenti principali si ottiene con Huygens-Steiner



notando che il baricentro del sistema coincide con quello della sola semisfera (l'asta ha massa nulla). Il momento d'inerzia rispetto all'asse Cy' è già stato calcolato

$$I_{Cy'} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} (2m) R^2 = \frac{2}{5} m R^2$$

mentre quello rispetto all'asse baricentrale Gy' vale

$$I_{Gy'} = I_{Cy'} - m|C - G|^2 = \frac{2}{5} m R^2 - m \left(\frac{3}{8} R \right)^2 = \frac{83}{320} m R^2.$$

Si può infine applicare nuovamente Huygens-Steiner e scrivere

$$L'_{yy} = I_{Oy'} = I_{Gy'} + m|G - O|^2 = \frac{83}{320} m R^2 + m \left(\ell + \frac{3}{8} R \right)^2 = m \left(\frac{2}{5} R^2 + \ell^2 + \frac{3}{4} \ell R \right).$$

In definitiva, la matrice d'inerzia risulta

$$[L'] = \begin{pmatrix} L'_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{zz} \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} L'_{yy} &= m \left[\frac{2}{5} R^2 + \ell^2 + \frac{3}{4} \ell R \right] \\ L'_{zz} &= \frac{2}{5} m R^2. \end{aligned}$$

Tenuto conto della (4.1), l'energia cinetica diventa allora:

$$T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\theta} & -\sin \psi \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L'_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & L'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & L'_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \dot{\theta} \\ -\sin \psi \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} [L'_{yy} \dot{\theta}^2 + L'_{zz} \dot{\psi}^2] = \frac{m}{2} \left[\frac{2}{5} R^2 + \ell^2 + \frac{3}{4} \ell R \right] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{5} m R^2 \dot{\psi}^2.$$

Secondo metodo. Teorema di König

Indicato con $Gx_1y_1z_1$ un riferimento baricentrale, il teorema di König si scrive

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{G}|^2 + T_{Gx_1y_1z_1}.$$

Le coordinate del baricentro in $Oxyz$ sono

$$\left(0, \left(\ell + \frac{3}{8} R \right) \sin \theta, - \left(\ell + \frac{3}{8} R \right) \cos \theta \right)$$

e quelle della velocità \dot{G}

$$\left(0, \left(\ell + \frac{3}{8} R \right) \cos \theta \dot{\theta}, \left(\ell + \frac{3}{8} R \right) \sin \theta \dot{\theta} \right)$$

per cui $|\dot{G}|^2 = \left(\ell + \frac{3}{8} R \right)^2 \dot{\theta}^2$. Il calcolo di $T_{Gx_1y_1z_1}$ è analogo a quello di T già eseguito nel caso precedente, salvo che L'_{yy} dovrà essere riferito all'asse baricentrale Gy'

$$L'_{yy} = I_{Gy'} = \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right) m R^2.$$

Perciò

$$T_{Gx_1y_1z_1} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right) m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{5} m R^2 \dot{\psi}^2 \right]$$

ed infine

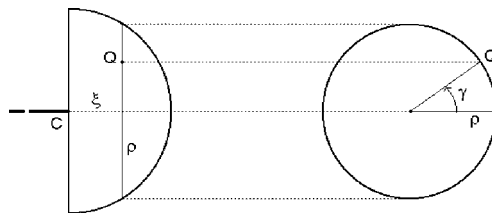
$$T = \frac{1}{2} \left[m \left(\ell + \frac{3}{8} R \right)^2 \dot{\theta}^2 + m \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right) R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2}{5} m R^2 \dot{\psi}^2 \right] = \frac{m}{2} \left(\ell^2 + \frac{3}{4} \ell R + \frac{2}{5} R^2 \right) \dot{\theta}^2 + \frac{m}{5} R^2 \dot{\psi}^2,$$

che coincide con il precedente risultato.

Terzo metodo. Integrazione sull'atto di moto

Un punto arbitrario Q della semisfera è individuabile in coordinate polari cilindriche (γ, ρ, ξ) , con

$$\xi \in [0, R] \quad \rho \in [0, \sqrt{R^2 - \xi^2}] \quad \gamma \in [0, 2\pi).$$



Ad un istante arbitrario le coordinate cartesiane di Q in $Oxyz$ si esprimeranno dunque come

$$(\rho \cos(\gamma + \psi), \rho \sin(\gamma + \psi) \cos \theta + (\ell + \xi) \sin \theta, \rho \sin(\gamma + \psi) \sin \theta - (\ell + \xi) \cos \theta)$$

per cui le componenti di \dot{Q} saranno

$$\begin{pmatrix} -\rho \sin(\gamma + \psi) \dot{\psi}, \\ \rho \cos(\gamma + \psi) \cos \theta \dot{\psi} - \rho \sin(\gamma + \psi) \sin \theta \dot{\theta} + (\ell + \xi) \cos \theta \dot{\theta}, \\ \rho \cos(\gamma + \psi) \sin \theta \dot{\psi} + \rho \sin(\gamma + \psi) \cos \theta \dot{\theta} + (\ell + \xi) \sin \theta \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e di conseguenza

$$|\dot{Q}|^2 = \rho^2 \dot{\psi}^2 + (\ell + \xi)^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2(\gamma + \psi) \dot{\theta}^2 + 2\rho(\ell + \xi) \cos(\gamma + \psi) \dot{\theta} \dot{\psi}.$$

L'energia cinetica del sistema vale allora

$$T = \frac{1}{2} \frac{m}{2\pi R^3/3} \int_{\text{semisfera}} |\dot{Q}|^2 dV = \frac{3}{4\pi} \frac{m}{R^3} \int_0^R d\xi \int_0^{\sqrt{R^2-\xi^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\gamma \rho |\dot{Q}|^2$$

dove ρ è lo Jacobiano in coordinate polari cilindriche (γ, ρ, ξ) . Pertanto

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{4\pi} \frac{m}{R^3} \int_0^R d\xi \int_0^{\sqrt{R^2-\xi^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\gamma \rho [\rho^2 \dot{\psi}^2 + (\ell + \xi)^2 \dot{\theta}^2 + \rho^2 \sin^2(\gamma + \psi) \dot{\theta}^2 + \\ &\quad + 2\rho(\ell + \xi) \cos(\gamma + \psi) \dot{\theta} \dot{\psi}] = \\ &= \frac{3}{4\pi} \frac{m}{R^3} \int_0^R d\xi \int_0^{\sqrt{R^2-\xi^2}} d\rho \rho [2\pi \rho^2 \dot{\psi}^2 + 2\pi(\ell + \xi)^2 \dot{\theta}^2 + \pi \rho^2 \dot{\theta}^2] = \\ &= \frac{3m}{4R^3} \int_0^R \left[2\dot{\psi}^2 \frac{(R^2 - \xi^2)^2}{4} + 2(\ell + \xi)^2 \dot{\theta}^2 \frac{R^2 - \xi^2}{2} + \dot{\theta}^2 \frac{(R^2 - \xi^2)^2}{4} \right] d\xi = \\ &= \frac{m}{2} \left[\ell^2 + \frac{3}{4} \ell R + \frac{2}{5} R^2 \right] \dot{\theta}^2 + \frac{m}{5} R^2 \dot{\psi}^2 \end{aligned}$$

ad ulteriore conferma dei risultati precedenti.

Osservazione. Momento angolare rispetto al polo O

Se si indica con \vec{K}_O il momento angolare rispetto al polo O e con $\vec{K}_G^{(1)}$ il momento angolare del moto attorno al baricentro G , calcolato rispetto al baricentro stesso, vale la relazione generale

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G^{(1)} + (G - O) \wedge m\dot{G}.$$

Nella fattispecie si ha

$$G - O = \left(\ell + \frac{3}{8}R\right) \sin \theta \hat{e}_2 - \left(\ell + \frac{3}{8}R\right) \cos \theta \hat{e}_3$$

$$\dot{G} = \left(\ell + \frac{3}{8}R\right) \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_2 + \left(\ell + \frac{3}{8}R\right) \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_3$$

per cui

$$(G - O) \wedge m\dot{G} = m\left(\ell + \frac{3}{8}R\right)^2 \dot{\theta} \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ 0 & \sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} = m\left(\ell + \frac{3}{8}R\right)^2 \dot{\theta} \hat{e}_1$$

mentre

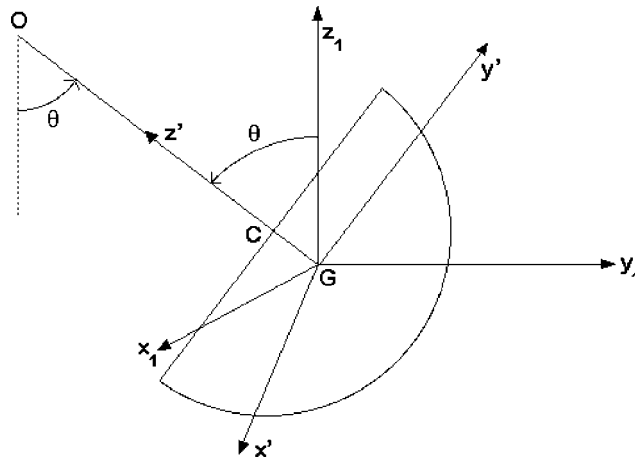
$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \cos \psi \hat{e}'_1 - \dot{\theta} \sin \psi \hat{e}'_2 + \dot{\psi} \hat{e}'_3$$

e

$$\vec{K}_G^{(1)} = \hat{e}'_1 \cdot \vec{K}_G^{(1)} \hat{e}'_1 + \hat{e}'_2 \cdot \vec{K}_G^{(1)} \hat{e}'_2 + \hat{e}'_3 \cdot \vec{K}_G^{(1)} \hat{e}'_3$$

con

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \cdot \vec{K}_G^{(1)} \\ \hat{e}'_2 \cdot \vec{K}_G^{(1)} \\ \hat{e}'_3 \cdot \vec{K}_G^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right)mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right)mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \psi \\ -\dot{\theta} \sin \psi \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}.$$



Di qui si deduce

$$\vec{K}_G^{(1)} = \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right)mR^2 \dot{\theta} (\cos \psi \hat{e}'_1 - \sin \psi \hat{e}'_2) + \frac{2}{5}mR^2 \dot{\psi} \hat{e}'_3 = \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right)mR^2 \dot{\theta} \hat{e}_1 + \frac{2}{5}mR^2 \dot{\psi} \hat{e}'_3$$

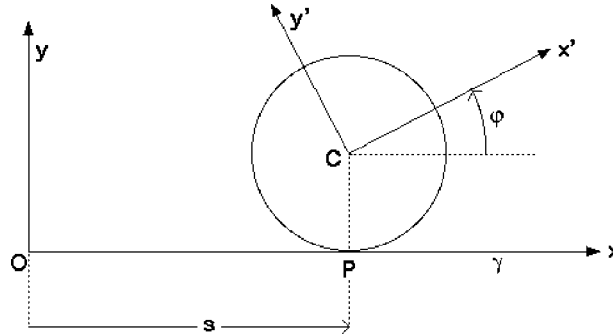
ed infine il risultato richiesto

$$\vec{K}_O = m\left[\left(\ell + \frac{3}{8}R\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64}\right)R^2\right] \dot{\theta} \hat{e}_1 + \frac{2}{5}mR^2 \dot{\psi} \hat{e}'_3,$$

dove $\hat{e}'_3 = \cos \theta \hat{e}_3 - \sin \theta \hat{e}_2$ — vedi figura precedente.

Esercizio 5. Energia cinetica di un disco circolare che rotola su una retta fissa

Si vuole determinare l'energia cinetica di un disco vincolato ad un piano, in moto di rotolamento (con o senza strisciamento) su una retta fissa assegnata. Il disco è circolare ed omogeneo, di massa m e raggio R . Sia C il suo centro. Il disco rotola sulla retta γ , fissa.


Soluzione

Si scelga una terna fissa $Oxyz$ in modo che la retta γ venga a coincidere con l'asse Ox ; sia viceversa $Cx'y'z'$ una terna con origine nel baricentro e solidale al disco rigido. Sia φ l'angolo (crescente per rotazioni antiorarie) compreso fra la direzione positiva dell'asse Ox' e quella di Ox . Si indichi infine con P il punto di contatto, ad un generico istante, fra disco e retta fissa.

Caso del rotolamento con eventuale strisciamento

Per il teorema di König si ha

$$T = \frac{m}{2} |\dot{C}|^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{mR^2}{2} \right) \dot{\varphi}^2,$$

essendo $\dot{\varphi} \hat{e}_3$ la velocità angolare del disco, $mR^2/2$ il momento d'inerzia dello stesso rispetto all'asse Cz' e

$$|\dot{C}|^2 = |(\dot{s}, 0, 0)|^2 = \dot{s}^2.$$

Pertanto

$$T = \frac{m}{2} \dot{s}^2 + \frac{mR^2}{4} \dot{\varphi}^2. \quad (5.1)$$

Caso del rotolamento senza strisciamento

Nel punto di contatto P fra disco e retta γ il punto sul disco e quello sulla retta hanno velocità relativa nulla. In altri termini, poiché tutti i punti di γ sono fissi, il punto P sul disco ha velocità istantanea eguale a zero. Pertanto

$$0 = \dot{P} = \dot{C} + \dot{\varphi} \hat{e}_3 \wedge (P - C) = \dot{s} \hat{e}_1 + \dot{\varphi} \hat{e}_3 \wedge (-R \hat{e}_2) = (\dot{s} + R\dot{\varphi}) \hat{e}_1$$

e quindi $\dot{s} + R\dot{\varphi} = 0$. Quest'ultima relazione implica

$$s + R\varphi = \text{costante} \quad (5.2)$$

il valore della costante dipendendo dalla scelta dei dati iniziali. *Un unico parametro occorre e basta per descrivere il moto del sistema — ad esempio si può scegliere s .* L'energia cinetica si ottiene dalla (5.1) per semplice sostituzione del vincolo (5.2)

$$T = \frac{m}{2}\dot{s}^2 + \frac{mR^2}{4}\dot{\varphi}^2 \Big|_{\dot{\varphi}=-\dot{s}/R} = \frac{m\dot{s}^2}{2} + \frac{m\dot{s}^2}{4} = \frac{3}{4}m\dot{s}^2. \quad (5.3)$$

Osservazione

Allo stesso risultato si perviene notando che il moto rigido è piano e che P costituisce il centro di rotazione istantanea. Dunque:

$$T = \frac{1}{2}I_P\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\frac{I_P}{R^2}\dot{s}^2,$$

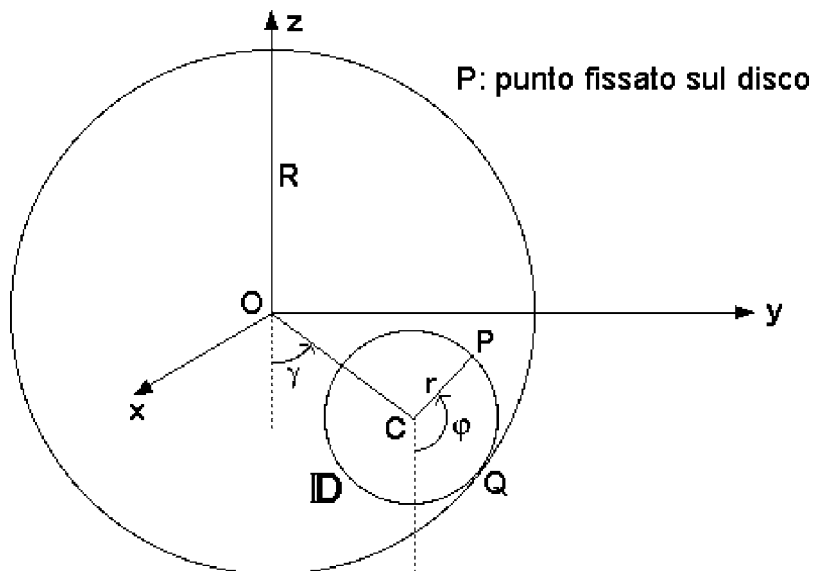
dove I_P è il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse (istanteo di rotazione) Pz :

$$I_P = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Perciò $T = m\dot{s}^2/4$, in accordo con la (5.3).

Esercizio 6. Energia cinetica di un sistema scleronomo a 2 g.d.l. in 2D

In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sia data una guida circolare rigida e fissa, di raggio R e centro O , localizzata nel piano Oyz . Un disco \mathbb{D} , di raggio $r < R$,



massa m e centro C , omogeneo, è vincolato a giacere nel piano della guida ed a rotolare sulla guida stessa (con eventuale strisciamento). Il momento d'inerzia di \mathbb{D} rispetto all'asse Cx vale $mr^2/2$.

Facendo uso degli angoli (orientati) γ e φ mostrati in figura, determinare l'energia cinetica del sistema.

Soluzione

Osservato che C è in effetti il baricentro di \mathbb{D} , il teorema di König porge

$$T = \frac{m}{2} |\dot{C}|^2 + T_{Cx_1y_1z_1}, \quad (6.1)$$

essendo $Cx_1y_1z_1$ una terna di riferimento baricentrale. Il baricentro C ha in $Oxyz$ le coordinate

$$(0, (R-r) \sin \gamma, -(R-r) \cos \gamma)$$

e di conseguenza

$$\dot{C} = (R-r) \cos \gamma \dot{\gamma} \hat{e}_2 + (R-r) \sin \gamma \dot{\gamma} \hat{e}_3 \quad \Longrightarrow \quad |\dot{C}|^2 = (R-r)^2 \dot{\gamma}^2.$$

D'altra parte, rispetto a $Cx_1y_1z_1$ il moto del disco è una rotazione, descritta dall'angolo φ , attorno all'asse fisso Cx_1 . Pertanto

$$T_{Cx_1y_1z_1} = \frac{1}{2} \frac{mr^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{mr^2}{4} \dot{\varphi}^2,$$

dove $\dot{\varphi} \hat{e}_1$ è la velocità angolare istantanea del disco. Sostituendo nella (6.1) si deduce infine

$$T = \frac{m}{2} (R-r)^2 \dot{\gamma}^2 + \frac{mr^2}{4} \dot{\varphi}^2.$$

Qualora il rotolamento di \mathbb{D} sulla guida fissa avvenga senza strisciamento la velocità del punto di contatto Q disco-guida (preso *sul* disco) deve risultare nulla. Quindi

$$0 = \dot{Q} = \dot{C} + \dot{\varphi} \hat{e}_1 \wedge (Q - C) = \dot{\gamma} \hat{e}_1 \wedge (C - O) + \dot{\varphi} \hat{e}_1 \wedge (Q - C).$$

Dal parallelismo dei vettori $Q - C$ e $C - O$ si deduce $Q - C = \frac{r}{R-r} (C - O)$ e di conseguenza

$$0 = \dot{\gamma} \hat{e}_1 \wedge (C - O) + \dot{\varphi} \frac{r}{R-r} \hat{e}_1 \wedge (C - O) = \hat{e}_1 \wedge (C - O) \left(\dot{\gamma} + \dot{\varphi} \frac{r}{R-r} \right).$$

Siccome i vettori \hat{e}_1 e $C - O$ risultano perpendicolari e $C - O \neq 0$, deve aversi necessariamente

$$\dot{\gamma} + \frac{r}{R-r} \dot{\varphi} = 0,$$

ovvero

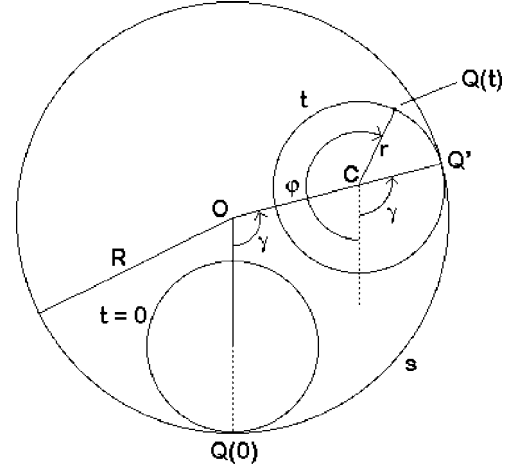
$$\gamma + \frac{r}{R-r} \varphi = \text{costante in } t \quad (6.2)$$

la costante essendo determinata dai valori iniziali di γ e φ . Il risultato ottenuto è suscettibile di una interpretazione geometrica molto semplice.

Sia $Q(0)$ il punto di contatto disco-guida *sul disco* all'istante $t = 0$, e $Q(t)$ la posizione dello *stesso* punto del disco all'istante generico t . Sia infine Q' il punto di contatto disco-guida all'istante t . $s = R\gamma$ è la lunghezza dell'arco di guida percorso dal disco, $Q(0)Q'$. Ma è anche la lunghezza dell'arco $Q'Q(t)$ sul disco

$$s = r(\gamma - \varphi)$$

(si osservi la figura, ricordando che in base alla convenzione assunta è $\varphi < 0$). Pertanto



$$R\gamma = r(\gamma - \varphi) \iff (R - r)\gamma + r\varphi = 0 \iff \gamma + \frac{r}{R - r}\varphi = 0$$

che è una relazione del tipo (6.2). Per l'energia cinetica del disco si ha allora l'espressione

$$T = \frac{m}{2}(R - r)^2 \left(-\frac{r}{R - r}\dot{\varphi} \right)^2 + \frac{mr^2}{4}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{2} + mr^2 \right) \dot{\varphi}^2.$$

Il risultato ammette una interpretazione notevole: poiché il punto Q' *del disco* a contatto con la guida soddisfa la condizione $\dot{Q}' = 0$, Q' è il centro di rotazione istantanea di \mathbb{D} (il cui moto è piano). Dunque

$$T = \frac{1}{2} I_{Q'x} \dot{\varphi}^2,$$

dove $I_{Q'x}$ è il momento di inerzia del disco rispetto all'asse istantaneo di rotazione, vale a dire — per Huygens-Steiner —

$$I_{Q'x} = mr^2 + I_{Gx} = mr^2 + \frac{mr^2}{2}.$$

Esercizio 7. Energia cinetica di un sistema reonomo a 2 g.d.l. in 3D

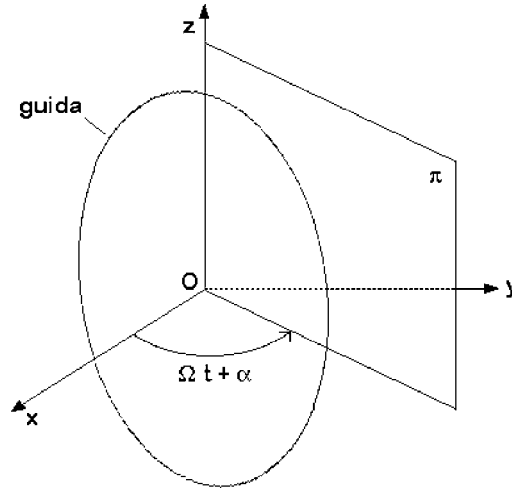
Con riferimento all'esercizio precedente, si assuma che la guida ed il piano π che la contiene ruotino attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\Omega \hat{e}_3$. L'angolo diedro fra π ed Oxz ha ampiezza $\Omega t + \alpha$ all'istante t — dove α dipende dai dati iniziali: ad esempio $\alpha = 0$ se per $t = 0$ il piano π coincide con Oxz . Determinare l'energia cinetica del sistema.

Soluzione

All'istante t il baricentro C del disco avrà in $Oxyz$ le coordinate

$$\left((R - r) \sin \gamma \cos(\Omega t + \alpha), (R - r) \sin \gamma \sin(\Omega t + \alpha), -(R - r) \cos \gamma \right)$$

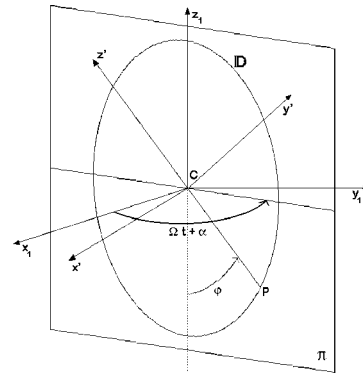
per cui $|\dot{G}|^2 = (R - r)^2 (\dot{\gamma}^2 + \Omega^2 \sin^2 \gamma)$.



Indicata con $Cx_1y_1z_1$ una terna di riferimento baricentrale, con gli assi rispettivamente paralleli a quelli di $Oxyz$, si procede al calcolo dell'energia cinetica $T_{Cx_1y_1z_1}$ per il moto attorno al baricentro.

La terna solidale $Cx'y'z'$ è scelta in modo che Cx' sia perpendicolare a π , mentre Cy' e Cz' giacciono su tale piano e sono fra loro ortogonali (ad esempio sia Cz' prolungamento di $C - P$, come illustrato in figura). La terna Cy' e Cz' è chiaramente centrale, con matrice d'inerzia:

$$[L'] = \begin{pmatrix} mr^2/2 & 0 & 0 \\ 0 & mr^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & mr^2/4 \end{pmatrix},$$



in cui i momenti centrali $L'_{yy} = L'_{zz} = mr^2/4$ si ricavano ricordando che $L'_{yy} + L'_{yy} = L'_{xx}$. La velocità angolare del disco è $\vec{\omega} = \Omega \hat{e}_3 + \dot{\varphi} \hat{e}'_1$, con $\hat{e}_3 = \cos \varphi \hat{e}'_3 + \sin \varphi \hat{e}'_2$. Dunque

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{e}'_1 + \Omega \sin \varphi \hat{e}'_2 + \Omega \cos \varphi \hat{e}'_3$$

e

$$\begin{aligned} T_{Cx_1y_1z_1} &= \frac{1}{2} (\dot{\varphi} \quad \sin \varphi \Omega \quad \cos \varphi \Omega) \frac{mr^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \sin \varphi \Omega \\ \cos \varphi \Omega \end{pmatrix} = \\ &= \frac{mr^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2}{8} \Omega^2. \end{aligned}$$

Applicando König si ottiene infine

$$T = \frac{m}{2} (R - r)^2 (\dot{\gamma}^2 + \Omega^2 \sin^2 \gamma) + \frac{mr^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{mr^2}{8} \Omega^2.$$

Se il rotolamento del disco \mathbb{D} sulla guida avviene senza strisciamento, vale ancora $\dot{\gamma} = -\dot{\varphi}r/(R-r)$, per cui si avrà

$$T = \frac{m}{2}(R-r)^2(\dot{\gamma}^2 + \Omega^2 \sin^2 \gamma) + \frac{m}{4}(R-r)^2\dot{\gamma}^2 + \frac{mr^2}{8}\Omega^2$$

— è certamente più comodo utilizzare γ in luogo di φ come parametro lagrangiano.

Esercizio 8. Dinamica relativa in un sistema di riferimento rotante con velocità angolare costante — rispetto ad una terna galileiana assegnata —

Si procede preliminarmente a determinare le sollecitazioni fittizie, o d'inerzia, agenti nel sistema di riferimento rotante, non inerziale.

Si considera una terna di riferimento inerziale $Ox_1x_2x_3$ come terna fissa ed un secondo sistema di riferimento $O'x'_1x'_2x'_3$, in moto arbitrario rispetto alla prima. Per un generico punto P si pone inoltre $P-O = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{e}_i$ e $P-O' = \sum_{i=1}^3 x'_i \hat{e}'_i$. In generale vale

$$\sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \hat{e}_i = \ddot{O}' + \sum_{i=1}^3 x'_i \frac{d^2 \hat{e}'_i}{dt^2} + \sum_{i=1}^3 \ddot{x}'_i \hat{e}'_i + 2 \sum_{i=1}^3 \dot{x}'_i \frac{d \hat{e}'_i}{dt}.$$

Nella fattispecie si assume $O' = O$, costante, ed $\vec{\omega} = \Omega \hat{e}_3$, Ω costante. Perciò

$$\ddot{O}' = 0 \quad \frac{d \hat{e}'_i}{dt} = \Omega \hat{e}_3 \wedge \hat{e}'_i$$

$$\frac{d^2 \hat{e}'_i}{dt^2} = \frac{d}{dt} (\Omega \hat{e}_3 \wedge \hat{e}'_i) = \Omega^2 \hat{e}_3 \wedge (\hat{e}_3 \wedge \hat{e}'_i) = \Omega^2 [\hat{e}_3 (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_i) - \hat{e}'_i]$$

e di conseguenza, introducendo per brevità la convenzione di somma sugli indici ripetuti,

$$\vec{F} = m \ddot{x}_i \hat{e}_i = m \Omega^2 [\hat{e}_3 (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_i x'_i) - \hat{e}'_i x'_i] + m \ddot{x}'_i \hat{e}'_i + 2 \Omega m \hat{e}_3 \wedge \dot{x}'_i \hat{e}'_i.$$

L'equazione della dinamica relativa diviene

$$m \ddot{x}'_i \hat{e}'_i = \vec{F} - 2m \Omega \hat{e}_3 \wedge (\dot{x}'_i \hat{e}'_i) + m \Omega^2 [\hat{e}'_i x'_i - \hat{e}_3 (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_i x'_i)],$$

dove \vec{F} è il risultante delle forze reali, $-2m \Omega \hat{e}_3 \wedge (\dot{x}'_i \hat{e}'_i)$ è la forza di Coriolis e $+m \Omega^2 [\hat{e}'_i x'_i - \hat{e}_3 (\hat{e}_3 \cdot \hat{e}'_i x'_i)]$ la forza centrifuga. Indicata con \vec{v}_r la velocità relativa $\dot{x}'_i \hat{e}'_i$, si verifica immediatamente che la forza di Coriolis ha potenza nulla

$$-2m \Omega \hat{e}_3 \wedge \vec{v}_r \cdot \vec{v}_r = 0$$

nel riferimento relativo $Ox'_1x'_2x'_3$. La forza centrifuga \vec{F}_{cf} è conservativa. Infatti

$$\vec{F}_{cf} \cdot d\vec{x}' = m \Omega^2 [\vec{x}' \cdot d\vec{x}' - (\hat{e}_3 \cdot d\vec{x}') (\hat{e}_3 \cdot \vec{x}')] = \frac{m \Omega^2}{2} d[|\vec{x}'|^2 - (\hat{e}_3 \cdot \vec{x}')^2]$$

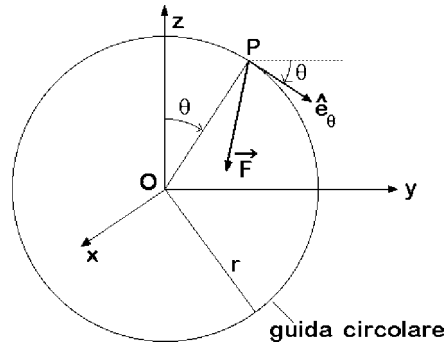
per cui la forma differenziale del lavoro è esatta. Il potenziale corrispondente si scrive

$$U_{cf} = \frac{m\Omega^2}{2} [|\vec{x}'|^2 - (\hat{e}_3 \cdot \vec{x}')^2].$$

Primo esempio

Moto di un punto materiale vincolato ad una guida circolare rigida e liscia, di raggio r e centro O , rotante attorno all'asse Oz con velocità angolare costante $\Omega \hat{e}_3$. La terna $Oxyz$ si assume inerziale, mentre il punto materiale ha massa m ed è soggetto ad una forza \vec{F} — dipendente dalla posizione P del punto, dalla velocità \dot{P} e dal tempo t .

La posizione di P viene determinata per mezzo del parametro angolare $\theta(t)$ mostrato in figura. L'equazione parametrica della guida si scrive, nella terna inerziale $Oxyz$,



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos(\Omega t) \\ y = r \sin \theta \sin(\Omega t) \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

ed il versore tangente nella posizione θ all'istante t vale

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \left| \frac{\partial \vec{x}}{\partial \theta} \right|^{-1} = \cos \theta \cos(\Omega t) \hat{e}_1 + \cos \theta \sin(\Omega t) \hat{e}_2 - \sin \theta \hat{e}_3.$$

La legge oraria del moto sarà infine del tipo

$$\begin{cases} x_P(t) = r \sin \theta \cos(\Omega t) \\ y_P(t) = r \sin \theta \sin(\Omega t) \\ z_P(t) = r \cos \theta \end{cases}$$

con $\theta = \theta(t)$ opportuna. L'equazione della dinamica è

$$m\ddot{P} = \vec{F} + \vec{\Psi}. \tag{8.1}$$

La reazione vincolare $\vec{\Psi}$ deve intendersi normale alla guida per ogni t fissato, per cui $\vec{\Psi} \cdot \hat{e}_\theta = 0$ e la (8.1) diventa

$$m\ddot{P} \cdot \hat{e}_\theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta.$$

Si hanno le relazioni:

$$\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial P}{\partial t} = r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + \frac{\partial P}{\partial t} \quad \ddot{P} = r \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d}{dt} \hat{e}_\theta + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

$$m\ddot{P} \cdot \hat{e}_\theta = mr \ddot{\theta} + m \hat{e}_\theta \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right)$$

dove

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -r\Omega \sin \theta \sin(\Omega t) \hat{e}_1 + r\Omega \sin \theta \cos(\Omega t) \hat{e}_2$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) &= [-r\Omega \cos \theta \dot{\theta} \sin(\Omega t) - r\Omega^2 \sin \theta \cos(\Omega t)] \hat{e}_1 \\ &+ [r\Omega \cos \theta \dot{\theta} \cos(\Omega t) - r\Omega^2 \sin \theta \sin(\Omega t)] \hat{e}_2 \end{aligned}$$

sicché

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) &= -r\Omega \dot{\theta} \cos^2 \theta \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) - r\Omega^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2(\Omega t) + \\ &+ r\Omega \cos^2 \theta \dot{\theta} \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) - r\Omega^2 \sin \theta \cos \theta \sin^2(\Omega t) = -r\Omega^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

In conclusione si perviene all'equazione del moto

$$mr\ddot{\theta} - mr\Omega^2 \sin \theta \cos \theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta.$$

È immediato verificare il risultato ottenuto mediante le equazioni di Lagrange. L'energia cinetica T del sistema si scrive infatti

$$T = \frac{m}{2} |\dot{P}|^2 = \frac{m}{2} (r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta)$$

mentre per l'unica componente lagrangiana della sollecitazione attiva \vec{F} vale l'espressione

$$Q_\theta = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = \vec{F} \cdot r \hat{e}_\theta = r \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta.$$

Si ha così l'equazione lagrangiana

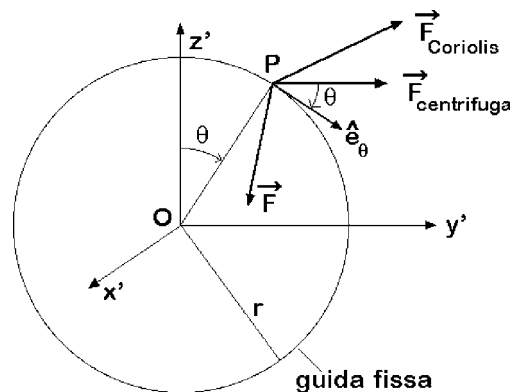
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta = r \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta$$

e quindi, come richiesto,

$$mr\ddot{\theta} - mr\Omega^2 \sin \theta \cos \theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta.$$

Secondo esempio

Come ulteriore esempio si risolve ora lo stesso problema nel sistema di riferimento di origine O co-rotante con la guida circolare, come mostrato nella figura seguente



L'equazione parametrica della guida si può scrivere, identificando il piano della guida con $Oy'z'$

$$x' = 0 \quad y' = r \sin \theta \quad z' = r \cos \theta$$

ed il versore tangente in un generico punto $P(0, r \sin \theta, r \cos \theta)$ della guida diviene

$$\hat{e}_\theta = \frac{\partial P}{\partial \theta} \left| \frac{\partial P}{\partial \theta} \right|^{-1} = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = (0, \cos \theta, -\sin \theta).$$

La legge oraria del moto si otterrà determinando la funzione $\theta = \theta(t)$. L'equazione del moto, nel riferimento prescelto, è

$$m\ddot{P} = \vec{F} + \vec{\Psi} + \vec{F}_{Coriolis} + \vec{F}_{cf}$$

e valgono inoltre le ovvie relazioni

$$\ddot{P} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P}{\partial \theta} \dot{\theta} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{\theta} r \hat{e}_\theta) = \ddot{\theta} r \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \quad \vec{F}_{cf} = m\Omega^2 r \sin \theta \hat{e}'_2$$

$$\vec{F}_{Coriolis} = -2m\Omega \hat{e}_3 \wedge \dot{P} = -2m\Omega r \dot{\theta} \hat{e}_3 \wedge \hat{e}_\theta \quad \vec{\Psi} \cdot \hat{e}_\theta = 0 \quad (\text{la guida è liscia}).$$

Perciò

$$m\ddot{P} \cdot \hat{e}_\theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta + \vec{\Psi} \cdot \hat{e}_\theta + \vec{F}_{Coriolis} \cdot \hat{e}_\theta + \vec{F}_{cf} \cdot \hat{e}_\theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta + \vec{F}_{cf} \cdot \hat{e}_\theta$$

e siccome $\ddot{P} \cdot \hat{e}_\theta = \ddot{\theta} r \hat{e}_\theta \cdot \hat{e}_\theta + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \cdot \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = r\ddot{\theta}$, si conclude che

$$mr\ddot{\theta} = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta + \vec{F}_{cf} \cdot \hat{e}_\theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta + m\Omega^2 r \sin \theta \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_\theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta + m\Omega^2 r \sin \theta \cos \theta.$$

In definitiva

$$mr\ddot{\theta} - m\Omega^2 r \sin \theta \cos \theta = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta, \quad (8.2)$$

che coincide con l'equazione del moto già scritta in $Oxyz$.

Osservazione

Dalla (8.2) si deduce, moltiplicando membro a membro per $r\dot{\theta}$

$$mr^2\ddot{\theta}\dot{\theta} - m\Omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} = \vec{F} \cdot \hat{e}_\theta r\dot{\theta} \iff \frac{d}{dt} \left[\frac{mr^2}{2} \dot{\theta}^2 - m\Omega^2 \frac{r^2}{2} \sin^2 \theta \right] = \vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \dot{\theta}$$

Se \vec{F} è posizionale, $\vec{F} = \vec{F}(P)$, si può scrivere

$$\vec{F} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \dot{\theta} = \vec{F}(P) \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \int_0^\theta \vec{F}[P(\theta)] \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta$$

per cui

$$\frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\Omega^2\frac{r^2}{2}\sin^2\theta - \int_0^\theta \vec{F}[P(\theta)] \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta = E,$$

costante lungo la soluzione. La funzione

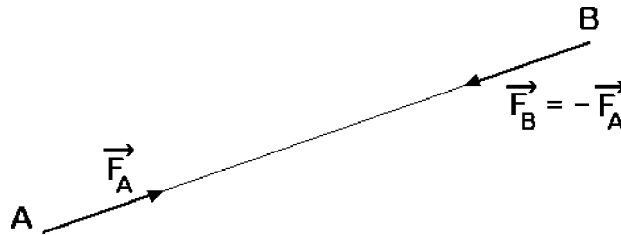
$$H(\theta, \dot{\theta}) = \frac{mr^2}{2}\dot{\theta}^2 - m\Omega^2\frac{r^2}{2}\sin^2\theta - \int_0^\theta \vec{F}[P(\theta)] \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta$$

rappresenta un integrale primo del moto e può identificarsi con l'hamiltoniana del sistema. In particolare:

- $-m\Omega^2\frac{r^2}{2}\sin^2\theta$ è l'energia potenziale centrifuga e
- $-\int_0^\theta \vec{F}[P(\theta)] \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} d\theta$ quella della \vec{F} lungo la guida.

Esercizio 9. Esempi vari di sollecitazioni attive, calcolo delle relative componenti lagrangiane e degli eventuali potenziali

Caso 1. Forza agente fra due punti del sistema — forza interna — e dipendente dalla sola distanza.



Le forze \vec{F}_A ed \vec{F}_B sono dirette lungo la congiungente $A - B$ e sono del tipo:

$$\vec{F}_A = \frac{A - B}{|A - B|} f(|A - B|) \quad \forall |A - B| > 0$$

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_A \quad \text{— principio di azione e reazione —},$$

dove si è indicata con $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata, ed A, B si intendono espressi in termini dei parametri lagrangiani q_1, \dots, q_n . Si calcolano le componenti lagrangiane Q_h , $h = 1, 2, \dots, n$, della sollecitazione. Per definizione

$$\begin{aligned} Q_h &= \vec{F}_A \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial B}{\partial q_h} = \vec{F}_A \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial q_h} - \frac{\partial B}{\partial q_h} \right) = \\ &= \frac{A - B}{|A - B|} \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (A - B) f(|A - B|) = \frac{\partial}{\partial q_h} |A - B| f(|A - B|). \end{aligned}$$

Sia ora \mathcal{U} una primitiva di f in \mathbb{R}^+ , tale che $\mathcal{U}'(x) = f(x) \forall x > 0$. In tal caso si avrà

$$Q_h = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_h}(|A - B|)$$

e per ogni $|A - B| > 0$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_A}(|A - B|) = \mathcal{U}'(|A - B|) \frac{A - B}{|A - B|} = f(|A - B|) \frac{A - B}{|A - B|} = \vec{F}_A$$

cosicché $U = \mathcal{U}(|A - B|)$ costituisce il potenziale dell'interazione.

Esempio. Forza elastica

Sia $\vec{F}_A = -k(A - B)$ ed $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ con $k > 0$, costante — la forza è dunque attrattiva. Si ha allora, come prima

$$Q_h = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h} + \vec{F}_B \cdot \frac{\partial B}{\partial q_h} = -k(A - B) \cdot \frac{\partial}{\partial q_h}(A - B) = -k \frac{\partial}{\partial q_h} \left[\frac{|A - B|^2}{2} \right]$$

e quindi

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mathcal{U}(|A - B|) = -\frac{k}{2}|A - B|^2$$

è il potenziale elastico corrispondente.

Caso 2. Forza agente su un punto del sistema e dovuta ad un campo esterno conservativo

La forza in un generico punto $x \in \mathbb{R}^3$ si scrive

$$\vec{F}(x) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x)$$

con $\mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 . In particolare, se x_A è il vettore posizione del punto A su cui agisce il campo esterno, la forza applicata in A risulterà

$$\vec{F}_A = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x_A).$$

Le componenti lagrangiane della sollecitazione valgono

$$Q_h = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial x_A}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x_A) \frac{\partial x_A}{\partial q_h}(q) = \frac{\partial}{\partial q_h} \mathcal{U}[x_A(q)],$$

dove $x_A(q)$ è il vettore posizione di A espresso in termini dei parametri lagrangiani q_1, q_2, \dots, q_n . Il potenziale della sollecitazione risulta pertanto

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \mathcal{U}[x_A(q)].$$

Caso 3. Forza peso — sistemi “pesanti” —

Per un sistema discreto di punti $P_i(q_1, \dots, q_n)$ di massa $m_i, i = 1, 2, \dots, N$, le componenti lagrangiane delle forze peso sono date da

$$Q_h = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \vec{g} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial}{\partial q_h} (P_i - O) = \vec{g} \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) =$$

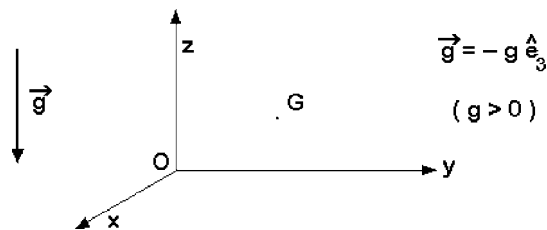
$$= m \vec{g} \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \right] = m \vec{g} \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (G - O) = \frac{\partial}{\partial q_h} [m \vec{g} \cdot (G - O)],$$

dove $G = G(q_1, q_2, \dots, q_n)$ è il baricentro del sistema espresso in funzione dei parametri lagrangiani. Il potenziale gravitazionale risulta così

$$U(q_1, q_2, \dots, q_n) = m \vec{g} \cdot (G - O).$$

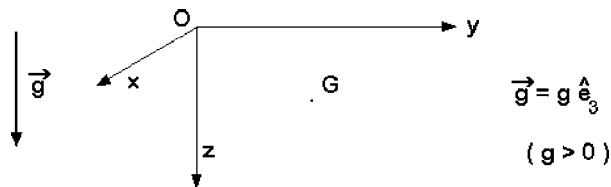
Lo stesso risultato si estende anche al caso di un mezzo continuo — ad un sistema rigido continuo, in particolare. Conviene esaminare la forma assunta dall’espressione generale del potenziale gravitazionale per le scelte usuali della terna riferimento. Si considerano due casi notevoli, i soli che di regola ricorrono.

- (a) Se l’asse coordinato Oz è antiparallelo al vettore \vec{g} di accelerazione gravitazionale — ossia parallelo ma opposto in verso —



si ha la relazione $U = m(-g\hat{e}_3) \cdot (G - O) = -mgz_G$, indicandosi con z_G la quota di G nel riferimento prescelto.

- (b) Qualora viceversa l’asse Oz sia parallelo a \vec{g}



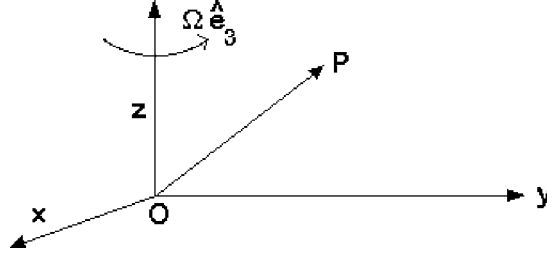
si ottiene $U = m(g\hat{e}_3) \cdot (G - O) = mgz_G$.

Da notare il cambiamento di segno dell’una espressione rispetto all’altra!!

Caso 4. Forza centrifuga

Ci si limita a considerare la sollecitazione centrifuga agente in una terna di riferimento posta in rotazione uniforme con velocità angolare $\Omega \hat{e}_3$ attorno all'asse Oz , rispetto ad una seconda terna che si suppone inerziale. Si distinguono il caso in cui la sollecitazione agisca su un singolo punto materiale e quello in cui ad essere sollecitato sia un sistema di punti — discreto o continuo.

- (a) Per un punto vincolato P , di massa m , la cui posizione sia espressa in termini dei parametri lagrangiani q_h , $h = 1, \dots, n$, e soggetto alla forza centrifuga \vec{F}_P ,



si ha $\vec{F}_P = m\Omega^2[P - O - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \cdot (P - O)]$ e quindi

$$\begin{aligned} Q_h &= \vec{F}_P \cdot \frac{\partial P}{\partial q_h} = m\Omega^2 [P - O - \hat{e}_3 \hat{e}_3 \cdot (P - O)] \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (P - O) = \\ &= m\Omega^2 \left[(P - O) \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (P - O) - \hat{e}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (P - O) \hat{e}_3 \cdot (P - O) \right] = \\ &= \frac{m\Omega^2}{2} \frac{\partial}{\partial q_h} \left[|P - O|^2 - [\hat{e}_3 \cdot (P - O)]^2 \right]. \end{aligned}$$

Il potenziale centrifugo vale dunque $U(q_1, \dots, q_n) = \frac{m\Omega^2}{2} r^2$, essendo $r^2 = |P - O|^2 - [\hat{e}_3 \cdot (P - O)]^2$ il quadrato della distanza di P dall'asse Oz .

- (b) Per un sistema discreto di punti materiali P_i di masse m_i , poiché la sollecitazione agente su ciascun punto risulta indipendente da quelle applicate ad ogni altro, si avrà un potenziale centrifugo totale dato dalla somma dei potenziali di tutti i punti

$$U(q_1, \dots, q_n) = \frac{\Omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left[|P_i - O|^2 - [\hat{e}_3 \cdot (P_i - O)]^2 \right].$$

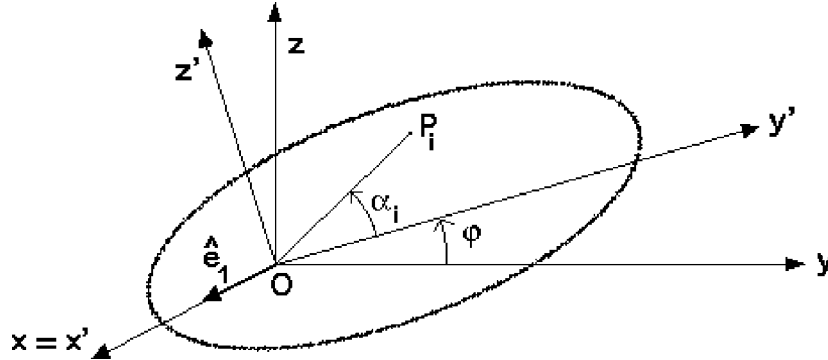
In particolare, se il sistema è rigido si perviene alla relazione:

$$U(q_1, \dots, q_n) = \frac{\Omega^2}{2} \hat{e}_3 \cdot L_O \hat{e}_3,$$

dove $\hat{e}_3 \cdot L_O \hat{e}_3$ è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione — tale momento d'inerzia dipende da q_1, \dots, q_n . La medesima espressione si estende agevolmente ad un sistema rigido continuo.

Caso 5. Corpo rigido con un asse fisso — non scorrevole —

Si scelgano la terna fissa $Oxyz$ e quella solidale $Ox'y'z'$ in modo che gli assi coordinati Ox ed Ox' vengano a coincidere con l'asse di rotazione, come mostrato in figura



Il generico punto P_i del corpo (nell'approssimazione discreta) è individuato in $Oxyz$ dal vettore

$$P_i - O = (P_i - O) \cdot \hat{e}_1 \hat{e}_1 + d(P_i, Ox) \cos(\alpha_i + \varphi) \hat{e}_2 + d(P_i, Ox) \sin(\alpha_i + \varphi) \hat{e}_3,$$

dove $(P_i - O) \cdot \hat{e}_1$ è costante, $d(P_i, Ox)$ è la distanza costante di P_i dall'asse Ox ed α_i è l'angolo, costante nella terna $Ox'y'z'$, che la proiezione ortogonale di $P_i - O$ su $Oy'z'$ forma con il semiasse positivo Oy' . Pertanto

$$\frac{\partial P_i}{\partial \varphi} = -d(P_i, Ox) \sin(\alpha_i + \varphi) \hat{e}_2 + d(P_i, Ox) \cos(\alpha_i + \varphi) \hat{e}_3 = \hat{e}_1 \wedge (P_i - O).$$

L'unica componente lagrangiana delle sollecitazioni agenti sul corpo è allora

$$Q_\varphi = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \hat{e}_1 \wedge (P_i - O) = \hat{e}_1 \cdot \sum_{i=1}^N (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O.$$

Si è indicato con \vec{M}_O il momento risultante delle forze attive agenti sul corpo, calcolato rispetto al polo O , mentre $\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O$ rappresenta la componente lungo l'asse Ox di \vec{M}_O .

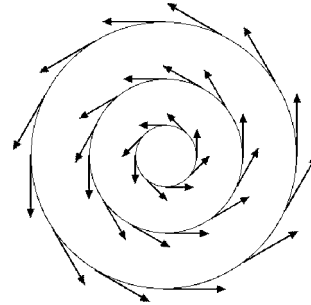
Si osservi che l'angolo φ e l'asse Ox sono orientati reciprocamente secondo la regola della mano destra; in caso contrario il risultato differirebbe da quello indicato per un semplice cambiamento di segno.

Qualora si assuma l'ipotesi addizionale che $\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O$ sia funzione del solo angolo di rotazione φ , si ha

$$Q_\varphi = \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O(\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \varphi}(\varphi),$$

con $U(\varphi) = \int \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O(\varphi) d\varphi$ potenziale del sistema. Lo stesso risultato si estende anche al caso continuo.

Si osservi che se le forze agenti sul corpo rigido derivano da un campo posizionale, l'ipotesi $\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O = \hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O(\varphi)$ è certamente verificata. Tuttavia il campo posizionale può non essere conservativo. Un esempio è descritto qualitativamente dalla figura a lato.



Esempio notevole. Pendolo di torsione

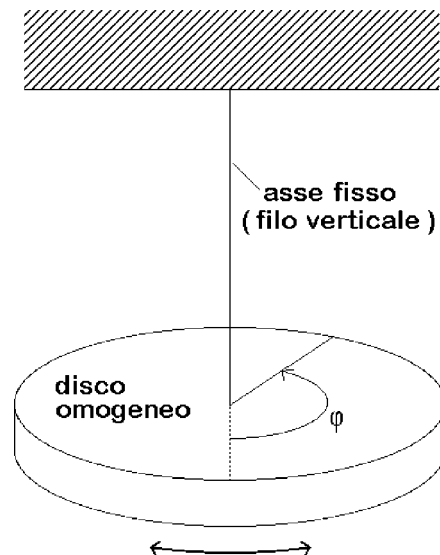
Si supponga che la componente lungo l'asse di rotazione del momento sia della forma

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{M}_O(\varphi) = -k\varphi$$

con k costante positiva fissata. Vale $Q_\varphi = -k\varphi$ e quindi l'espressione del potenziale risulta

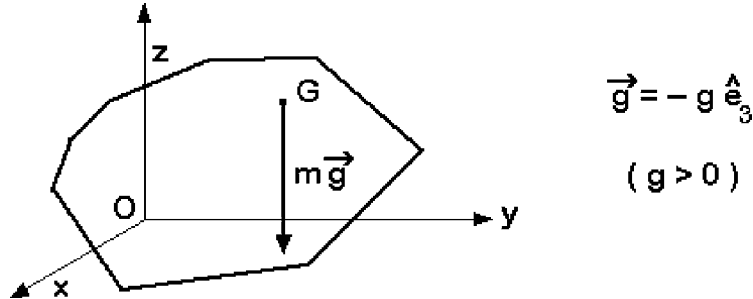
$$U(\varphi) = -\frac{k}{2}\varphi^2.$$

L'interpretazione fisica dell'esempio considerato è immediata. Al corpo rigido si può pensare applicato un sistema di forze capace di produrre un momento di richiamo direttamente proporzionale all'angolo di rotazione, misurato rispetto ad una posizione fissa di riposo. Possiamo parlare, senza perdere in generalità, di una coppia di richiamo elastica agente lungo l'asse. La situazione tipica è quella del pendolo di torsione, costituito da un disco omogeneo pesante sospeso per il proprio centro mediante un filo sottile, perfettamente elastico, e rappresentato schematicamente in figura.



Altro esempio. Pendolo fisico

Si supponga che il sistema rigido abbia massa m e sia soggetto ad un campo gravitazionale uniforme diretto antiparallelamente all'asse Oz (verticale), in modo che il baricentro G non giaccia lungo l'asse di rotazione Ox



Vale in queste ipotesi, facendo uso delle notazioni precedenti:

$$G - O = \hat{e}_1 \cdot (G - O) \hat{e}_1 + d(G, Ox) \cos(\gamma + \varphi) \hat{e}_2 + d(G, Ox) \sin(\gamma + \varphi) \hat{e}_3$$

con $\hat{e}_1 \cdot (G - O)$, $d(G, Ox)$ e γ costanti. Il sistema delle forze peso (forze parallele per ipotesi) è equivalente ad un'unica forza applicata in G , pari a $-mg \hat{e}_3$. Perciò:

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge (-mg \hat{e}_3) = -mg d(G, Ox) \cos(\gamma + \varphi) \hat{e}_1 + mg \hat{e}_1 \cdot (G - O) \hat{e}_2$$

ovvero

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_1 = -mg d(G, Ox) \cos(\gamma + \varphi),$$

che dipende soltanto dall'angolo φ . In conclusione:

$$U(\varphi) = -mg d(G, Ox) \sin(\gamma + \varphi),$$

funzione periodica dell'angolo φ — le forze attive agenti derivano da un campo posizionale *conservativo*, per cui non può che aversi periodicità in φ .

Caso 6. Forza viscosa — o di resistenza viscosa —

Si tratta di una sollecitazione del tipo

$$\vec{F} = -\beta \dot{\vec{x}},$$

con β costante positiva assegnata e $\vec{x} = \vec{x}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ vettore posizione del punto di applicazione. Le componenti lagrangiane della sollecitazione sono

$$Q_h = \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} = -\beta \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} = -\beta \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} = -\beta \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \dot{q}_k$$

e non ammettono potenziale — non sono neppure posizionali.

Osservazione

Si consideri la funzione — di Rayleigh: $R = -\frac{\beta}{2}|\dot{\vec{x}}|^2 = -\frac{\beta}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k$. Si ha

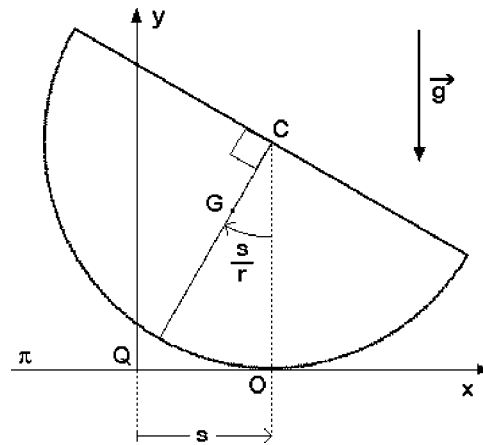
$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_h} &= -\frac{\beta}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} (\delta_{ih} \dot{q}_k + \dot{q}_i \delta_{kh}) = \\ &= -\frac{\beta}{2} \left[\sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \dot{q}_i \right] = -\beta \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial q_k} \dot{q}_k = Q_h \end{aligned}$$

che fornisce così un semplice metodo per ottenere le componenti Q_h , $h = 1, 2, \dots, n$ — particolarmente utile quando il numero n dei gradi di libertà è grande.

Esercizio 10. Equazioni del moto di un sistema scleronomo a 1 g.d.l.

Si considera una semisfera omogenea, di massa m e raggio r , appoggiata su un piano orizzontale π . La sfera è pesante, di centro C , ed è vincolata a muoversi di moto piano rotolando sul piano π , senza strisciare.

Si determinino le equazioni del moto del sistema, assumendo come parametro lagrangiano l'ascissa s del punto di contatto O fra semisfera e piano π , secondo il riferimento cartesiano Qxy mostrato in figura ($-\pi r/2 < s < \pi r/2$). I vincoli siano considerati ideali.



Soluzione

Si risolve il problema utilizzando due diversi metodi, il primo basato sull'equazione cardinale del momento angolare, il secondo sulle equazioni di Lagrange.

Primo metodo — equazione cardinale del momento angolare —

Indicato con G il baricentro della semisfera e ricordato che $|G - C| = 3r/8$, si ha

$$C - Q = s \hat{e}_1 + r \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad G - C = \frac{3}{8}r \left[-\sin(s/r) \hat{e}_1 - \cos(s/r) \hat{e}_2 \right]$$

per cui

$$G - Q = \left[s - \frac{3}{8}r \sin(s/r) \right] \hat{e}_1 + \left[r - \frac{3}{8}r \cos(s/r) \right] \hat{e}_2$$

mentre per il punto di contatto O semisfera-piano vale $O - Q = s \hat{e}_1$.

Assumendo come polo il punto mobile O , l'equazione cardinale del momento si scrive

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_O = \vec{M}_O - m\dot{O} \wedge \dot{G}.$$

Poiché

$$G - O = -\frac{3}{8}r \sin(s/r) \hat{e}_1 + \left[r - \frac{3}{8}r \cos(s/r) \right] \hat{e}_2 \quad \text{e} \quad \vec{F}_{peso} = -mg \hat{e}_2,$$

si deduce immediatamente che — le reazioni vincolari sono applicate in O :

$$\vec{M}_O = (G - O) \wedge \vec{F}_{peso} = -\frac{3}{8}r \sin(s/r) \hat{e}_1 \wedge (-mg \hat{e}_2) = \frac{3}{8}mgr \sin(s/r) \hat{e}_3.$$

D'altra parte la velocità angolare del corpo assume la forma, ricordando la convenzione sinistrorsa

$$\vec{\omega} = -\dot{s}/r \hat{e}_3$$

(nella fattispecie s/r è crescente per rotazioni *orarie*, come la figura evidenzia, il che giustifica il segno negativo dell'espressione) per cui il momento angolare vale

$$\vec{K}_O = L_O \left(-\frac{\dot{s}}{r} \hat{e}_3 \right) = -\frac{\dot{s}}{r} (I_{Gz} + m|G - O|^2) \hat{e}_3 = -\frac{\dot{s}}{r} \left[I_{Gz} + mr^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right) \right] \hat{e}_3,$$

dove I_{Gz} è il momento d'inerzia della semisfera rispetto ad un asse parallelo a Qz e passante per G . Infine

$$\dot{O} = \dot{s} \hat{e}_1 \quad \dot{G} = \left[\dot{s} - \frac{3}{8}\dot{s} \cos(s/r) \right] \hat{e}_1 + \frac{3}{8} \sin(s/r) \dot{s} \hat{e}_2$$

cosicché

$$-m\dot{O} \wedge \dot{G} = -\frac{3}{8}m \sin(s/r) \dot{s}^2 \hat{e}_3.$$

L'equazione del momento diventa dunque

$$\frac{d}{dt} \left\{ -\frac{\dot{s}}{r} \left[I_{Gz} + mr^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right) \right] \hat{e}_3 \right\} = \frac{3}{8}mgr \sin(s/r) \hat{e}_3 - \frac{3}{8}m \sin(s/r) \dot{s}^2 \hat{e}_3,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\dot{s}}{r^2} \left[I_{Gz} + mr^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right) \right] \right\} = -\frac{3}{8}mg \sin(s/r) + \frac{3}{8}m \sin(s/r) \frac{\dot{s}^2}{r}. \quad (10.1)$$

Secondo metodo — equazioni di Lagrange —

L'energia cinetica del sistema si scrive facendo uso del teorema di König

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} |\dot{G}|^2 + \frac{1}{2} I_{Gz} \frac{\dot{s}^2}{r^2} = \frac{m}{2} \left[\left(\dot{s} - \frac{3}{8} \cos(s/r) \dot{s} \right)^2 + \frac{9}{64} \sin^2(s/r) \dot{s}^2 \right] + \frac{1}{2} I_{Gz} \frac{\dot{s}^2}{r^2} = \\ &= \frac{m}{2} \dot{s}^2 \left[\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right] + \frac{1}{2} I_{Gz} \frac{\dot{s}^2}{r^2}, \end{aligned}$$

mentre il potenziale — della sola forza peso — risulta

$$U(s) = -mg \left[r - \frac{3}{8} r \cos(s/r) \right].$$

Pertanto, omettendo una costante additiva inessenziale, la lagrangiana del sistema diventa

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{s}^2}{2r^2} \left[I_{Gz} + mr^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right) \right] + \frac{3}{8} mgr \cos(s/r)$$

e di conseguenza

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\dot{s}}{r^2} \left[I_{Gz} + mr^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right) \right] \right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = \frac{\dot{s}^2}{2r^2} mr^2 \frac{3}{4} \sin(s/r) \frac{1}{r} - \frac{3}{8} mg \sin(s/r) = \frac{3}{8} m \frac{\dot{s}^2}{r} \sin(s/r) - \frac{3}{8} mg \sin(s/r).$$

In conclusione l'equazione del moto risulta

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\dot{s}}{r^2} \left[I_{Gz} + mr^2 \left(\frac{73}{64} - \frac{3}{4} \cos(s/r) \right) \right] \right\} = -\frac{3}{8} mg \sin(s/r) + \frac{3}{8} m \sin(s/r) \frac{\dot{s}^2}{r}.$$

e coincide con la (10.1).

Osservazione. Calcolo di I_{Gz}

Come per una sfera completa di massa m vale

$$I_{Cz} = \frac{2}{5} mr^2.$$

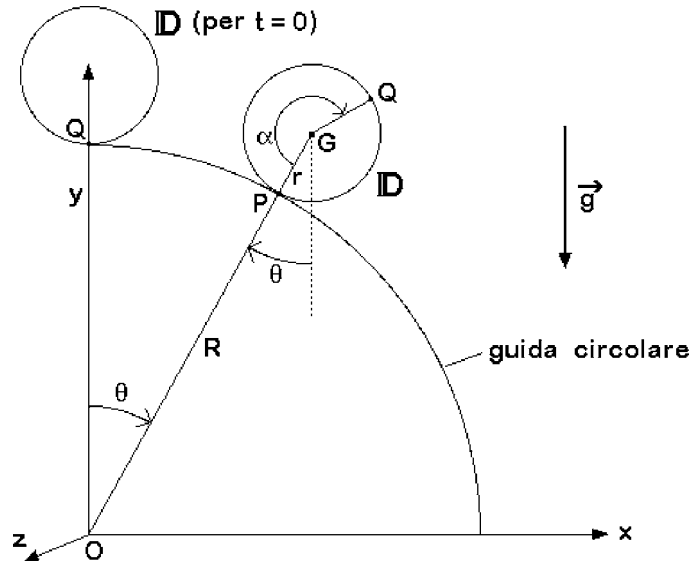
Poiché $|G - C| = 3/8r$ si ha allora per Huygens-Steiner

$$I_{Gz} = I_{Cz} - m \left(\frac{3}{8} r \right)^2 = \frac{2}{5} mr^2 - mr^2 \frac{9}{64} = \left(\frac{2}{5} - \frac{9}{64} \right) mr^2 = \frac{83}{320} mr^2.$$

Esercizio 11. Equazioni del moto di un sistema scleronomo a 1 g.d.l.

Nel piano verticale Oxy è dato un disco rigido omogeneo \mathbb{D} , di massa m , raggio r e centro G . Il disco è vincolato a muoversi in Oxy ed a rotolare senza strisciare all'esterno di una guida circolare fissa e rigida di raggio R e centro O , giacente in Oxy .

Usando come parametro lagrangiano l'angolo θ mostrato in figura, si scrivano le equazioni del moto del sistema.



Soluzione

Si determina preliminarmente la velocità angolare istantanea del disco. Indicato con Q un punto fisso sul disco (ad esempio il punto di contatto disco-guida per $\theta = 0$) si ha che la condizione di rotolamento senza strisciamento impone

$$\alpha r = \theta R \quad \iff \quad \alpha = \theta \frac{R}{r}.$$

L'angolo che la direzione GQ , fissa sul disco, forma con la verticale condotta per G vale

$$\alpha + \theta = \left(\frac{R}{r} + 1\right)\theta,$$

crescente per una rotazione oraria di \mathbb{D} . La velocità angolare del disco risulta pertanto

$$\vec{\omega}_{\mathbb{D}} = -\left(\frac{R}{r} + 1\right)\dot{\theta} \hat{e}_3.$$

Si scrivono ora le equazioni del moto facendo uso di due diversi metodi.

Primo metodo — lagrangiano —

Si calcola l'energia cinetica $T = T_{\mathbb{D}}$ applicando König

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2}m|\dot{G}|^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{R+r}{r}\right)^2\dot{\theta}^2.$$

Poiché il baricentro G del disco è individuato da

$$G - O = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 + (R + r) \cos \theta \hat{e}_2,$$

per cui $\dot{G} = (R + r) \cos \theta \dot{\theta} \hat{e}_1 - (R + r) \sin \theta \dot{\theta} \hat{e}_2$ e $|\dot{G}|^2 = (R + r)^2 \dot{\theta}^2$, si deduce

$$T_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} m (R + r)^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m (R + r)^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m (R + r)^2 \dot{\theta}^2.$$

Il potenziale delle sollecitazioni attive è solo quello gravitazionale ed assume la forma

$$U(\theta) = -mg(R + r) \cos \theta.$$

Si ha così la lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{3}{4} m (R + r)^2 \dot{\theta}^2 - mg(R + r) \cos \theta$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{3}{2} m (R + r)^2 \ddot{\theta} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = mg(R + r) \sin \theta.$$

Di qui si perviene all'equazione del moto

$$\frac{3}{2} m (R + r)^2 \ddot{\theta} - mg(R + r) \sin \theta = 0$$

ovvero

$$\frac{3}{2} (R + r) \ddot{\theta} - g \sin \theta = 0. \quad (11.1)$$

Secondo metodo — equazione cardinale del momento angolare —

Assunto come polo il punto di contatto P fra disco e guida, l'equazione del momento si scrive

$$\frac{d}{dt} \vec{K}_P = \vec{M}_P - m \dot{P} \wedge \dot{G}. \quad (11.2)$$

Si ha tuttavia

$$P - O = R \sin \theta \hat{e}_1 + R \cos \theta \hat{e}_2$$

$$G - O = (R + r) \sin \theta \hat{e}_1 + (R + r) \cos \theta \hat{e}_2 = \frac{R + r}{R} (P - O)$$

per cui $\dot{G} = \frac{R + r}{R} \dot{P}$ e quindi $-m \dot{P} \wedge \dot{G} = 0$. La (11.2) diventa perciò $\frac{d}{dt} \vec{K}_P = \vec{M}_P$. Il momento angolare \vec{K}_P vale

$$\vec{K}_P = I_{Pz} \vec{\omega}_{\mathbb{D}} = \left(mr^2 + \frac{mr^2}{2} \right) \left[- \left(\frac{R}{r} + 1 \right) \dot{\theta} \hat{e}_3 \right] = - \frac{3}{2} mr (R + r) \dot{\theta} \hat{e}_3,$$

mentre il momento delle forze \vec{M}_P si ottiene considerando le sola forza peso — la reazione vincolare è applicata in P ed ha momento nullo —

$$\vec{M}_P = (G - P) \wedge (-mg \hat{e}_2) = (r \sin \theta \hat{e}_1 + r \cos \theta \hat{e}_2) \wedge (-mg \hat{e}_2) = -mgr \sin \theta \hat{e}_3.$$

Pertanto

$$\frac{d}{dt} \left[-\frac{3}{2} mr(R+r) \dot{\theta} \hat{e}_3 \right] = -mgr \sin \theta \hat{e}_3,$$

che equivale a

$$\frac{3}{2} (R+r) \ddot{\theta} - g \sin \theta = 0$$

e coincide con la precedente equazione (11.1).

Esercizio 12. Equazioni di Lagrange in sistemi di riferimento rotanti e non

Analizzare la relazione fra le equazioni di Lagrange per un sistema meccanico, soggetto a vincoli ideali olonomi, scritte rispetto ad una terna di riferimento cartesiana ortogonale inerziale $Oxyz$ e quelle ottenute in una terna $Ox'y'z'$ posta in rotazione con velocità angolare costante rispetto ad $Oxyz$ — facendo uso dello stesso set di parametri lagrangiani $q = (q_1, \dots, q_n)$.

Soluzione

Si supponga per semplicità, ma senza perdita di generalità che il sistema meccanico sia composto da un numero finito di punti materiali P_i , $i = 1, \dots, N$, di masse rispettive m_i , in modo che si abbia $P_i = P_i(q, t)$. Indicate con T l'energia cinetica e con Q_h , $h = 1, \dots, n$ le componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive (necessariamente reali) agenti nel sistema inerziale $Oxyz$, le equazioni di Lagrange si scrivono

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_h} = Q_h \quad \forall h = 1, \dots, n. \quad (12.1)$$

Se si indica con \dot{P}'_i la velocità di P_i relativa alla terna non inerziale $Ox'y'z'$, l'equazione dei moti relativi porge

$$\dot{P}_i = \dot{P}'_i + \vec{\omega} \wedge (P_i - O), \quad (12.2)$$

per cui l'energia cinetica relativa ad $Oxyz$ può riesprimersi nel modo sottoindicato

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \dot{P}'_i + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{P}'_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\vec{\omega} \wedge (P_i - O)|^2 + \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \cdot (P_i - O) \wedge \dot{P}'_i = \tau_2 + \tau_0 + \tau_1 \end{aligned}$$

dove

$$\tau_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\dot{P}'_i|^2 \quad \tau_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\vec{\omega} \wedge (P_i - O)|^2 \quad \tau_1 = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \dot{P}'_i.$$

Le equazioni di Lagrange (12.1) diventano così

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \tau_2}{\partial q_h} - \frac{\partial \tau_1}{\partial q_h} - \frac{\partial \tau_0}{\partial q_h} = Q_h,$$

ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \tau_2}{\partial q_h} = Q_h + \frac{\partial \tau_0}{\partial q_h} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_h} \right) + \frac{\partial \tau_1}{\partial q_h}. \quad (12.3)$$

Nella terna di riferimento non inerziale $Ox'y'z'$ l'energia cinetica si riduce a

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left| \dot{P}'_i \right|^2 = \tau_2$$

mentre le componenti lagrangiane delle sollecitazioni *reali* rimangono invariate, in quanto

$$Q_h = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h}$$

è uno scalare, invariante per rotazioni arbitrarie della terna di riferimento. Tuttavia, trattandosi di terna *non* inerziale per via del moto rotatorio rispetto alla terna galileiana $Oxyz$, accanto alle sollecitazioni reali agiscono anche delle sollecitazioni fittizie, e precisamente la forza centrifuga $-m_i \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)]$ e quella di Coriolis $-2m_i \vec{\omega} \wedge \dot{P}'_i$.

Le componenti lagrangiane della forza centrifuga sono:

$$\begin{aligned} Q_h^{cf} &= - \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \sum_{i=1}^N m_i [-\vec{\omega} \vec{\omega} \cdot (P_i - O) + (P_i - O) |\vec{\omega}|^2] \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i [|\vec{\omega}|^2 (P_i - O) - \vec{\omega} \cdot (P_i - O) \vec{\omega}] \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (P_i - O) = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial}{\partial q_h} \left[\frac{1}{2} |\vec{\omega}|^2 |P_i - O|^2 - \frac{1}{2} [(P_i - O) \cdot \vec{\omega}]^2 \right] = \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i |\vec{\omega} \wedge (P_i - O)|^2 = \frac{\partial \tau_0}{\partial q_h} \end{aligned}$$

e quelle della forza di Coriolis:

$$Q_h^{Cor} = -2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \wedge \dot{P}'_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = -2 \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{P}'_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h}.$$

Di qui si deducono le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T'}{\partial q_h} = Q_h + Q_h^{cf} + Q_h^{Cor}$$

ossia, equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \tau_2}{\partial q_h} = Q_h + \frac{\partial \tau_0}{\partial q_h} + Q_h^{Cor}. \quad (12.4)$$

Si osservi tuttavia che le equazioni di Lagrange dipendono esclusivamente dai parametri lagrangiani q e non dalla scelta della terna di riferimento, pertanto le equazioni (12.3) e (12.4) devono di necessità coincidere. Ciò implica

$$Q_h^{Cor} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_h} \right) + \frac{\partial \tau_1}{\partial q_h} \quad (12.5)$$

relazione che è dato di verificare direttamente. Sostituendo la (12.2) nell'espressione di τ_1 si ottiene

$$\tau_1 = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge [\dot{P}_i - \vec{\omega} \wedge (P_i - O)]$$

e quindi, poiché $\frac{\partial \dot{P}_i}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial P_i}{\partial q_h}$, la relazione $\frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_i} = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (P_i - O) \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h}$.

In modo analogo si ha

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_h} \right) &= -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[\dot{P}_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + (P_i - O) \wedge \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right) \right] = \\ &= -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[\dot{P}_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}_i}{\partial q_h} \right]. \end{aligned}$$

L'applicazione della (12.2) permette di ricondurre l'espressione alla forma equivalente

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_h} \right) &= -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[\dot{P}'_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + [\vec{\omega} \wedge (P_i - O)] \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \right. \\ &\quad \left. + (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}'_i}{\partial q_h} + (P_i - O) \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right) \right] = \\ &= -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[-\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge \dot{P}'_i + \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge [(P_i - O) \wedge \vec{\omega}] + \right. \\ &\quad \left. + (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}'_i}{\partial q_h} + (P_i - O) \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \right) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[-\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge \dot{P}'_i + (P_i - O) \vec{\omega} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} - \vec{\omega} (P_i - O) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} + \right. \\
 &\quad \left. + (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}'_i}{\partial q_h} + \vec{\omega} (P_i - O) \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} - \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \vec{\omega} \cdot (P_i - O) \right] = \\
 &= -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[-\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge \dot{P}'_i + (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}'_i}{\partial q_h} + (P_i - O) \vec{\omega} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} - \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \vec{\omega} \cdot (P_i - O) \right] = \\
 &= \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left[\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge \dot{P}'_i - (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}'_i}{\partial q_h} \right].
 \end{aligned}$$

Infine

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial q_h} = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge \dot{P}'_i + (P_i - O) \wedge \frac{\partial \dot{P}'_i}{\partial q_h} \right]$$

e quindi

$$-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tau_1}{\partial \dot{q}_h} \right) + \frac{\partial \tau_1}{\partial q_h} = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i 2 \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \wedge \dot{P}'_i = -2\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \dot{P}'_i \wedge \frac{\partial P_i}{\partial q_h} = Q_h^{Cor}$$

come richiesto. L'espressione τ_1 è nota come *potenziale generalizzato* della sollecitazione di Coriolis. τ_1 di potenziale ha soltanto il nome, dipendendo esplicitamente dalle velocità generalizzate \dot{q} . In effetti la sua unica proprietà è quella di riprodurre le componenti lagrangiane della sollecitazione per mezzo della (12.5).

Dal confronto delle equazioni (12.3) e (12.4) si deduce che per la determinazione delle equazioni del moto è possibile analizzare il sistema equivalentemente rispetto alla terna inerziale oppure rispetto a quella rotante non inerziale. Qualora si decida di affrontare il problema nella terna non inerziale è necessario tenere conto non soltanto delle componenti lagrangiane delle sollecitazioni attive *reali*, che peraltro assumono lo stesso valore assunto rispetto alla terna inerziale, ma anche quelle delle sollecitazioni fittizie, centrifuga e di Coriolis. È senza dubbio vantaggioso considerare le sollecitazioni centrifughe calcolandone il potenziale centrifugo τ_2 ed inserendolo nella lagrangiana del sistema.

Quanto alle forze di Coriolis si può procedere in due modi alternativi: calcolare, via la definizione, le componenti lagrangiane della sollecitazione ed inserirle a secondo membro nelle equazioni di Lagrange; oppure determinare l'espressione τ_1 del potenziale generalizzato di tali sollecitazioni e aggiungerlo alla Lagrangiana.

Si osservi che i tre termini τ_2 , τ_1 , τ_0 dell'energia cinetica relativa alla terna inerziale sono dunque permanere inalterati nella lagrangiana scritta rispetto al riferimento rotante; cambia tuttavia la loro interpretazione fisica. In particolare τ_2 rappresenta l'energia cinetica nella terna non inerziale, τ_0 è il potenziale delle forze centrifughe e τ_1 si identifica con il potenziale generalizzato della sollecitazione di Coriolis.

In molti casi le sollecitazioni di Coriolis hanno componenti lagrangiane identicamente nulle. Un esempio notevole è costituito dai sistemi vincolati a rimanere in un piano fisso passante per l'asse di rotazione della terna non inerziale rispetto al riferimento inerziale. Le componenti lagrangiane della forza di Coriolis sono date dall'espressione

$$Q_h^{Cor} = \sum_{i=1}^N -2m_i \vec{\omega} \wedge \dot{P}_i \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \quad (12.6)$$

in cui i vettori \dot{P}_i e $\partial P_i / \partial q_h$ sono banalmente tangenti al piano vincolare. Ne segue che la forza di Coriolis $-2m_i \vec{\omega} \wedge \dot{P}_i$ risulta *normale* a tale piano e che pertanto tutti i prodotti scalari in (12.6) sono nulli. Dunque $Q_h^{Cor} = 0, \forall h = 1, \dots, n$.

Esercizio 13. Sulla unicità della lagrangiana di un sistema olonomo

Verificare che condizione sufficiente affinché le equazioni di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial A}{\partial q_h} = 0, \quad h = 1, \dots, n, \quad q = (q_1, \dots, q_n),$$

con $A = A(q, \dot{q}, t)$, siano soddisfatte identicamente (si riducano cioè ad una identità, ovvero ammettano qualsiasi soluzione $q = q(t)$) è che si abbia

$$A(q, \dot{q}, t) = \frac{dW}{dt}(q, t) + F(t) \quad (13.1)$$

comunque si assegnino le funzioni a valori scalari $W(q, t)$, di classe C^2 , ed $F(t)$, arbitraria. Discutere le conseguenze di questo risultato sulla unicità della lagrangiana per un sistema meccanico.

Soluzione

Si ha immediatamente che

$$A(q, \dot{q}, t) = \frac{\partial W}{\partial t}(q, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + F(t)$$

per cui, dovendosi riguardare q e \dot{q} come variabili indipendenti,

$$\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial W}{\partial q_h}$$

e quindi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial q_h} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial q_h} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_h} \dot{q}_i.$$

Poiché W è una funzione di classe C^2 si può scambiare l'ordine delle derivate parziali seconde miste e riscrivere l'espressione precedente come

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_h} \right) = \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial q_i} \dot{q}_i.$$

D'altra parte vale $\frac{\partial A}{\partial q_h} = \frac{\partial}{\partial q_h} \left[\frac{\partial W}{\partial t}(q, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i + F(t) \right] = \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 W}{\partial q_h \partial q_i} \dot{q}_i$
e pertanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial A}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial A}{\partial q_h} = 0$$

identicamente, come richiesto. Le conseguenze sulla unicità della lagrangiana di un sistema meccanico si deducono facilmente notando che, per quanto appena dimostrato, le equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = Q_h \quad \forall q = 1, \dots, n$$

rimangono invariate se \mathcal{L} viene sostituita da

$$\mathcal{L} + \frac{dW}{dt}(q, t) + F(t)$$

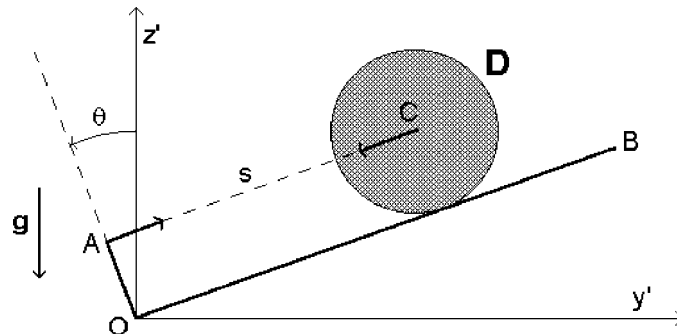
con $W(q, t)$ di classe C^2 ed $F(t)$ qualsiasi. Ne segue un'ampia indeterminazione nella lagrangiana del sistema — si ricordi, del resto, che \mathcal{L} non ha un significato fisico diretto: essa compare soltanto nella espressione delle equazioni del moto.

Esercizio 14. Sistema scleronomo a 2 g.d.l. conservativo in 3D

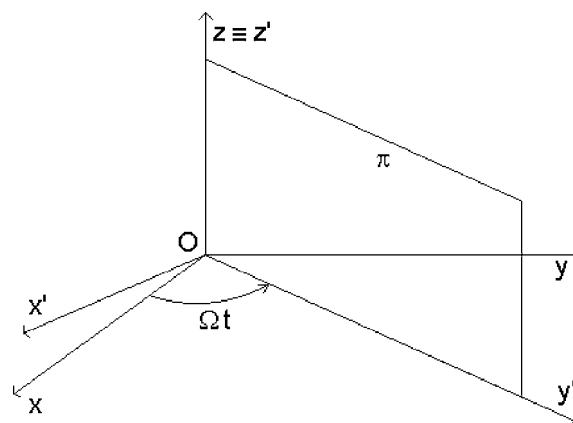
Si consideri un piano verticale π su cui è definito un sistema di assi cartesiani $Oy'z'$, con Oz' asse verticale ed Oy' asse orizzontale. Nel piano π è data una guida rigida AOB a forma di "elle" (vedi figura), di massa trascurabile, che può ruotare liberamente in π mantenendo il punto O fisso. L'angolo $A\hat{O}B$ è retto, mentre $|A - O| = R > 0$. Il moto di rotazione della guida è descritto per mezzo dell'angolo θ che $A - O$ forma con il semiasse positivo Oz' . Sulla guida è collocato un disco omogeneo pesante \mathbb{D} , di massa m , raggio R e centro C , vincolato a:

- restare nel semipiano di π individuato dalla retta OB e contenente A ;
- rotolare senza strisciare lungo OB .

Infine, fra i punti A e C si produce una interazione lungo $A - C$ dipendente dalla sola distanza di intensità $f(|A - C|)$, con $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ funzione continua arbitraria ed $f(|A - C|) > 0$ se l'interazione è attrattiva.



La distanza $|A - C|$ si indica con s e si assume definita in $(0, s_B)$, con $s_B \gg 0$. Il piano π ruota con velocità angolare costante Ω attorno all'asse Oz' rispetto ad una terna inerziale $Oxyz$ avente $Oz \equiv Oz'$.



Usando i parametri θ ed s illustrati in figura:

- (a) scrivere la lagrangiana del sistema nella terna di riferimento inerziale $Oxyz$;
- (b) determinare la lagrangiana del sistema nella terna rotante $Ox'y'z'$;
- (c) ricavare le equazioni del moto;
- (d) calcolare infine le configurazioni di equilibrio relative al piano π — ovvero alla terna $Ox'y'z'$.

Soluzione

(a) **Calcolo della lagrangiana nel sistema di riferimento inerziale $Oxyz$**

Si tratta di calcolare l'energia cinetica del disco ed il potenziale di tutte le sollecitazioni attive agenti sul sistema, il peso e l'interazione fra i punti A e C .

Energia cinetica del disco \mathbb{D} — e totale —

Si procede applicando il teorema di König, essendo il disco privo di punti fissi.

- *Coordinate del baricentro C*

Nel piano $\pi \equiv 0y'z'$ le coordinate del baricentro si scrivono

$$(y'_C, z'_C) = (s \cos \theta - R \sin \theta, s \sin \theta + R \cos \theta) \quad (14.1)$$

e conseguentemente rispetto alla terna $Oxyz$ assumono la forma

$$(x_C, y_C, z_C) = (y'_C \cos(\Omega t), y'_C \sin(\Omega t), z'_C).$$

Nella terna $Oxyz$ vale perciò

$$\begin{aligned} |\dot{C}|^2 &= [-\Omega y'_C \sin(\Omega t) + \dot{y}'_C \cos(\Omega t)]^2 + \\ &+ [\Omega y'_C \cos(\Omega t) + \dot{y}'_C \sin(\Omega t)]^2 + |\dot{z}'_C|^2 = \Omega^2 |y'_C|^2 + |\dot{y}'_C|^2 + |\dot{z}'_C|^2 \end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned} |\dot{y}'_C|^2 + |\dot{z}'_C|^2 &= (\dot{s} \cos \theta - s \sin \theta \dot{\theta} - R \cos \theta \dot{\theta})^2 + \\ &+ (\dot{s} \sin \theta + s \cos \theta \dot{\theta} - R \sin \theta \dot{\theta})^2 = \dot{s}^2 + s^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{s} \end{aligned}$$

e quindi $|\dot{C}|^2 = \Omega^2 (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \dot{s}^2 + (s^2 + R^2) \dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{s}$.

- *Energia cinetica “del baricentro”*

Dalla precedente espressione si ha immediatamente

$$\frac{m}{2} |\dot{C}|^2 = \frac{m}{2} \Omega^2 (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{m}{2} [\dot{s}^2 + (s^2 + R^2) \dot{\theta}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{s}]$$

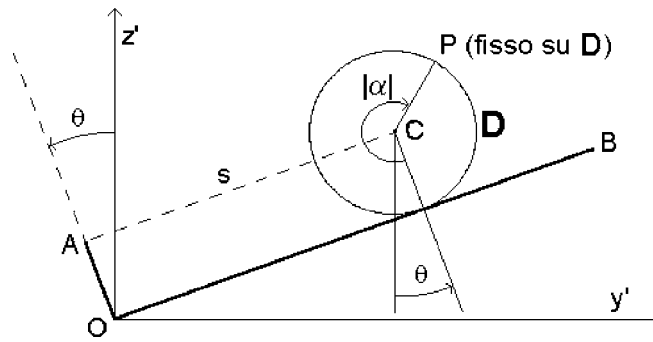
- *Velocità angolare del disco \mathbb{D}*

Nel piano π — vedi figura — è immediato convincersi che:

- vale $|\alpha| = s/R + \text{costante}$;
- l'angolo di rotazione di \mathbb{D} rispetto ad una direzione fissa — ad esempio Oz' — è

$$|\alpha| - \theta = \frac{s}{R} - \theta + \text{costante}$$

e se positivo rappresenta una rotazione *oraria* attorno all'asse Cx' .



Per rispettare la usuale convenzione sinistrorsa si scrive l'angolo di rotazione di \mathbb{D} come

$$\gamma = -\frac{s}{R} + \theta - \text{costante}$$

e l'espressione per la velocità angolare del disco conterrà perciò il termine

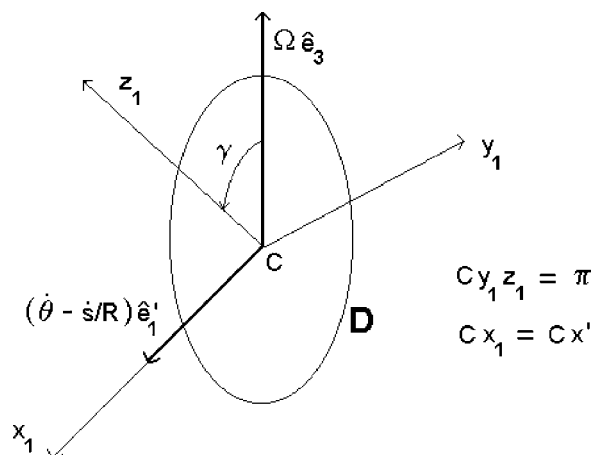
$$\left(-\frac{\dot{s}}{R} + \dot{\theta}\right)\hat{e}'_1$$

cui si dovrà sommare l'ulteriore contributo $\Omega\hat{e}_3$ dovuto alla rotazione uniforme di π attorno a Oz (si osservi che Ωt corrisponde all'angolo euleriano φ , mentre γ si identifica con l'angolo euleriano θ). In conclusione

$$\vec{\omega} = \Omega\hat{e}_3 + \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R}\right)\hat{e}'_1.$$

- o *Energia cinetica relativa al sistema baricentrale $Cx_1y_1z_1$*

Il sistema baricentrale è mostrato nella figura seguente, dove sono anche evidenziate le componenti del vettore velocità angolare $\vec{\omega}$.



L'energia cinetica relativa $T_{C_{x_1 y_1 z_1}}$ vale allora

$$T_{C_{x_1 y_1 z_1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R} & \Omega \sin \gamma & \Omega \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R} \\ \Omega \sin \gamma \\ \Omega \cos \gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{4} \Omega^2,$$

espressione in cui l'angolo γ non compare, come era lecito attendersi.

o *Energia cinetica totale*

L'energia cinetica totale è dunque data dall'espressione

$$T = \frac{m}{2} [\dot{s}^2 - 2R\dot{\theta}\dot{s} + (s^2 + R^2)\dot{\theta}^2] +$$

$$+ \frac{m\Omega^2}{2} (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2}{4} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R} \right)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8} =$$

$$= \frac{m}{4} [3\dot{s}^2 - 6R\dot{s}\dot{\theta} + (2s^2 + 3R^2)\dot{\theta}^2] + \frac{m\Omega^2}{2} (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8}$$

e consiste nella somma di un termine T_2 quadratico nelle velocità generalizzate e di un termine T_0 indipendente da tali velocità.

o **Osservazione**

La T_2 è una forma quadratica definita positiva in $(\dot{s}, \dot{\theta})$. Infatti

$$T_2 = \frac{m}{4} \begin{pmatrix} \dot{s} & \dot{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3R \\ -3R & 2s^2 + 3R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \equiv \frac{m}{4} \begin{pmatrix} \dot{s} & \dot{\theta} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \dot{s} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

e per la matrice reale e simmetrica M si ha

$$\det M = 6s^2 + 9R^2 - 9R^2 = 6s^2 > 0 \quad (s > 0 \text{ per ipotesi})$$

e

$$\text{tr} M = 3 + 2s^2 + 3R^2 > 0$$

per cui M risulta definita positiva, come affermato.

Potenziale

Tutte le sollecitazioni attive applicate al sistema hanno natura posizionale e conservativa e possono quindi descriversi mediante un appropriato potenziale, che risulterà dalla somma di un potenziale gravitazionale e di un potenziale d'interazione fra i punti A e C .

o *Potenziale gravitazionale*

Il potenziale gravitazionale si calcola direttamente per mezzo della formula generale

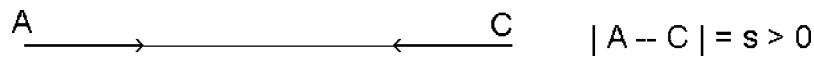
$$U_g = -mgz_C = -mg(s \sin \theta + R \cos \theta).$$

o *Potenziale d'interazione fra A e C*

Poichè la sollecitazione dipende unicamente dalla distanza fra i punti interagenti e si produce lungo il segmento che li congiunge, l'interazione è posizionale conservativa, di potenziale

$$\vec{F}_A = -\frac{A-C}{|A-C|} f(|A-C|) \quad \text{ed} : \quad \vec{F}_C = -\vec{F}_A.$$

Si osservi l'introduzione del segno negativo necessario a rendere conto di una interazione attrattiva quando $f(|A-C|) > 0$, come richiesto.



Le componenti lagrangiane della sollecitazione sono, genericamente:

$$Q_h = \vec{F}_A \cdot \frac{\partial A}{\partial q_h} - \vec{F}_C \cdot \frac{\partial C}{\partial q_h} =$$

$$= -\frac{A-C}{|A-C|} f(|A-C|) \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} (A-C) = -f(|A-C|) \frac{\partial}{\partial q_h} |A-C| \equiv \frac{\partial}{\partial q_h} U_{AC}(|A-C|)$$

dove $h = s, \theta$ e $U_{AC}(s) = -\int f(s) ds$.

o *Potenziale totale*

Il potenziale totale del sistema è dato dalla somma dei due potenziali parziali

$$U = U_g + U_{AC} = -gm(s \sin \theta + R \cos \theta) - \int f(s) ds.$$

Lagrangiana

Si ha $\mathcal{L} = T + U$ e quindi

$$\mathcal{L} = \frac{m}{4} [3\dot{s}^2 - 6R\dot{s}\dot{\theta} + (2s^2 + 3R^2)\dot{\theta}^2] + \frac{m\Omega^2}{2} (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8} -$$

$$-mg(s \sin \theta + R \cos \theta) - \int f(s) ds$$

dove la costante additiva $mR^2\Omega^2/8$ può essere omessa in quanto inessenziale.

(b) Calcolo della lagrangiana nel sistema di riferimento solidale $Ox'y'z'$ *Energia cinetica del disco \mathbb{D} — e totale —*

Il moto di \mathbb{D} ha luogo nel piano fisso π . Poiché il disco non presenta punti fissi conviene fare ricorso al teorema di König per il calcolo dell'energia cinetica.

○ *Energia cinetica “del baricentro”*

Le componenti cartesiane del baricentro C si scrivono, con le stesse notazioni della (14.1)

$$(x'_C, y'_C, z'_C) = (0, y'_C, z'_C)$$

cosicché il modulo quadrato della velocità di C relativa alla terna rotante vale

$$|\dot{C}|^2 = |\dot{y}'_C|^2 + |\dot{z}'_C|^2 = \dot{s}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta} + (s^2 + R^2)\dot{\theta}^2.$$

L'energia cinetica “del baricentro” diventa perciò

$$\frac{m}{2}|\dot{C}|^2 = \frac{m}{2}[\dot{s}^2 - 2R\dot{s}\dot{\theta} + (s^2 + R^2)\dot{\theta}^2].$$

○ *Energia cinetica di \mathbb{D} relativa alla terna baricentrale $Cx'_1y'_1z'_1$ ($Cx'_1 \equiv Cx'$)*

Vale banalmente, non avendo luogo la rotazione attorno all'asse verticale:

$$T_{Cx'_1y'_1z'_1} = \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R} \right)^2 = \frac{mR^2}{4} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{s}}{R} \right)^2.$$

○ *Energia cinetica totale*

Come già calcolato in precedenza, il teorema di König porge

$$T_{Ox'y'z'} = \frac{m}{2}|\dot{C}|^2 + T_{Cx'_1y'_1z'_1} = \frac{m}{4}[3\dot{s}^2 - 6R\dot{s}\dot{\theta} + (2s^2 + 3R^2)\dot{\theta}^2].$$

Potenziale○ *Potenziale delle sollecitazioni reali*

Rimane inalterato e si scrive perciò

$$U_g + U_{AC} = -mg(s \sin \theta + R \cos \theta) - \int f(s) ds.$$

○ *Potenziale centrifugo*

Nella terna rotante, non inerziale, agisce un campo di forze centrifughe il cui potenziale risulta

$$U_{cf} = \frac{\Omega^2}{2} I_{Oz'} = \frac{\Omega^2}{2} \left(m|y'_C|^2 + \frac{mR^2}{4} \right)$$

per Huygens-Steiner, e quindi

$$U_{cf} = \frac{m\Omega^2}{2} (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8}.$$

◦ *Potenziale totale*

Si ottiene come somma dei potenziali delle sollecitazioni reali e centrifuga

$$U = U_g + U_{AC} + U_{cf}.$$

Lagrangiana nel riferimento $Ox'y'z'$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \frac{m}{4} [3\dot{s}^2 - 6R\dot{s}\dot{\theta} + (2s^2 + 3R^2)\dot{\theta}^2] + \frac{m\Omega^2}{2} (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8} - \\ & - mg(s \sin \theta + R \cos \theta) - \int f(s) ds. \end{aligned}$$

Osservazione. Identità delle lagrangiane

Le lagrangiane \mathcal{L} ed \mathcal{L}' , determinate nelle terne di riferimento $Oxyz$ ed $Ox'y'z'$ rispettivamente, coincidono.

La sola differenza consiste nel fatto che $\frac{m\Omega^2}{2} (s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8}$ costituisce:

- un termine di energia cinetica nella \mathcal{L} ;
- il termine di potenziale centrifugo nella \mathcal{L}' .

Osservazione. Forza di Coriolis

La forza di Coriolis agente nella terna rotante è proporzionale alla velocità, per cui non sarà mai posizionale — né conservativa, a maggior ragione. Si calcolano le componenti lagrangiane $Q_{Cor,s}$ e $Q_{Cor,\theta}$ della sollecitazione. Preso un punto $P \in \mathbb{D} \subset \pi$ si ha che

$$\dot{P} \quad , \quad \Omega \hat{e}_3 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial P}{\partial \theta}$$

sono vettori paralleli a π . Ma la forza di Coriolis agente sull'areola elementare di posizione P , area dA e massa σdA del disco ($\sigma = m/\pi R^2$)

$$d\vec{F}_{Cor} = (-2\Omega \hat{e}_3) \wedge \dot{P} \sigma dA$$

è sempre normale al piano vincolare π . Dunque

$$d\vec{F}_{Cor} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} = (-2\Omega \hat{e}_3) \wedge \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial s} \sigma dA = 0$$

ed analogamente

$$d\vec{F}_{Cor} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} = (-2\Omega \hat{e}_3) \wedge \dot{P} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} \sigma dA = 0.$$

Pertanto — notare che la somma sui punti viene sostituita da un integrale di superficie

$$Q_{Cor,s} = \int_A \frac{\partial P}{\partial s} \cdot d\vec{F}_{Cor} = \int_A 0 dA = 0 \quad Q_{Cor,\theta} = \int_A \frac{\partial P}{\partial \theta} \cdot d\vec{F}_{Cor} = \int_A 0 dA = 0.$$

Le componenti lagrangiane delle forze di Coriolis sono nulle, fatto ragionevole in quanto tali sollecitazioni risultano *normali* al piano vincolare $\pi = Oy'z'$ e vengono equilibrate dalle reazioni vincolari.

(c) **Equazioni di Lagrange**

Sono, per quanto detto

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (14.2)$$

e si ottengono per banale sostituzione, ricordando che nelle derivate parziali $s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}$ vanno riguardate come variabili indipendenti. Si noti che le (14.2) sono relative alle funzioni incognite $s(t)$ e $\theta(t)$: della scelta della terna di riferimento non c'è traccia.

(d) **Configurazioni di equilibrio** (s_0, θ_0)

Sono le soluzioni statiche del sistema (14.2)

$$(s(t), \theta(t)) = (s_0, \theta_0), \quad \text{costante}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Per l'individuazione delle configurazioni richieste si possono utilizzare due metodi.

Primo metodo

È basato sulla definizione, e come tale sempre corretto. Facendo uso di notazioni generali, si pone $q(t) = q_0$, costante $\forall t \in \mathbb{R}$, nelle equazioni di Lagrange e si risolve il sistema di equazioni così ottenuto. Beninteso varrà $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ identicamente in t . Si procede ora al calcolo esplicito nel caso generale. Nell'ipotesi che l'energia cinetica del sistema sia data dalla somma di tre termini, T_2, T_1, T_0 , il primo quadratico nelle velocità generalizzate, il secondo lineare ed il terzo costante, si hanno le identità

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \quad h = 1, 2, \dots, n$$

dove si è indicato con n il numero di gradi di libertà del sistema, $\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_h}$ è lineare in \dot{q} e $\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h}$ indipendente da \dot{q} . Di conseguenza, essendo $\dot{q} = \ddot{q} = 0$ ed assumendo che non siano presenti nella lagrangiana termini di potenziale generalizzato — che comunque verrebbero trattati alla stessa stregua dei termini in T_1 —

$$\left. \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) \right|_{q(t)=q_0} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \right) \right|_{q(t)=q_0}$$

mentre

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} \right|_{q(t)=q_0} = \left. \frac{\partial T_0}{\partial q_h} \right|_{q(t)=q_0} + \left. \frac{\partial U}{\partial q_h} \right|_{q(t)=q_0}.$$

Le eventuali soluzioni statiche delle equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = Q_h(q, \dot{q}, t) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

sono quindi ottenute dal sistema

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_h} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial q_h} - \frac{\partial U}{\partial q_h} \right] \Bigg|_{q(t)=q_0} = Q_h(q_0, 0, t) \quad h = 1, 2, \dots, n.$$

Affinché la ricerca abbia senso occorrerà in generale che t non figuri esplicitamente nell'equazione. Condizione sufficiente a che ciò avvenga è che T_0 , T_1 e $Q_h(q_0, 0, t)$, $\forall h = 1, 2, \dots, n$, non dipendano esplicitamente dal tempo — un caso notevole in cui la condizione di indipendenza dal tempo sulle $Q_h(q_0, 0, t)$ ricorre certamente è quello delle sollecitazioni dissipative $Q_h(q, \dot{q}, t)$ continue in \dot{q} , per le quali si ha sempre $Q_h(q_0, 0, t) = 0$. In tale ipotesi vale

$$-\frac{\partial}{\partial q_h} [T_0(q_0) + U(q_0)] = Q_h(q_0, 0) \quad h = 1, 2, \dots, n$$

che suggerisce il successivo

Secondo metodo

Se T_0 e T_1 non dipendono esplicitamente da t e $Q_h(q_0, 0, t) = 0 \forall q_0, t$, le configurazioni di equilibrio sono le soluzioni di

$$\frac{\partial}{\partial q_h} [T_0(q_0) + U(q_0)] = 0 \quad h = 1, 2, \dots, n$$

ovvero i punti critici della funzione

$$T_0(q_0) + U(q_0).$$

Si sottolinea come nel presente caso i due metodi siano entrambi applicabili.

Osservazione

Nel problema in esame le configurazioni di equilibrio sono *relative* alla terna $Ox'y'z'$. Infatti, l'assumere $(s, \theta)(t) = \text{costante} \forall t \in \mathbb{R}$ equivale ad richiedere l'equilibrio del sistema rispetto ad $Ox'y'z'$.

Osservazione

Il secondo metodo *non richiede* la conoscenza delle *equazioni del moto*, ma del solo “potenziale” $T_0 + U$. Si tratta dunque di un metodo certamente più diretto, sebbene non sempre applicabile.

Nel presente caso, se si eseguono i calcoli direttamente nel sistema di riferimento rotante $Ox'y'z'$ non è neppure necessario il calcolo di T — puramente quadratica in \dot{q} , essendo i vincoli indipendenti dal tempo. Nella fattispecie

$$\tilde{U} \equiv T_0 + U = \frac{m\Omega^2}{2}(s \cos \theta - R \sin \theta)^2 + \frac{mR^2\Omega^2}{8} - mg(s \sin \theta + R \cos \theta) - \int f(s) ds$$

e dunque le configurazioni di equilibrio risolvono il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial s} = +m\Omega^2(s \cos \theta - R \sin \theta) \cos \theta - mg \sin \theta - f(s) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} = -m[g + \Omega^2(s \sin \theta + R \cos \theta)](s \cos \theta - R \sin \theta) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione è soddisfatta per

$$(i) \quad s \cos \theta - R \sin \theta = 0 \quad \text{e per} \quad (ii) \quad s \cos \theta + R \sin \theta = -g/\Omega^2.$$

Nel caso (i) si ottiene

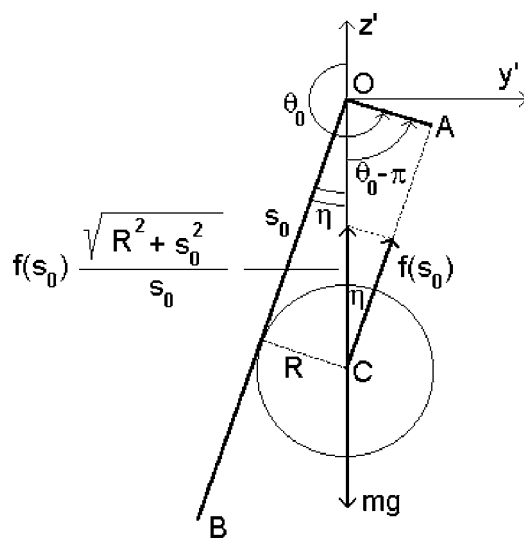
$$\begin{cases} -mg \sin \theta - f(s) = 0 \\ s \cos \theta - R \sin \theta = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin \theta = -\frac{1}{mg} f(s) \\ \cos \theta = -\frac{R}{mg} \frac{f(s)}{s} \end{cases} \quad (14.3)$$

mentre per (ii) vale

$$\begin{cases} f(s) - m\Omega^2 s = 0 \\ s \sin \theta + R \cos \theta = -g/\Omega^2. \end{cases} \quad (14.4)$$

Può essere utile interpretare fisicamente le soluzioni ottenibili da (14.3), indicate al solito con (s_0, θ_0) .

Se $f(s_0) > 0$ — interazione attrattiva — la configurazione di equilibrio è mostrata nella figura seguente



$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\pi}{2} - (\theta_0 - \pi) = \frac{3}{2}\pi - \theta_0 \\ \text{tg } \eta &= \frac{R}{s_0} \\ f(s_0) \frac{\sqrt{R^2 + s_0^2}}{s_0} &= mg \end{aligned}$$

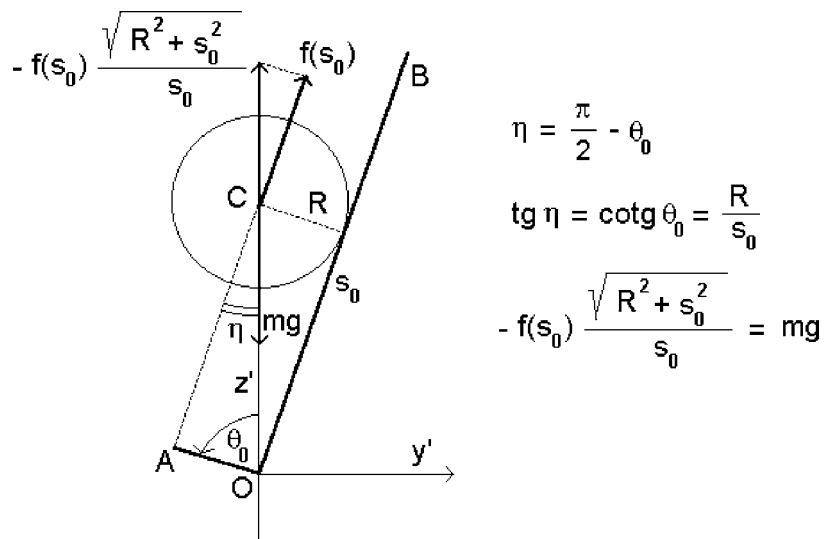
dove $\eta = \pi/2 - (\theta_0 - \pi) = 3\pi/2 - \theta_0$, $\text{tg } \eta = R/s_0$ e $\sqrt{R^2 + s_0^2} f(s_0)/s_0 = mg$. In effetti dalla (14.3) si deducono le relazioni:

$$mg = \frac{\sqrt{R^2 + s_0^2}}{s_0} f(s_0) \quad \text{tg } \eta = \text{tg} \left(\frac{3}{2}\pi - \theta_0 \right) = \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0\right)} = [\text{tg } \theta_0]^{-1}$$

$$\text{tg } \theta_0 = \frac{s_0}{R} \quad \implies \quad \text{tg } \eta = \frac{R}{s_0}$$

$$\sin \theta_0, \cos \theta_0 < 0 \quad \implies \quad \theta_0 \in (\pi, 3\pi/2).$$

Se viceversa $f(s_0) < 0$ — interazione repulsiva — si ottiene $\sin \theta_0, \cos \theta_0 > 0$, per cui $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ e la configurazione di equilibrio risulta del tipo illustrato nella figura seguente



con $\eta = \pi/2 - \theta_0$, $\text{tg } \eta = \text{cotg } \theta_0 = R/s_0$ ed $mg = -\sqrt{R^2 + s_0^2} f(s_0)/s_0$.

Sia ad esempio $f(s) = ks^2$, con $k > 0$. L'equazione (14.3) diventa

$$\begin{cases} \sin \theta = -\frac{k}{mg} s^2 < 0 \\ \cos \theta = -\frac{kR}{mg} s < 0 \end{cases} \quad \implies \quad \theta \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi \right)$$

cosicché

$$1 = \frac{k^2}{m^2 g^2} (s^4 + R^2 s^2) \quad \implies \quad s^4 + R^2 s^2 - \left(\frac{mg}{k} \right)^2 = 0$$

ed infine

$$s^2 = -\frac{R^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{R^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{mg}{k} \right)^2}.$$

La sola radice accettabile è quella positiva e dovendosi avere $s > 0$ si conclude

$$s = s_0 \equiv \sqrt{-\frac{R^2}{2} + \sqrt{(R^2/2)^2 + (mg/k)^2}},$$

mentre $\theta = \theta_0 \in (\pi, 3\pi/2)$ è determinato da

$$\sin \theta_0 = -\frac{k}{mg} \left[-\frac{R^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{R^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{mg}{k}\right)^2} \right].$$

Analogamente, l'equazione (14.4) porge

$$\begin{cases} ks^2 - m\Omega^2 s = 0 \\ s \sin \theta + R \cos \theta = -\frac{g}{\Omega^2} \end{cases} \iff \begin{cases} s \left(s - \frac{m\Omega^2}{k} \right) = 0 \\ s \sin \theta + R \cos \theta = -\frac{g}{\Omega^2}. \end{cases}$$

Si possono distinguere due casi.

- Caso (a):

$$\begin{cases} s = 0 \\ R \cos \theta = -\frac{g}{\Omega^2} \end{cases},$$

che non ammette soluzione, dovendo essere $s > 0$ per ipotesi.

- Caso (b):

$$\begin{cases} s = \frac{m\Omega^2}{k} \\ \frac{m\Omega^2}{k} \sin \theta + R \cos \theta = -\frac{g}{\Omega^2} \end{cases} \tag{14.5}$$

che implica per la seconda equazione la forma equivalente

$$\frac{\frac{m\Omega^2}{k} \sin \theta + R \cos \theta}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}} = \frac{-\frac{g}{\Omega^2}}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}}.$$

Ma esiste un unico $\alpha \in (0, \pi/2)$ tale che

$$\frac{m\Omega^2/k}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}} = \cos \alpha, \quad \frac{R}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}} = \sin \alpha,$$

per cui il sistema (14.5) diviene

$$\begin{cases} s = m\Omega^2/k \\ \sin(\theta + \alpha) = -\frac{g/\Omega^2}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}}. \end{cases} \tag{14.6}$$

Il sistema (14.6) ammette soluzione se e soltanto se

$$(\text{sempre } 0 <) \frac{g/\Omega^2}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}} \leq 1$$

ed in tal caso $(s_0, \theta_0) = (s^*, \theta_1), (s^*, \theta_2)$, con

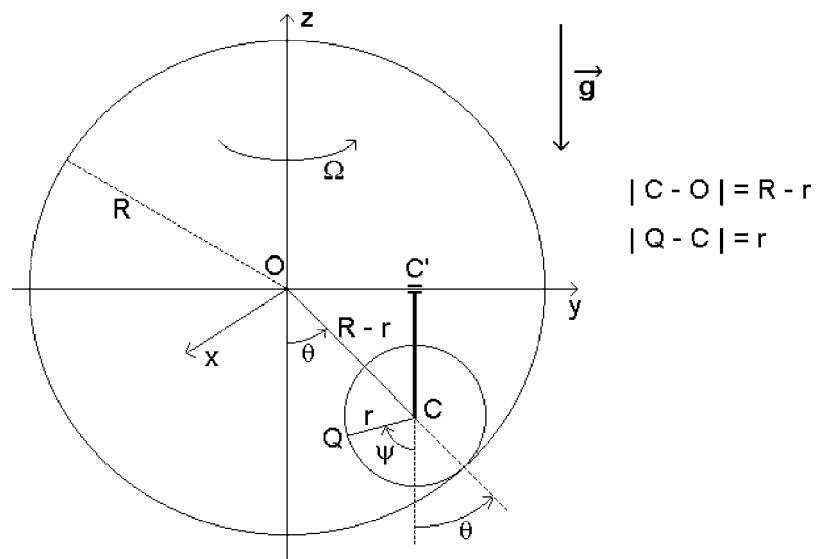
$$s^* = m\Omega^2/k$$

$$\theta_1 = -\alpha - \arcsin \left[\frac{g/\Omega^2}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}} \right]$$

$$\theta_2 = -\alpha + \pi + \arcsin \left[\frac{g/\Omega^2}{\sqrt{(m\Omega^2/k)^2 + R^2}} \right].$$

Esercizio 15. Sistema scleronomo a 2 g.d.l. posizionale conservativo

In un sistema di riferimento $Oxyz$ è fissata una guida circolare rigida di centro O e raggio R , giacente nel piano Oyz . Su tale piano è vincolato a muoversi un disco circolare rigido e omogeneo, di raggio $r < R$, massa m e centro C . Il disco rotola senza strisciare lungo la guida circolare, all'interno del cerchio da questa delimitato (vedi figura). Il centro C è connesso, mediante una molla ideale elastica di costante $k > 0$ e di lunghezza a riposo nulla, ad un punto C' libero di scorrere senza attrito lungo l'asse Oy in modo che il segmento CC' si mantenga costantemente parallelo ad Oz .



Sapendo che:

- il sistema è pesante, con l'asse Oz verticale e $\vec{g} = -g\hat{e}_3$ ($g > 0$);
- la terna $Oxyz$ ruota con velocità angolare costante $\Omega\hat{e}_3$ attorno all'asse verticale Oz rispetto ad un riferimento inerziale;

determinare in termini dell'angolo θ specificato in figura:

- (a) la lagrangiana del sistema e le equazioni lagrangiane del moto;
- (b) le configurazioni di equilibrio, discutendone la stabilità;
- (c) il relativo diagramma di biforcazione, disegnando qualitativamente i diagrammi di fase nei casi più significativi;
- (d) il periodo delle piccole oscillazioni nei punti di equilibrio stabile in cui l'hessiana del potenziale risulta definita negativa.

Soluzione

(a) Lagrangiana ed equazioni lagrangiane del moto

Si tratta di determinare l'energia cinetica del disco ed il potenziale del sistema, che risulterà dalla somma dei potenziali gravitazionale, elastico e centrifugo, relativi alle sole sollecitazioni applicate al sistema.

Velocità angolare del disco

Assumendo la consueta convenzione sinistrorsa sull'orientamento degli angoli, l'angolo θ mostrato in figura deve intendersi positivo. La rotazione del disco è descritta dall'angolo ψ (negativo in figura) che il raggio CQ fissato sul disco forma con la verticale condotta per C (fissa nel riferimento $Oxyz$). La condizione di rotolamento senza strisciamento si scrive perciò

$$\theta R = (\theta - \psi)r + \text{costante} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi = -\frac{R-r}{r}\theta + \text{costante}$$

e la velocità angolare del disco risulta

$$\vec{\omega} = -\frac{R-r}{r}\dot{\theta}\hat{e}_1.$$

Un calcolo più rigoroso è il seguente. Se P è il punto del disco in contatto con la guida la condizione di puro rotolamento impone

$$0 = \dot{P} = \dot{C} + \vec{\omega} \wedge (P - C) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(C - O) + \vec{\omega} \wedge (P - C) = 0.$$

Poiché $P - C = (C - O)\frac{r}{R-r}$, si ha allora

$$\frac{d}{dt}(C - O) + \vec{\omega} \wedge (C - O)\frac{r}{R-r} = 0 \quad (15.1)$$

e facendo uso delle ovvie relazioni:

$$\begin{aligned} C - O &= (R-r)[\sin\theta\hat{e}_2 - \cos\theta\hat{e}_3] \\ \frac{d}{dt}(C - O) &= (R-r)\dot{\theta}[\cos\theta\hat{e}_2 + \sin\theta\hat{e}_3] \\ \vec{\omega} &= \omega\hat{e}_1 \quad \text{— il moto del disco è piano —} \end{aligned}$$

si ottiene l'espressione

$$\vec{\omega} \wedge (C - O) = \omega(R - r)[\cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3].$$

La (15.1) diventa pertanto

$$(R - r)\dot{\theta}[\cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3] + \omega r[\cos \theta \hat{e}_2 + \sin \theta \hat{e}_3] = 0$$

ed implica

$$(R - r)\dot{\theta} + \omega r = 0,$$

dalla quale si conclude che $\omega = -\dot{\theta}(R - r)/r$ e $\vec{\omega} = -\frac{R - r}{r}\dot{\theta}\hat{e}_1$, a conferma del risultato già ottenuto.

Energia cinetica del disco

Noto che sia il vettore velocità angolare del disco, per l'energia cinetica del disco il teorema di König porge l'espressione

$$T = \frac{m}{2}|\dot{C}|^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\omega^2 = \frac{m}{2}(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{m}{4}(R - r)^2\dot{\theta}^2 = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2.$$

Potenziale gravitazionale

Per il potenziale associato alla forza peso si ha l'espressione immediata

$$U_g = -mgz_C = mg(R - r)\cos \theta.$$

Potenziale elastico

Per ricavare il potenziale relativo all'interazione elastica fra i punti C e C' basta sostituire le coordinate dei punti interagenti nella formula generale

$$U_{el} = -\frac{k}{2}|C - C'|^2 = -\frac{k}{2}(R - r)^2 \cos^2 \theta.$$

Potenziale centrifugo

Applicando il teorema di Huygens-Steiner si ha l'espressione

$$U_{cf} = \frac{\Omega^2}{2}I_{Cz} = \frac{\Omega^2}{2}\left[m(R - r)^2 \sin^2 \theta + \frac{mr^2}{4}\right].$$

Forze di Coriolis

Le forze di Coriolis hanno componente lagrangiana nulla, come è immediato verificare: $Q_{Cor,\theta} = 0$.

Potenziale totale

Il potenziale del sistema si deduce sommando i potenziali parziali, gravitazionale, elastico e centrifugo, precedentemente determinati

$$U = U_g + U_{el} + U_{cf} = mg(R-r) \cos \theta - \frac{k}{2}(R-r)^2 \cos^2 \theta + \frac{m\Omega^2}{2}(R-r)^2 \sin^2 \theta$$

in cui si è omessa la costante $mr^2\Omega^2/8$.

Equazioni del moto

Si riducono alla sola equazione di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \text{con} \quad \mathcal{L} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 + U(\theta)$$

e quindi alla

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - \frac{\partial U}{\partial \theta}(\theta) = 0.$$

(b) Configurazioni di equilibrio e stabilità*Configurazioni di equilibrio*

Sono i punti critici del potenziale totale U e soddisfano perciò l'equazione

$$-mg(R-r) \sin \theta + k(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta + m\Omega^2(R-r)^2 \sin \theta \cos \theta = 0$$

che potendosi porre nella forma $\sin \theta [(m\Omega^2 + k)(R-r) \cos \theta - mg] = 0$, porta a considerare separatamente le due equazioni:

$$\sin \theta = 0 \tag{15.2a}$$

$$\cos \theta = \frac{mg}{(R-r)(m\Omega^2 + k)}. \tag{15.2b}$$

La (15.2a) ammette *sempre* e soltanto le soluzioni

$$\theta_1 \equiv 0 \quad \theta_2 \equiv \pi$$

— oltre a quelle che coincidono con le precedenti modulo 2π e che possono ignorarsi causa la periodicità del potenziale. L'equazione (15.2b) presenta soluzioni, distinte da θ_1 e θ_2 se e soltanto se

$$(\text{sempre } 0 <) \quad \frac{mg}{(R-r)(m\Omega^2 + k)} < 1 \tag{15.3}$$

nel qual caso esse risultano

$$\theta_3 \equiv \arccos \left[\frac{mg}{(R-r)(m\Omega^2 + k)} \right] \in (0, \pi/2) \quad \text{e} \quad \theta_4 \equiv -\theta_3 \in (-\pi/2, 0).$$

Si osservi che qualora $\frac{mg}{(R-r)(m\Omega^2+k)} = 1$ le radici θ_3 e θ_4 coincidono con θ_1 , già considerata come soluzione della (15.2a).

Stabilità delle configurazioni di equilibrio

Si ha preliminarmente l'espressione per la derivata seconda

$$U''(\theta) = -mg(R-r)\cos\theta + k(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + m\Omega^2(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

e di conseguenza

$$U''(\theta) = -mg(R-r)\cos\theta + (m\Omega^2+k)(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Per brevità si pone inoltre

$$\lambda \equiv \frac{mg}{(R-r)(m\Omega^2+k)}. \quad (15.4)$$

Si procedere quindi all'analisi di stabilità delle singole configurazioni di equilibrio calcolate.

Configurazione θ_1

Vale $U''(\theta_1) = -mg(R-r) + (m\Omega^2+k)(R-r)^2$ e si distinguono perciò i casi seguenti:

- se $U''(\theta_1) < 0$ la configurazione θ_1 è un massimo relativo proprio di U , e risulta quindi stabile per il teorema di Lagrange-Dirichlet. Ciò accade per $1 < \lambda$;
- se $U''(\theta_1) > 0$ si ha instabilità — l'“hessiana” del potenziale presenta un “autovalore” positivo. La condizione ricorre se e solo se $1 > \lambda$;
- se infine $U''(\theta_1) = 0$ ricorre un caso critico e si rende necessario esaminare le derivate di ordine superiore al secondo. In particolare

$$U'''(\theta) = mg(R-r)\sin\theta - 4(m\Omega^2+k)(R-r)^2\sin\theta\cos\theta$$

per cui $U'''(\theta_1) = 0$, ed inoltre

$$U^{(4)}(\theta) = mg(R-r)\cos\theta - 4(m\Omega^2+k)(R-r)^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

con $U^{(4)}(\theta_1) = mg(R-r) - 4(m\Omega^2+k)(R-r)^2 = -3mg(R-r) < 0$. Si è fatto uso dell'identità $U''(\theta_1) = 0$, ovvero $(R-r)(m\Omega^2+k) = mg$. In conclusione

$$U(\theta) = U(\theta_1) - 3mg(R-r)\frac{(\theta - \theta_1)^4}{4!} + o((\theta - \theta_1)^4) \quad (\theta \rightarrow \theta_1)$$

e quindi θ_1 è un massimo relativo proprio di U , stabile per Lagrange-Dirichlet.

Configurazione θ_2

Risulta sempre instabile, in quanto la derivata seconda del potenziale si scrive

$$U''(\theta_2) = mg(R - r) + (m\Omega^2 + k)(R - r)^2 > 0.$$

Configurazioni θ_3 e θ_4

Si osservi anzitutto che U è una funzione pari: $U(-\theta) = U(\theta) \forall \theta \in \mathbb{R}$, dimodoché θ_3 e θ_4 avranno le stesse proprietà di stabilità. È sufficiente discutere la configurazione θ_3 . Un semplice calcolo porge

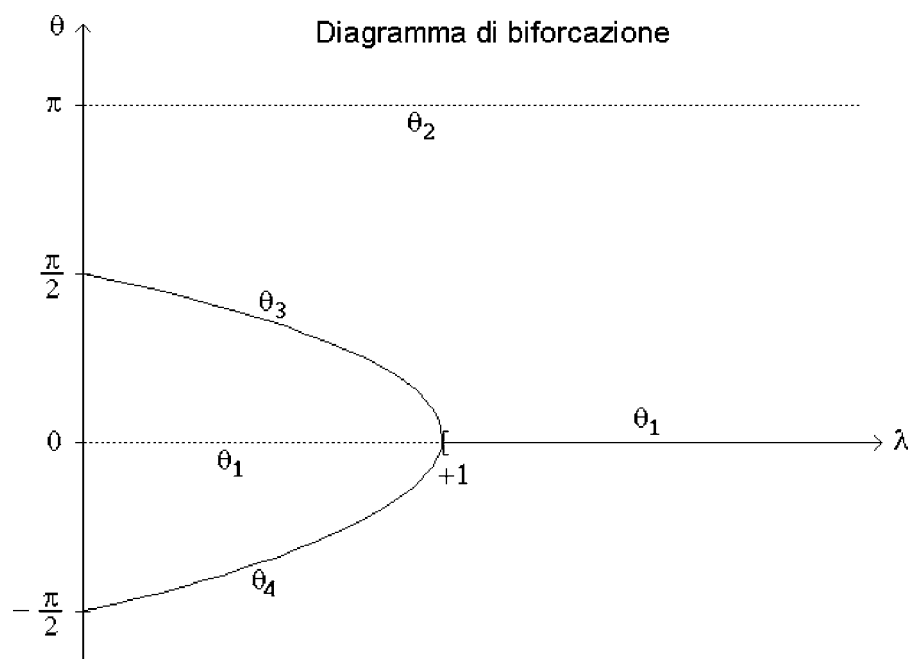
$$U''(\theta_3) = -mg(R - r)\lambda + (R - r)^2(2\lambda^2 - 1)(m\Omega^2 + k) = -(m\Omega^2 + k)(R - r)^2(1 - \lambda^2) < 0$$

in forza della condizione di esistenza (15.3). Dunque θ_3 e θ_4 se definite sono sempre massimi relativi propri del potenziale U e stabili per Lagrange-Dirichlet.

(c) Diagramma di biforcazione e ritratti di fase

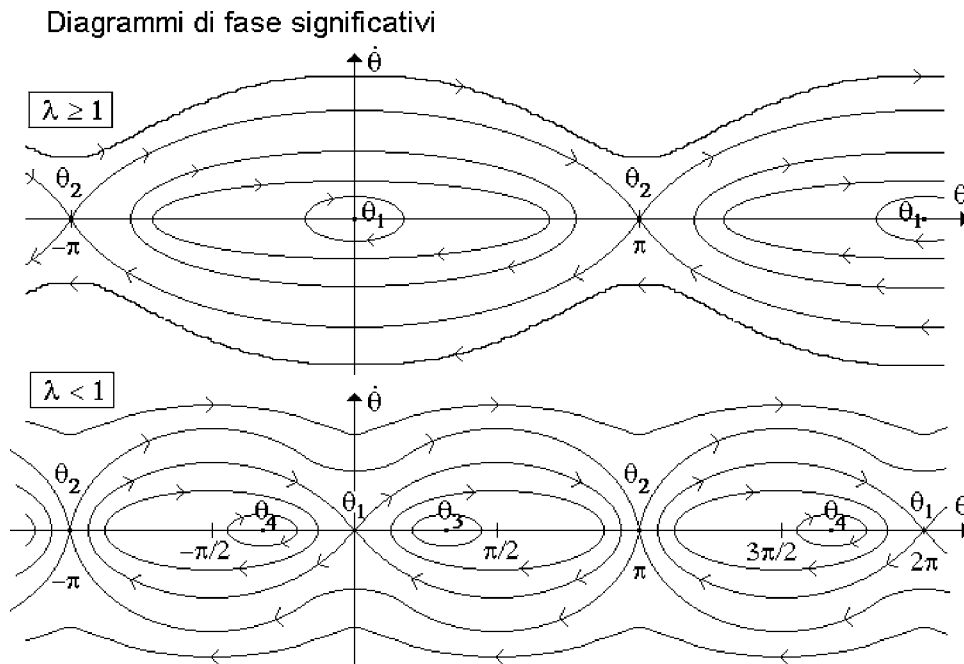
Diagramma di biforcazione

Il diagramma di biforcazione del sistema si può ora determinare facilmente dall'analisi suesposta e viene illustrato nella figura seguente.



Ritratti di fase significativi

Si hanno i diagrammi di fase più significativi per $\lambda \geq 1$, allorquando esistono due sole configurazioni di equilibrio θ_1 e θ_2 , e per $\lambda < 1$ — quando le configurazioni di equilibrio risultano quattro.



(d) Piccole oscillazioni

Possono essere determinate soltanto per le configurazioni di equilibrio stabili, purché si abbia $U'' < 0$. Tali condizioni ricorrono per le configurazioni θ_3 e θ_4 , nonché per la configurazione θ_1 , ma limitatamente al caso $\lambda > 1$.

- o *Soluzione θ_1 per $\lambda > 1$*

Nell'intorno di $\theta_1 = 0$ il potenziale U assume la forma

$$\begin{aligned}
 U(\theta) &= U(\theta_1) + \frac{U''(\theta_1)}{2}(\theta - \theta_1)^2 + o((\theta - \theta_1)^2) = \\
 &= U(\theta_1) + \frac{(m\Omega^2 + k)(R - r)^2}{2}(1 - \lambda)(\theta - \theta_1)^2 + o((\theta - \theta_1)^2)
 \end{aligned}
 \tag{\theta \rightarrow \theta_1}$$

e la lagrangiana delle piccole oscillazioni risulta

$$\mathcal{L}_{p.o.} = \frac{3}{4}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1 - \lambda}{2}(m\Omega^2 + k)(R - r)^2\theta^2$$

con l'equazione del moto linearizzata

$$\frac{3}{2}m(R - r)^2\ddot{\theta} + (\lambda - 1)(m\Omega^2 + k)(R - r)^2\theta = 0.$$

La pulsazione vale

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{2}{3}(\lambda - 1)}\sqrt{\Omega^2 + \frac{k}{m}} \quad \text{--- } \lambda > 0 \text{ ---}$$

ed il periodo

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2(\lambda-1)}} \frac{1}{\sqrt{\Omega^2 + \frac{k}{m}}}.$$

Si osservi che le espressioni sono dimensionalmente corrette.

◦ Soluzioni θ_3 e θ_4 — definite solo per $\lambda < 1$ —

Nell'intorno di θ_3 si ha

$$\begin{aligned} U(\theta) &= U(\theta_3) + \frac{U''(\theta_3)}{2}(\theta - \theta_3)^2 + o((\theta - \theta_3)^2) = \\ &= U(\theta_3) - \frac{1-\lambda^2}{2}(m\Omega^2 + k)(R-r)^2(\theta - \theta_3)^2 + o((\theta - \theta_3)^2) = \quad (\theta \rightarrow \theta_3) \\ &= U(\theta_3) - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}mg(R-r)(\theta - \theta_3)^2 + o((\theta - \theta_3)^2) \end{aligned}$$

e quindi la lagrangiana delle piccole oscillazioni si scrive

$$\mathfrak{L}_{p.o.} = \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}mg(R-r)(\theta - \theta_3)^2$$

alla quale corrisponde l'equazione del moto linearizzata

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + \frac{1-\lambda^2}{\lambda}mg(R-r)(\theta - \theta_3) = 0.$$

Di qui si deduce l'espressione per la pulsazione

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{1-\lambda^2}{\lambda}} \sqrt{\frac{g}{R-r}} \quad (\lambda \in (0, 1))$$

e quella per il periodo

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = 2\pi \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\lambda}{1-\lambda^2}} \sqrt{\frac{R-r}{g}}$$

entrambe corrette dal punto di vista dimensionale.

Osservazione

Poiché il sistema è ad un grado di libertà, con sole sollecitazioni posizionali conservative, le piccole oscillazioni nell'intorno delle configurazioni di equilibrio — massimi relativi propri del potenziale U — possono essere studiate *esattamente* con il metodo di Weierstrass. Vale infatti

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}^2 - U(\theta) = E, \quad \text{costante.}$$