

## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Esercizi svolti e discussi dal prof. Gianluigi Trivia  
(scritto con Lyx - www.lyx.org)

### 1. ENERGIA POTENZIALE

**Exercise 1.** Su di una particella agisce solo la forza conservativa  $\mathbf{F}$ . Se la particella si trova nel punto  $A$ , l'energia potenziale del sistema è di  $40 J$ . Se la particella si muove dal punto  $A$  al punto  $B$ , il lavoro svolto sulla particella da  $\mathbf{F}$  è pari  $+25 J$ . Trovare l'energia potenziale del sistema quando la particella è in  $B$ .

**Soluzione:** Se la forza in questione è conservativa, allora il lavoro compiuto per andare da  $A$  a  $B$  è indipendente dalla traiettoria seguita, ma dipende solo dalla differenza di potenziale tra i due punti. Tra i due punti, si ha  $\Delta U = -L = -25$ , e in  $B$ , l'energia potenziale sarà

$$U_B = 40 - 25 = 15 J$$

**Exercise 2.** Determinare la costante di una molla che immagazzina  $25 J$  di energia potenziale elastica quando viene compressa di  $7.5 cm$  rispetto alla sua posizione di equilibrio.

**Soluzione:** Nel momento in cui la molla viene rilasciata, la sua energia potenziale si trasforma in cinetica del corpo eventualmente ad essa attaccato. L'energia potenziale di una molla si esprime come

$$\Delta U = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2) \text{ se}$$

assumiamo come zero, il potenziale nella posizione di equilibrio, si ha

$$\Delta U = \frac{1}{2}kx^2$$

da cui

$$k = \frac{2\Delta U}{x^2} = \frac{2 \cdot 25 J}{(0.075 m)^2} = 8889 \frac{N}{m}$$

**Exercise 3.** Si lasci cadere un libro di massa  $2.0 kg$  fra le braccia di una persona che si trova  $10 m$  più in basso. Ponendo uguale a zero l'energia potenziale a livello del suolo, trovare 1) l'energia potenziale del libro all'istante in cui inizia la propria caduta; 2) l'energia cinetica del libro appena prima che la persona lo afferri con le mani tese poste a  $1.5 m$  dal suolo; 3) la velocità di caduta del libro in quel momento.

**Soluzione:** Assumendo come nulla l'energia potenziale al suolo, si può dire l'energia potenziale sollevato da terra è data da

$$U = mgh$$

dove  $mg$  è la forza peso che lo trascina verso il basso. Nell'istante d'inizio della caduta la distanza dal suolo è pari a  $10 m$ , per cui

$$U_{10} = 2.0 kg \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 10 m = 196 J$$

Se il libro viene afferrato a  $1.5 m$  l'energia posseduta in questo punto sarà

$$U_{1.5} = 2.0 kg \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 1.5 m = 29.4 J$$

La differenza di potenziale esprimerà l'energia cinetica acquisita dal libro durante la caduta sotto l'azione del peso

$$K = \Delta U = (196 - 29.4) J = 166.6 J$$

Poiché l'energia cinetica è espressa da  $K = \frac{1}{2}mv^2$ , in questa posizione avrà una velocità

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 166.6 J}{2.0 kg}} = 12.9 \frac{m}{s}$$

**Exercise 4.** Una scheggia di ghiaccio è lasciata scivolare dal bordo in una coppa semisferica di raggio  $22 cm$ , priva di attrito. Determinare la velocità che possiede la scheggia quando arriva in fondo alla coppa.

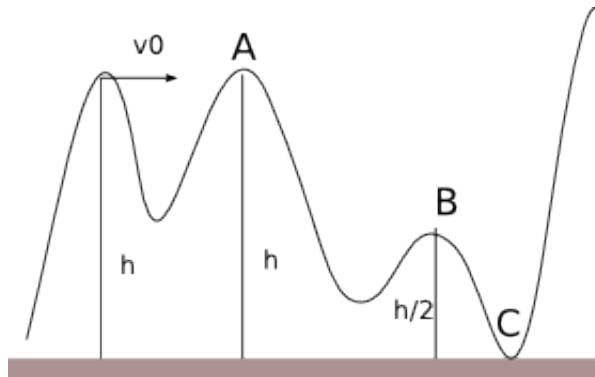
**Soluzione:** Se si trascura l'attrito, la forza agente è conservativa e quindi il lavoro da essa compiuto dipende solo dalla posizione iniziale e finale. In questo caso, rispetto alla posizione più bassa a potenziale nullo, il dislivello è pari al raggio; tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica, cioè

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

risolvendo rispetto a  $v$ , si ottiene

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.22 m} = 2.1 \frac{m}{s}$$

**Exercise 5.** Il carrello di massa  $m$  di un ottovolante, privo di attrito, arriva in cima alla prima gobba in figura alla velocità  $v_0$ . Trovare la sua velocità nel punto  $A$ , nel punto  $B$  e nel punto  $C$ . Determinare infine l'altezza sulla salita per l'ultima gobba, che è troppo alta per essere superata.



**Soluzione:** Il punto  $A$  si trova alla stessa dal suolo e quindi il carrello possiederà la stessa velocità  $v_0$ ; nel punto  $B$ , si trova ad un'altezza pari alla metà di quella iniziale; in tal caso la sua energia potenziale si è in parte trasformata in energia cinetica aumentando quindi la propria la velocità. Calcoliamo tale velocità  $v_B$ . L'energia potenziale (distanza dal suolo  $h/2$ ) sarà

$$U = \frac{1}{2}mgh$$

quindi

$$\Delta U = mgh - \frac{1}{2}mgh = \frac{1}{2}mgh$$

La velocità in  $A$  ha solo componente orizzontale, cioè  $v_{Ay} = 0$ . La componente verticale cresce durante la caduta

$$v_{By} = \sqrt{2 \frac{h}{2}g} = \sqrt{hg}$$

La velocità in  $B$  sarà la somma delle due componenti

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + hg}$$

Nel punto  $C$  la sua velocità avrà massima componente verticale e invariata componente orizzontale

$$v_C = \sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

Questa velocità si riduce durante la salita finale fino ad annullarsi nel punto di massima altezza. Nel punto  $C$  il carrello possiede una energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv_C^2$$

tale energia si trasforma completamente, in assenza di attrito, in energia potenziale  $U = mgh$ . Uguagliando le due quantità è possibile determinare l'altezza massima raggiungibile

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mgh_{max}$$

da cui

$$h_{max} = \frac{v_C^2}{2g} = \frac{v_0^2 + 2hg}{2g} = \frac{v_0^2}{2g} + h$$

**Exercise 6.** Una palla di massa  $m$  è attaccata all'estremità di un'asticella leggerissima di lunghezza  $L$  e massa trascurabile. L'altro estremo dell'asticella è fissata a un perno che consente alla palla di descrivere una circonferenza in un piano verticale. L'asticella tenuta in posizione orizzontale riceve una spinta verso il basso sufficiente a far ruotare la palla fino a raggiungere la posizione più alta sulla verticale, dove la sua velocità si annulla. Trovare la variazione di energia potenziale della palla e la velocità iniziale impressale.

**Soluzione:** La rotazione avviene su un piano verticale. In tali condizioni la forza peso non è controbilanciata e compie lavoro facendo cadere la palla lungo una traiettoria di un quarto di circonferenza, a causa del vincolo. Essa però non è in grado di far risalire la palla verso la posizione più alta; è necessaria quindi una forza aggiuntiva. Assumiamo che il valore dell'energia potenziale sia nullo nel punto più basso della traiettoria. La palla supera, cadendo, un dislivello  $L$ . L'energia potenziale nel punto di partenza, in posizione orizzontale, con la scelta fatta, è

$$U_{oriz} = mgL$$

Quando si trova nella posizione più alta, sarà ad una distanza  $2L$  dalla posizione più bassa, e l'energia potenziale sarà

$$U_{max} = 2mgL$$

La variazione sarà

$$\Delta U = mgL$$

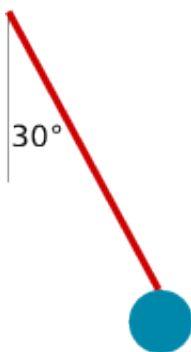
La sola forza peso consentirebbe di raggiungere una altezza  $L$ , nel verso opposto a quello iniziale; pertanto la forza aggiuntiva è tale da compiere un lavoro pari a  $mgL$  fornendo così un'energia cinetica

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgL$$

da cui la velocità

$$v = \sqrt{2gL}$$

**Exercise 7.** Un'asticella leggerissima di lunghezza  $L = 2.00\text{ m}$  e massa trascurabile è fissata a un perno che le consente di descrivere un cerchio in un piano verticale. Una palla pesante di massa  $m$  è fissata all'estremità inferiore. L'asticella è spostata lateralmente di un angolo  $\theta = 30^\circ$ , vedi figura, e qui lasciata libera. Trovare la velocità con la quale si muoverà la palla passando per il punto più basso.



**Soluzione:** La massa  $m$  nella posizione più bassa si troverà a  $2.00\text{ m}$  dal perno dell'asta. Se la palla viene spostata in avanti, descrivendo un arco di circonferenza, si troverà ad una altezza superiore rispetto al livello del punto più basso. Calcoliamo di quanto si «alza» la palla (l'angolo di  $30^\circ$  consente di utilizzare la geometria di un triangolo equilatero, nel quale la lunghezza dell'asta rappresenta il lato e la posizione del vertice occupato dalla palla rispetto al punto inferiore è indicata dall'altezza; la relazione che lega altezza e lato di un triangolo equilatero è  $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ ):

$$d = L - \frac{L\sqrt{3}}{2} = 2.00 \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{2} \right) m = 0.27\text{ m}$$

La palla acquisterà quindi una energia potenziale, rispetto al punto più basso assunto con en. potenziale nulla,

$$U = mgd = m \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 0.27\text{ m} = 2.6\text{ m (J)}$$

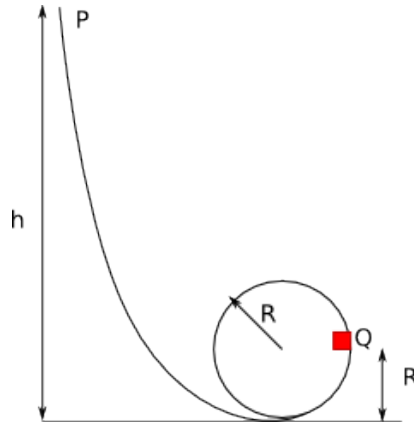
In tale posizione, se la palla viene lasciata ricadere acquisterà, nel punto più basso, una energia cinetica pari a quella potenziale, cioè

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgd = 2.6\text{ m}$$

semplificando  $m$  e risolvendo rispetto a  $v$ , si ha

$$v = \sqrt{5.2 \frac{m^2}{s^2}} = 2.3 \frac{m}{s}$$

**Exercise 8.** Un blocchetto di massa  $m$  scivola senza attrito lungo una guida ripiegata ad anello come in figura. Se parte da fermo in  $P$ , trovare la forza risultante che agisce su di esso nel punto  $Q$  (supporre  $h = 5R$ ). Trovare poi da quale altezza rispetto al fondo dell'anello deve scendere il blocchetto perché la forza esercitata contro la guida nel vertice dell'anello sia uguale al suo peso.



**Soluzione:** Il blocchetto in fase di caduta supera un dislivello uguale ad  $h$ . Se supponiamo che l'attrito sia trascurabile, il corpo acquista una energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

(Si noti che l'energia potenziale del blocco in  $P$ , viene trasformata, in fase di discesa, in energia cinetica). Giunto nel punto più basso, il blocco risale trasformando la sua energia cinetica, di nuovo, in energia potenziale. Nel punto  $Q$ , l'energia potenziale vale

$$U = mgR$$

in questo punto il blocco avrà una energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv_Q^2$$

L'energia totale, nell'ipotesi non dispersiva, è pari all'energia potenziale del blocco in  $P$ , partendo esso da fermo,

$$E = mgh = 5mgR$$

quindi in  $Q$  si ha

$$\frac{1}{2}mv_Q^2 + mgR = 5mgR$$

eliminando  $m$ , e risolvendo rispetto a  $v$ , si ricava

$$v_Q^2 = 8gR$$

Le forze che agiscono in  $Q$  sono la forza centripeta e la forza peso

$$F_c = \frac{mv^2}{R} = 8mg \quad P = mg$$

sommando vettorialmente, si ha

$$F = mg\sqrt{64 + 1} = 8.06mg$$

e la direzione è caratterizzata dall'angolo

$$\alpha = \arctan\left(\frac{8mg}{mg}\right) = 82.9^\circ$$

Secondo punto: Analizziamo il quesito dal punto di vista energetico, tenendo conto che l'energia totale si conserva.

- nel punto  $P$ : En. potenziale  $U_P = mgh$  e En. cinetica  $K_P = 0$
- nel punto più basso  $A$ : En. pot.  $U_A = 0$  e En. cin.  $K_A = \frac{1}{2}mv_A^2$

nel punto più alto del ricciolo  $B$ :  $U_B = 2mgR$  e  $K_B = \frac{1}{2}mv_B^2$ . Ora, applicando la conservazione dell'energia totale

$$2mgR + K = mgh$$

da cui

$$K = mg(h - 2R) = \frac{1}{2}v_B^2$$

da cui si ricava

$$v_B^2 = 2g(h - 2R)$$

Nel punto  $B$ , pertanto, affinché il blocco stia per perdere contatto è necessario che la forza vincolare esercitata dalla guida sia uguale al peso; ma la forza vincolare è la forza centripeta, per cui

$$mg = \frac{mv_B^2}{R}$$

sostituendo  $v_B^2$  ottenuto prima, si ha

$$g = \frac{2g(h - 2R)}{R}$$

cioè, eliminando  $g$

$$R = 2h - 4R$$

da cui si ottiene

$$h = \frac{5}{2}R$$

## 2. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA

**Exercise 9.** Un uomo di  $70.0\text{ kg}$  salta da una finestra nella rete dei vigili del fuoco tesa  $11.0\text{ m}$  più in basso. La rete, cedendo di  $1.5\text{ m}$ , riesce ad arrestarlo, per rilanciarlo subito dopo verso l'alto. Calcolare l'energia potenziale delle rete tesa al massimo se l'energia meccanica è conservata.

**Soluzione:** la conservazione dell'energia meccanica presuppone che l'uomo ritorni indietro con la stessa velocità con la quale aveva colpito la rete, cioè che l'energia cinetica acquisita nella caduta venga spesa per estendere la rete. La forza elastica della rete compie un lavoro di richiamo che riporta l'uomo nella posizione iniziale (conservazione energia meccanica)

$$\Delta U = mg(h_i - h_f) = 70.0\text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (11.0 + 1.5)\text{ m} = 8575\text{ J}$$

**Exercise 10.** Un'autocisterna fuori controllo per un guasto ai freni sta scendendo a precipizio a  $130\text{ km/h}$ . Vicino al termine della discesa si trova però una rampa di emergenza in contropendenza di  $15^\circ$ . Trovare la lunghezza minima affinché la cisterna si possa fermare almeno per un momento.

**Soluzione:** Dal testo appare che la velocità della cisterna è costante. È necessario, pertanto, calcolare il tratto di strada percorsa lungo un piano inclinato di  $15^\circ$ , affinché tale velocità si annulli. Con un tale angolo, si ha

$$\tan 15^\circ = \frac{h}{L}$$

dove  $h$  e  $L$  sono rispettivamente l'altezza e la lunghezza del nostro piano inclinato. Il punto in cui la cisterna si ferma è quello nel quale tutta l'energia cinetica si trasforma in energia potenziale, cioè

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$

da cui

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\left(\frac{130\text{ m}}{3.6\text{ s}}\right)^2}{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 66.5\text{ m}$$

Ne deriva che

$$L = \frac{h}{\tan 15^\circ} = \frac{66.5\text{ m}}{\tan 15^\circ} = 248\text{ m}$$

**Exercise 11.** Una pietra di massa  $8\text{ kg}$  comprime una molla di  $10.0\text{ cm}$ . Trovare la costante della molla. La pietra viene poi spinta in giù di altri  $30.0\text{ cm}$  e poi rilasciata. Trovare l'energia potenziale della molla subito prima del rilascio. Determinare l'altezza oltre la posizione di rilascio alla quale la pietra può arrivare.

**Soluzione:** Il peso della pietra comprime la molla. Calcolo il peso della pietra

$$P = mg = 8 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 78.4 \text{ N}$$

Se la molla è compressa di  $10.0 \text{ cm}$ , la costante si ottiene da  $F = -k\Delta x$ ,

$$k = \frac{78.4 \text{ N}}{0.10 \text{ m}} = 784 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

L'energia potenziale di una molla è pari a  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , pertanto, l'energia potenziale prima del rilascio, tenendo conto di una compressione totale di  $30.0 + 10.0 = 40.0 \text{ cm}$  è

$$U = \frac{1}{2} \cdot 784 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0.40)^2 \text{ m}^2 = 62.7 \text{ J}$$

la molla, se rilasciata, rilancia la pietra in alto. L'energia disponibile è pari all'energia potenziale accumulata. Supponiamo che tale energia si trasformi interamente in energia cinetica  $K = \frac{1}{2}mv^2$ ; la pietra acquisterà una velocità

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 62.7 \text{ J}}{8 \text{ kg}}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

poiché  $v = \sqrt{2gh}$ , l'altezza raggiungibile sarà

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.82 \text{ m}$$

**Exercise 12.** Una biglia di  $5.0 \text{ g}$  viene lanciata verticalmente verso l'alto con una molla. Affinché la biglia colpisca un bersaglio posto a  $20 \text{ m}$ , la molla deve essere compressa di  $8.0 \text{ cm}$ . Calcolare la variazione di energia potenziale gravitazionale della biglia durante la fase ascensionale; trovare infine la costante della molla.

**Soluzione:** L'energia potenziale gravitazionale è espressa dalla relazione  $U = mgh$ . Ad un'altezza di  $20 \text{ m}$  rispetto al riferimento ( $U = 0$ ) il suo valore è

$$U = 0.005 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 20 \text{ m} = 0.98 \text{ J}$$

In tal caso, essendo l'energia potenziale elastica espressa da  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , la costante della molla sarà

$$k = \frac{2U}{x^2} = \frac{2 \cdot 0.98 \text{ J}}{0.08^2 \text{ m}^2} = 306 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

**Exercise 13.** La forza della molla di un fucile caricato a tappo è espressa dalla relazione  $F = -10\Delta x$ , dove  $[F] = \text{N}$  e  $[\Delta x] = \text{m}$ . La molla è compressa di  $5.5 \text{ cm}$  ed è usata per sparare un tappo di  $3.8 \text{ g}$ . Trovare la velocità del tappo se è lasciato libero quando la molla passa per la sua posizione di riposo; supponiamo invece che il tappo rimanga attaccato alla molla, e l'abbandoni solo dopo averla allungata di  $1.5 \text{ cm}$ . Trovare in questo caso la velocità del tappo al momento del rilascio.

**Soluzione:** Comprime la molla di  $0.055 \text{ m}$ . la molla acquista una energia potenziale

$$U = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0.055)^2 = 0.015 \text{ J}$$

se tutta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica del tappo, si può calcolare la velocità di quest'ultimo

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.015 \text{ J}}{3.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} = 2.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nel secondo caso parte dell'energia potenziale della molla viene spesa per allungare la molla; essa vale

$$U = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (0.015)^2 = 0.011 \text{ J}$$

e la velocità

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.011 \text{ J}}{3.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} = 2.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Exercise 14.** Un blocco di  $2.00 \text{ kg}$  è appoggiato contro una molla su di un piano inclinato con una pendenza di  $30^\circ$ , privo di attrito. La molla, avente costante  $k = 19.6 \text{ N/cm}$ , è compressa di  $20 \text{ cm}$  e poi lasciata libera. Determinare di quanto il blocco risale lungo il piano inclinato.

**Soluzione:** Il blocco, in assenza della molla, tende a scendere lungo il piano inclinato, spinto da una forza  $P_{par} = \frac{h}{l}P$ ; nel nostro caso, con l'angolo di inclinazione di  $30^\circ$ , si ha  $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$ , per le proprietà del triangolo equilatero:

$$P_{par} = 0.5 \cdot 2.00 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9.8 \text{ N}$$

Tale forza,  $F = k\Delta x$  comprime la molla di

$$\Delta x = \frac{9.8 \text{ N}}{1960 \frac{\text{N}}{\text{m}}} = 5.0 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.5 \text{ cm}$$

Tale compressione serve quindi a mantenere in equilibrio il blocco sul piano inclinato. La compressione che consente al blocco di risalire sarà quindi pari a  $19.5 \text{ cm}$ . A tale compressione corrisponde un'energia potenziale

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = 0.5 \cdot 1960 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0.195)^2 \text{ m}^2 = 37.3 \text{ J}$$

Quando il blocco viene rilasciato l'energia potenziale elastica diviene energia cinetica, cioè  $K = \frac{1}{2}kx^2$ ; l'energia totale del blocco, indicando con  $U_G$  l'energia potenziale gravitazionale dovuta all'altezza del blocco sul piano inclinato, è

$$E_i = \frac{1}{2}kx^2 + U_G$$

mentre l'energia totale finale, cioè quando il blocco esaurisce la propria spinta,

$$E_f = 0 + U_G^1$$

L'energia totale si conserva e quindi

$$\Delta U_G = 37.3 \text{ J}$$

Ma  $\Delta U_G = mgh$ , dove  $h$  è misurato in direzione verticale, per cui

$$h = \frac{37.3 \text{ J}}{2 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 2 \text{ m}$$

Lo spostamento lungo il piano inclinato di  $30^\circ$ , che corrisponde ad un tale innalzamento verticale è di  $4 \text{ m}$ .

**Exercise 15.** Una molla può essere compressa di  $2.0 \text{ cm}$  da una forza di  $270 \text{ N}$ . Un blocco di massa  $12 \text{ kg}$ , inizialmente fermo in cima al piano inclinato privo di attrito inclinato di  $30^\circ$  rispetto all'orizzontale, viene lasciato andare. Il blocco si arresta momentaneamente dopo aver compresso la molla di  $5.5 \text{ cm}$ . Trovare di quanto si è spostato lungo il piano inclinato in questo momento e la velocità del blocco quando arriva a toccare la molla.

**Soluzione:** Determiniamo il coefficiente di elasticità della molla dai dati che fanno riferimento ad essa, cioè una compressione di  $2.0 \text{ cm}$  con una forza di  $270 \text{ N}$ .

$$k = \frac{F}{\Delta x} = \frac{270 \text{ N}}{2 \text{ cm}} = 135 \frac{\text{N}}{\text{cm}}$$

Quando il blocco è fermo ad un'altezza  $h$ , la sua  $U = mgh$  e la sua  $K = 0$ . Nell'istante prima di urtare la molla, la sua  $U = mgh'$  (con  $h > h'$ ) e la sua  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . La molla viene compressa di  $5.5 \text{ cm}$ , acquistando una energia potenziale elastica  $U = \frac{1}{2}k\Delta x^2$  a scapito dell'energia cinetica  $\frac{1}{2}mv^2$  acquisita dal blocco lungo la caduta. Pertanto:

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = mg(h - h')$$

da cui

$$h - h' = \frac{k}{2gm} \Delta x^2 = \frac{135 \frac{\text{N}}{\text{cm}}}{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 12 \text{ kg}} (5.5)^2 \text{ cm}^2 = 17.4 \text{ cm}$$

Il valore trovato indica il dislivello, ma in un piano inclinato di  $30^\circ$  la lunghezza percorsa è doppia del dislivello, per cui

$$\Delta l = 35 \text{ cm}$$

La velocità si desume dall'energia cinetica acquistata lungo la discesa

$$v^2 = \sqrt{2g(h - h')} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.174 \text{ m}} = 1.85 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Exercise 16.** Un proiettile di  $0.55 \text{ kg}$ , lanciato dalla cresta di una collina con energia cinetica iniziale di  $1550 \text{ J}$ , raggiunge la quota massima di  $140 \text{ m}$  sopra il punto di lancio. Trovare la componente orizzontale della sua velocità; la componente verticale subito dopo il lancio. A un certo istante durante il volo la componente verticale della velocità è  $65 \text{ m/s}$ . In quell'istante quanto è più alto, o più basso, del punto di lancio?

**Soluzione:** Nota l'energia cinetica e la massa del proiettile, è possibile calcolare la sua velocità di lancio

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1550 \text{ J}}{0.55 \text{ kg}}} = 75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Il proiettile sale verso l'alto fino a  $140 \text{ m}$  al di sopra del punto di lancio, acquistando in tal modo energia potenziale a scapito della cinetica

$$U = mgh = 0.55 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 140 \text{ m} = 755 \text{ J}$$

Per la conservazione dell'energia meccanica, il proiettile disporrà di una

$$K = 1550 - 755 = 795 \text{ J}$$

Tale energia è legata alla sola componente orizzontale della velocità, essendo il proiettile nel suo punto di massima altezza, dove la  $v_y = 0$ . Pertanto la componente orizzontale varrà

$$v_x = \sqrt{\frac{2 \cdot 795 \text{ J}}{0.55 \text{ kg}}} = 54 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La componente orizzontale del moto di un proiettile, escludendo ogni elemento dispersivo, rimane costante, cioè il proiettile si muove orizzontalmente secondo una legge di moto rettilineo uniforme. Pertanto è possibile calcolare la componente verticale iniziale, nota la velocità iniziale di  $75 \text{ m/s}$ , applicando il th. di Pitagora al triangolo formato da questi vettori

$$v_{0y} = \sqrt{75^2 - 54^2} = 52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La variazione della componente verticale della velocità è descritta dalle relazioni del moto uniformemente accelerato

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$$

sostituendo i nostri valori e risolvendo rispetto a  $y$ , si ha

$$y = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g} = \frac{52^2 - 65^2}{2 \cdot 9.8} = -77 \text{ m}$$

cioè si trova  $77 \text{ m}$  al di sotto.

**Exercise 17.** Una palla di  $50 \text{ g}$  è scagliata da una finestra con velocità iniziale di  $8.0 \text{ m/s}$  a un angolo di  $30^\circ$  sopra il piano orizzontale. Determinare, con le leggi relative all'energia, l'energia cinetica della palla nel punto più alto della sua traiettoria; la sua velocità quando passa  $3.0 \text{ m}$  sotto la finestra.

**Soluzione:** Nel punto più alto della traiettoria, la componente verticale della velocità si riduce a zero, e la palla è dotata della sola componente orizzontale, il cui valore è

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

la sua energia cinetica sarà pertanto

$$K = \frac{1}{2}mv_x^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.05 \text{ kg} \cdot 49 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 1.2 \text{ J}$$

Quando la palla si trova  $3 \text{ m}$  al di sotto del punto di partenza, la sua energia cinetica è aumentata a scapito della riduzione della sua energia potenziale. Calcoliamo l'altezza massima alla quale arriva la pallina, assumendo come riferimento il punto di lancio

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{64 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{4}}{2 \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 0.82 \text{ m}$$

pertanto la variazione dell'energia potenziale della palla vale

$$\Delta U = U_{max} - U = mg(h_{max} - h) = 0.05 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3.82 \text{ m} = 1.86 \text{ J}$$

L'energia cinetica della palla aumenta quindi di  $1.86 \text{ J}$ , raggiungendo il valore di  $K = 1.2 + 1.86 = 3.1 \text{ J}$ . La velocità in tale posizione vale

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.1 \text{ J}}{0.05 \text{ kg}}} = 11 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



**Exercise 18.** La molla di un fucile ha una costante  $k = 7.0 \text{ N/cm}$ . Puntando  $30^\circ$  sopra l'orizzontale, spara un proiettile di  $60 \text{ g}$  a un'altezza di  $1.8 \text{ m}$  sopra l'estremità della canna. Trovare la velocità del proiettile all'uscita della canna e la compressione iniziale della molla.

**Soluzione:** L'altezza massima del proiettile è raggiunta quando la componente verticale della velocità è nulla. Dalle relazioni del moto parabolico, si ottiene

$$h_{max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gh_{max}}{\sin^2 \theta_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 1.8 \text{ m}}{\sin^2 30^\circ}} = 12 \frac{m}{s}$$

Il proiettile esce quindi dotato di una energia cinetica

$$K = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.060 \text{ kg} \cdot 144 \frac{m^2}{s^2} = 4.32 \text{ J}$$

Tale energia è stata ottenuta a scapito dell'energia potenziale elastica della molla, quindi

$$4.32 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 700 \frac{N}{m} \cdot \Delta x^2$$

da cui

$$\Delta x = \sqrt{\frac{4.32 \text{ J}}{350 \frac{N}{m}}} = 0.11 \text{ m} = 11 \text{ cm}$$

**Exercise 19.** Su un piano inclinato di  $30^\circ$  rispetto all'orizzontale e senza attrito, è posto un corpo di massa  $1.0 \text{ kg}$ . Collegato tramite una corda che scorre in una carrucola priva di massa è sospeso un secondo corpo di massa  $2.0 \text{ kg}$ . Se il sistema da fermo è lasciato libero, trovare l'energia combinata delle due masse dopo che il corpo di massa  $2.0 \text{ kg}$  è sceso di  $25 \text{ cm}$ .

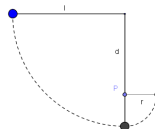
**Soluzione:** Se lasciati liberi, il corpo sul piano inclinato acquista l'energia potenziale persa dal corpo in caduta. Il corpo di massa  $2 \text{ kg}$  si sposta in verticale, mentre quello di massa  $1 \text{ kg}$ , si muove lungo il piano inclinato, percorrendo  $25 \text{ cm}$  sul piano e innalzandosi pertanto di

$$25 \text{ cm} \times 0.5 = 12.5$$

essendo il piano inclinato di  $30^\circ$ . La variazione di energia del sistema delle due masse sarà pari alla variazione della loro energia potenziale:

$$\Delta U = mgh - m'gh' = g(mh - m'h') = 9.8(2 \times 0.25 - 1 \times 0.125) = 3.7 \text{ J}$$

**Exercise 20.** La lunghezza del filo in figura è  $l = 120 \text{ cm}$ , e la distanza  $d$  del piolo  $P$  è  $75 \text{ cm}$ . Quando la palla, inizialmente ferma, è lasciata libera, oscillerà lungo l'arco tratteggiato. Trovare la velocità quando la palla raggiungerà il punto più basso.



**Soluzione:** La pallina cade lungo l'arco di raggio  $l$ , raggiungendo il punto più basso posto ad una analoga distanza  $l$  rispetto a quella iniziale. La forza peso è una forza conservativa e quindi la variazione della sua energia potenziale dipende solo dalla posizione iniziale e finale e non dal percorso compiuto. La velocità con cui la pallina arriverà nel punto più basso sarà quindi

$$v = \sqrt{2gl} = \sqrt{2 \times 9.8 \frac{m}{s} \times 1.20 \text{ m}} = 4.8 \frac{m}{s}$$

**Exercise 21.** Un blocco di  $2.0 \text{ kg}$  cade da un'altezza di  $40 \text{ cm}$  su una molla avente costante  $k = 1960 \text{ N/m}$ . Trovare la massima lunghezza di compressione della molla.

**Soluzione:** L'energia potenziale elastica di una molla è espressa da  $U = \frac{1}{2}kx^2$ . Il blocco riduce la propria energia potenziale di

$$\Delta U = mgh = 2.0 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0.40 \text{ m} = 7.8 \text{ J}$$

L'energia cinetica acquistata sarà pari alla diminuzione della sua energia potenziale,

$$\Delta U = K = 7.8 \text{ J}$$

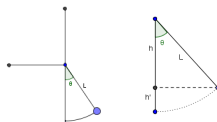
Tale energia verrà spesa per comprimere la molla che la acquisterà sotto forma di energia potenziale elastica

$$7.8 \text{ J} = \frac{1}{2} \cdot 1960 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \Delta x^2$$

da cui

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2 \cdot 7.8 \text{ J}}{1960 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0.09 \text{ m} = 9 \text{ cm}$$

**Exercise 22.** In un pendolo semplice di lunghezza  $L$ , il peso all'estremo inferiore, dove è concentrata tutta la massa, ha velocità  $v_0$  quando il filo forma un angolo  $\theta_0$  con la verticale. Trovare una equazione che esprima la velocità del blocchetto attaccato al filo nella sua posizione più bassa. Trovare poi il minimo valore di  $v_0$  affinché il filo del pendolo possa arrivare all'estremo dell'oscillazione in posizione orizzontale e in posizione verticale, rimanendo teso.



**Soluzione:** Osservando lo schema sopra, il segmento  $h' = L - h = L - L \cos \theta_0 = L(1 - \cos \theta_0)$ . L'incremento di velocità ottenuto cadendo lungo l'arco fino alla posizione in basso può essere ottenuto sia con le relazioni energetiche, sia con le relazioni della cinematica

$$v^2 = v_0^2 + 2gh' = v_0^2 + 2gL(1 - \cos \theta_0)$$

Se ora vogliamo trovare la velocità minima (quando cioè la pallina ha velocità nulla) nella posizione orizzontale, basta supporre che l'energia cinetica acquisita cadendo nella posizione in basso venga completamente trasformata in energia potenziale; cioè

$$mgL = \frac{1}{2}m [v_0^2 + 2gL(1 - \cos \theta_0)]$$

da cui

$$2gL = v_0^2 + 2gL(1 - \cos \theta_0) = v_0^2 + 2gL - 2gL \cos \theta_0$$

da cui

$$v_0 = \sqrt{2gL \cos \theta_0}$$

Se, infine, la pallina raggiunge il punto più alto, significa che può continuare a ruotare sulla circonferenza di raggio  $L$ . In tal caso l'energia cinetica nel punto più basso deve essere spesa per superare un dislivello pari a  $2L$ . Da ciò segue:

$$2mgL = \frac{1}{2}m [v_0^2 + 2gL(1 - \cos \theta_0)]$$

cioè

$$4gL = v_0^2 + 2gL - 2gL \cos \theta_0$$

da cui

$$v_0^2 = 2gL + 2gL \cos \theta_0$$

e

$$v_0 = \sqrt{2gL(1 + \cos \theta_0)}$$

**Exercise 23.** Due bambini stanno facendo una gara a chi riesce a centrare una scatoletta sul pavimento con una biglia sparata da una pistola a molla montata su un tavolo orizzontale. Il bersaglio è piazzato a  $2.20 \text{ m}$  in orizzontale dal bordo del tavolo. La molla viene compressa di  $1.10 \text{ cm}$ , ma il tiro risulta troppo corto di  $27.0 \text{ cm}$ . Determinare la compressione della molla per centrare il bersaglio.

**Soluzione:** La molla attribuisce alla biglia una velocità orizzontale, che possiamo supporre costante. La biglia segue una traiettoria parabolica sotto l'effetto della forza peso nel momento in cui la biglia non è più sostenuta dal tavolo. Le leggi che descrivono l'energia fornita dalla molla e il moto della pallina sono le stesse nei due casi. Possiamo pertanto ottenere la compressione della molla attraverso una semplice proporzione

$$0.011 m : 1.93 m = \Delta x : 2.20 m$$

da cui

$$\Delta x = 1.25 \text{ cm}$$

**Exercise 24.** Tarzan, che pesa  $688 N$ , salta da una roccia appeso ad una liana lunga  $18 m$ . Dall'alto della roccia al punto più basso della sua oscillazione cala di  $3.2 m$ . La liana è soggetta a rompersi se la tensione su di essa supera  $950 N$ . Arriverà a rompersi?

**Soluzione:** La corda deve reggere il peso di Tarzan e la forza centripeta dovuta alla rotazione della liana. Calcoliamo l'accelerazione centripeta, ricordando che la velocità nella parte più bassa della rotazione è calcolabile con

$$v^2 = 2gh = 2 \cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot 3.2 m = 62.7 \frac{m^2}{s^2}$$

per cui

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{62.7 \frac{m^2}{s^2}}{18 m} = 3.5 \frac{m}{s^2}$$

La massa di Tarzan è  $m = \frac{P}{g} = \frac{688 N}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 70.2 \text{ kg}$ . La forza centripeta è

$$F_c = ma_c = 70.2 \text{ kg} \cdot 3.5 \frac{m}{s^2} = 246 N$$

Sulla corda si sommano quindi le due forze

$$T = 688 N + 246 N = 934 N$$

per cui la corda, in grado di sostenere fino a  $950 N$ , non si romperà.

**Exercise 25.** Un'asticella rigida di lunghezza  $L$ , praticamente priva di massa, ha una palla di massa  $m$  fissata all'estremità, così da costituire un pendolo. Capovolgiamo il pendolo, con l'asticella verticale verso l'alto, e lasciamolo libero. Trovare la velocità della palla nel punto più basso e la tensione nell'asticella in quel punto. Lo stesso pendolo è poi messo fermo in posizione orizzontale e lasciato libero. Trovare l'angolo dalla verticale per il quale si equivalgono in modulo la tensione nell'asticella e il peso della palla.

**Soluzione:** L'asta è vincolata in un punto, che può essere pensato come il centro della circonferenza che il pendolo descrive nel suo moto di caduta e risalita. Assegnamo  $U = 0$  alla posizione più bassa; pertanto nella posizione iniziale con la palla in alto si avrà  $U = 2mgL$  e la velocità nel punto più basso, dove tutta l'energia potenziale si è trasformata in energia cinetica, sarà

$$2mgL = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui

$$v = \sqrt{4gL} = 2\sqrt{gL}$$

L'asta è supposta priva di massa e, nel punto più basso, dovrà equilibrare il peso della palla più la forza centripeta, che vale  $F_c = m\frac{v^2}{r} = m\frac{4gL}{L} = 4mg$ , cioè

$$T = mg + 4mg = 5mg$$

Se l'asta è messa in orizzontale, l'energia potenziale massima varrà  $mgL$  e il pendolo percorrerà solo, in condizioni ideali, una semicirconferenza. La forza centripeta è diretta lungo il raggio di questa semicirconferenza, mentre il peso è diretto verso il basso.

Se l'asta parte in posizione orizzontale, il pendolo può scendere verso il basso superando un dislivello pari a  $L$ . Se assegnamo ancora alla posizione più bassa un potenziale  $U = 0$ , avremo che nel punto più alto  $U = mgL$  e  $K = 0$ , mentre in quello più basso  $U = 0$  e  $K = \frac{1}{2}mv^2$ . In un punto intermedio la palla forma con la verticale un angolo  $\alpha$

Si avrà  $h = L \cos \alpha$  e  $U = mg(L - L \cos \alpha)$  per cui, il bilancio energetico è

$$mgL(1 - \cos \alpha) + \frac{1}{2}mv^2 = mLg$$

da cui

$$v^2 = 2gL \cos \alpha$$

Si può quindi calcolare la forza centripeta come  $F_c = \frac{2gmL \cos \alpha}{L} = 2mg \cos \alpha$ . La tensione complessiva del filo sarà, aggiungendo anche la componente del peso della pallina nella direzione del filo stesso,  $mg \cos \alpha$ , si avrà

$$2mg \cos \alpha + mg \cos \alpha = mg$$

da cui

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}$$

e quindi

$$\alpha = 71^\circ$$

**Exercise 26.** Un blocco di  $3.20 \text{ kg}$ , partendo da fermo, scivola per una distanza  $d$  giù per un piano inclinato di  $30.0^\circ$ , fino a imbattersi in una molla. Il blocco continua a scivolare per  $21.0 \text{ cm}$  prima di essere momentaneamente arrestato dalla compressione della molla, la cui costante è  $431 \text{ N/m}$ . Trovare il valore di  $d$ .

**Soluzione:** Il blocco comprime la molla, che acquisterà una energia potenziale elastica

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = 0.5 \cdot 431 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot 0.21^2 \text{m}^2 = 9.5 \text{ J}$$

Nel frattempo il peso scende di  $d + 0.21 \text{ m}$  lungo il piano inclinato, ma di  $h + 0.105 \text{ m}$  (vedi figura) in verticale (se l'angolo è di  $30^\circ$ ,  $d$  può essere considerato come il lato di un triangolo equilatero e  $h$ , quindi, la metà di tale lato). La sua energia potenziale sarà quindi ridotta di

$$\Delta U = mg(h + 0.105)$$

Eguagliando le due energie, supponendo che tutta l'energia potenziale persa si trasformi in energia elastica della molla, si ha

$$9.5 = mg(h + 0.105)$$

da cui, risolvendo rispetto ad  $h$

$$h = \frac{9.5 \text{ J}}{(3.20 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}})} - 0.105 = 0.198 \text{ m}$$

da cui

$$d = 0.198 \text{ m} \cdot 2 = 0.396 \text{ m}$$

**Exercise 27.** Un proiettile con massa di  $9.4 \text{ kg}$  viene sparato verticalmente verso l'alto. Nella fase di salita è dissipata per resistenza dell'aria un'energia pari a  $68 \text{ kJ}$ . Quanto più in alto sarebbe volato se l'aria fosse stata resa trascurabile?

**Soluzione:** Collegando l'energia persa all'altezza aggiuntiva, cioè considerando l'energia persa come energia potenziale aggiuntiva, si ha

$$\Delta h = \frac{\Delta U}{mg} = \frac{68000 \text{ J}}{(9.4 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}})} = 738 \text{ m}$$

**Exercise 28.** Un fiume scende di  $15 \text{ m}$  superando alcune rapide. La velocità dell'acqua è di  $3.2 \text{ m/s}$  all'entrata delle rapide e di  $13 \text{ m/s}$  all'uscita. Determinare la percentuale di energia potenziale persa da  $10 \text{ kg}$  di acqua attraversando le rapide si trasforma in energia cinetica dell'acqua.

**Soluzione:** La riduzione dell'energia potenziale a causa della caduta è

$$\Delta U = mgh = 10 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 15 \text{ m} = 1470 \text{ J}$$

La variazione nell'energia cinetica è

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ kg} \cdot (13^2 - 3.2^2) = 794 \text{ J}$$

La percentuale è quindi

$$\frac{794 \text{ J}}{1470 \text{ J}} \cdot 100 = 54\%$$

Questo calcolo poteva essere eseguito anche senza tener conto della massa, poiché la stessa massa interviene in entrambe le relazioni e nel rapporto si semplifica.

**Exercise 29.** Alle cascate del Niagara cadono circa  $5.5 \cdot 10^6 \text{ kg}$  di acqua al secondo da un'altezza di  $50 \text{ m}$ . Calcolare l'energia potenziale perduta ogni secondo dall'acqua nella caduta. Trovare poi la potenza generata da una centrale idroelettrica in grado di convertire in energia elettrica tutta l'energia potenziale dell'acqua.

**Soluzione:** L'energia persa ogni secondo è indicata con la grandezza potenza, definita proprio come  $P = E/\Delta t$ . L'energia potenziale della massa d'acqua, all'inizio della caduta è

$$U = mgh = 5.5 \cdot 10^6 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 50 \text{ m} = 2.7 \cdot 10^9 \text{ J}$$

Il tempo impiegato dall'acqua a concludere il salto è (calcolato con le leggi del moto uniformemente accelerato,  $h = \frac{1}{2}gt^2$ )

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{100 \text{ m}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} = 3.2 \text{ s}$$

L'energia complessiva persa è  $U \cdot \Delta t$ , ma l'energia al secondo, cioè la potenza è  $P = \frac{U}{\Delta t}$ , per cui l'energia persa è quella prima calcolata.

La potenza generata da una ipotetica centrale sarà quindi pari a

$$P = 2.7 \cdot 10^9 \text{ W att} \left[ \frac{\text{Joule}}{\text{sec}} \right]$$

**Exercise 30.** Da una cascata alta  $100 \text{ m}$  precipitano ogni secondo  $1200 \text{ m}^3$  di acqua. Ammettendo che tre quarti dell'energia cinetica acquisita dall'acqua nella caduta si trasformino in energia elettrica, trovare la potenza con cui viene prodotta questa energia dal generatore.

**Soluzione:** L'energia potenziale dell'acqua è ( $1 \text{ m}^3 \rightarrow 1000 \text{ kg}$ )

$$U = mgh = 1.2 \cdot 10^6 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 100 \text{ m} = 1.2 \cdot 10^9 \text{ J}$$

L'energia cinetica ottenuta sarà

$$K = 1.2 \cdot 10^9 \text{ J} \times \frac{3}{4} = 8.8 \cdot 10^8 \text{ J}$$

La potenza sarà quindi  $P = 8.8 \cdot 10^8 \text{ W} = 880 \text{ MW}$  (megawatt)

**Exercise 31.** La superficie dell'Italia è di circa  $3 \cdot 10^5 \text{ km}^2$ , per un'altitudine media di circa  $400 \text{ m}$ . La piovosità media annuale è di circa  $80 \text{ cm}$ . Una buona metà di questa acqua piovana ritorna all'atmosfera per evaporazione, ma il resto finisce nel mare. Se tutta questa porzione potesse essere usata per generare energia idroelettrica, quale sarebbe la potenza media sviluppata?

**Soluzione:** Il volume annuo di acqua piovana è

$$V = 3 \cdot 10^{11} \text{ m}^2 \times 0.8 \text{ m} = 2.4 \cdot 10^{11} \text{ m}^3/\text{anno}$$

La metà che si ipotizza di utilizzare è quindi  $V = 1.2 \cdot 10^{11} \text{ m}^3/\text{anno}$  per una massa quindi di  $m = 1.2 \cdot 10^{14} \text{ kg}$  L'energia sarebbe

$$U = 1.2 \cdot 10^{14} \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 400 \text{ m} = 4.7 \cdot 10^{17} \text{ J}$$

per una potenza  $P = 4.7 \cdot 10^{17} \text{ W}$ . Distribuendo tale potenza nell'arco di un anno, si ha

$$P = \frac{4.7 \cdot 10^{17} \text{ W}}{365.25 \times 24 \times 3600 \text{ s}} = 1.5 \cdot 10^{10} \text{ W anno} = 15 \text{ GW anno}$$

**Exercise 32.** Un paracadutista di  $68 \text{ kg}$  in caduta libera cade alla velocità limite (costante) di  $59 \text{ m/s}$ . Determinare la rapidità con cui si riduce l'energia potenziale gravitazionale del sistema Terra-parà.

**Soluzione:** Il parà scende a velocità costante; ne segue che il suo moto può essere descritto dalle leggi del moto rettilineo uniforme. Per cui la caduta  $h = vt$ . La variazione di energia potenziale è data dalla potenza dissipata

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{mgvt}{t} = mgv = 68 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 59 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 39 \text{ kW}$$

**Exercise 33.** Un orsetto di  $25 \text{ kg}$  si lascia scivolare, da fermo, per  $12 \text{ m}$  lungo un palo raggiungendo la velocità di  $5.6 \text{ m/s}$  subito prima di toccare il suolo. Trovare la variazione di energia potenziale e l'energia cinetica prima del contatto con il suolo. Trovare infine la forza media di attrito che agisce sull'orsetto.

**Soluzione:** Assumiamo il suolo come posizione per la quale l'energia potenziale è nulla. Pertanto la variazione di energia potenziale è

$$\Delta U = mgh = 25 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 12 \text{ m} = 2940 \text{ J}$$

Partendo da fermo,  $v_i = 0$ , l'orsetto aveva una energia cinetica iniziale nulla. Se la sua velocità prima del contatto con il suolo è  $5.6 \text{ m/s}$ , la variazione di energia cinetica sarà

$$\Delta K = \frac{1}{2} m (v_f^2 - v_i^2) = 0.5 \times 25 \text{ kg} \times \left(5.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 392 \text{ J}$$

Si osserva che solo una parte dell'energia potenziale si è trasformata in cinetica, la parte rimanente è stata spesa dall'attrito di sfregamento durante la caduta, cioè

$$\Delta E = 2940 - 392 = 2548 \text{ J} = \Delta W$$

Questa energia può essere considerata pari al lavoro compiuto dalla forza di attrito (tale lavoro si è trasformato in riscaldamento delle superfici a contatto). In media tale forza sarà

$$F = \frac{\Delta W}{\Delta l} = \frac{2548 \text{ J}}{12 \text{ m}} = 212 \text{ N}$$

**Exercise 34.** Durante una frana un massa di  $520 \text{ kg}$  precipita, da una posizione di riposo, giù per un pendio lungo  $500 \text{ m}$  per un dislivello di  $300 \text{ m}$ . Il coefficiente di attrito dinamico fra il massa e il pendio è  $0.25$ . Trova l'energia potenziale  $U$  del massa prima della frana, se  $U = 0$  è posto ai piedi del pendio; calcola l'energia meccanica dissipata dalle forze di attrito durante la discesa e l'energia cinetica e la velocità del massa quando arriva in fondo al pendio.

**Soluzione:** La velocità iniziale del massa è nulla, per cui in posizione di riposo il massa possiede solo energia potenziale, legata al dislivello, cioè all'altezza dal suolo

$$U = mgh = 520 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 300 \text{ m} = 1.53 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Poiché il massa rotola con attrito, solo una parte di questa energia potenziale si trasforma in energia cinetica, mentre la rimanente viene dissipata. La variazione di energia potenziale esprime il lavoro della forza peso lungo un ipotetico spostamento verticale di  $300 \text{ m}$ . Il massa rotola però lungo un piano inclinato di lunghezza  $l = 500 \text{ m}$  e dislivello  $h = 300$ , per cui la componente parallela della forza peso che agisce è

$$P_{//} = P \frac{h}{l} = \frac{3}{5} P = \frac{3}{5} \times 520 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 3058 \text{ N}$$

A questa forza si oppone l'attrito, dato dal prodotto tra il coefficiente di attrito e la componente perpendicolare della forza peso; tale componente può essere calcolata con il teorema di Pitagora

$$\begin{aligned} P_{\text{perp}} &= \sqrt{P^2 - P_{//}^2} = \sqrt{\left(520 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 - \left(\frac{3}{5} \times 520 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(520 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2 \left(1 - \frac{9}{25}\right)} = \frac{4}{5} \left(520 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 4077 \text{ N} \end{aligned}$$

Pertanto la forza d'attrito vale

$$F_{\text{att}} = 0.25 \times 4077 = 1019 \text{ N}$$

La forza risultante che determina la caduta del massa è

$$R = 3058 - 1019 = 2039 \text{ N}$$

Il lavoro compiuto lungo il piano lungo  $500 \text{ m}$ , sarà

$$W = 2039 \text{ N} \times 500 \text{ m} = 1.02 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Questo valore esprime l'energia cinetica acquistata dal massa e la differenza tra l'energia potenziale e l'energia cinetica, indica la quantità di energia dissipata, che è pari a

$$E = 1.53 \cdot 10^6 - 1.02 \cdot 10^6 = 5.1 \cdot 10^5 \text{ J}$$

La velocità del massa in fondo alla frana si ottiene dall'energia cinetica

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.02 \cdot 10^6 \text{ J}}{520 \text{ kg}}} = 63 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Exercise 35.** Una pallottola di  $30\text{ g}$ , con velocità iniziale di  $500\text{ m/s}$ , penetra per  $12\text{ cm}$  in una parete in muratura prima di fermarsi. Determinare la riduzione dell'energia meccanica della pallottola, e, ammettendo che la forza esercitata dal muro sulla pallottola sia costante, calcolarne il valore.

**Soluzione:** Calcoliamo l'energia cinetica della pallottola, prima dell'impatto con il muro

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 0.030\text{ kg} \times \left(500 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = 3.8 \cdot 10^3\text{ J}$$

La riduzione in 'energia sarà allora  $\Delta E = E_f - E_i = 0 - 3.8 \cdot 10^3 = -3.8 \cdot 10^3\text{ J}$  Il muro compie un lavoro frenante pari a  $3750\text{ J}$ , per cui la forza si ricaverà dalla relazione

$$W = F \cdot \Delta s$$

con

$$F = \frac{W}{\Delta s} = \frac{3.8 \cdot 10^3\text{ J}}{0.12\text{ m}} = 3.1 \cdot 10^4\text{ N}$$

**Exercise 36.** Un blocco di  $3.5\text{ kg}$  è spinto via da una molla compressa avente una costante di  $640\text{ N/m}$ . Distaccatosi dalla molla una volta che essa ha raggiunto la posizione di riposo, il blocco viaggia su una superficie orizzontale con coefficiente di attrito dinamico  $0.25$  fino a fermarsi alla distanza di  $7.8\text{ m}$ . Trovare l'energia meccanica dissipata dalla forza d'attrito, la massima energia cinetica del blocco e la compressione iniziale della molla.

**Soluzione:** La forza d'attrito ferma il blocco in  $7.8\text{ m}$ . La forza d'attrito è data dal prodotto del coefficiente di attrito per la componente perpendicolare al piano di scorrimento della forza peso; in questo caso, dell'intera forza peso, muovendosi il blocco, in orizzontale. Pertanto

$$F_a = \mu P = 0.25 \times 3.5\text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 8.6\text{ N}$$

La decelerazione, supposta costante, è

$$a = \frac{F}{m} = \frac{8.6\text{ N}}{3.5\text{ kg}} = 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Possiamo pertanto calcolare la velocità iniziale del blocco mediante le leggi della cinematica

$$v_f^2 = v_i^2 - 2as$$

da cui

$$v_i^2 = 0 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 2 \times 2.5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 7.8\text{ m} = 39 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

L'energia cinetica posseduta dal blocco dopo il distacco dalla molla è anche l'energia dissipata dall'attrito

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 \times 3.5\text{ kg} \times 39 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 68\text{ J}$$

Troviamo ora la compressione della molla, ricordando che, per l'energia potenziale elastica vale la relazione  $U_{elas} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$ ; nel nostro caso l'energia cinetica massima posseduta corrisponde all'energia potenziale elastica, perché il primo tratto di movimento agganciato alla molla non presenta dispersioni

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = 68\text{ J}$$

da cui

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2 \times 68\text{ J}}{640 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0.46\text{ m} = 46\text{ cm}$$

**Exercise 37.** Un blocco è spinto giù per un piano inclinato da un punto  $A$  a un punto  $B$ , per una distanza di  $5.0\text{ m}$ , da una forza  $F = 2.0\text{ N}$  che agisce parallelamente al piano inclinato. L'intensità della forza di attrito che agisce sul blocco fra  $A$  e  $B$  è di  $10\text{ N}$ . Se l'energia cinetica del blocco aumenta di  $35\text{ J}$  nel passaggio da  $A$  a  $B$ , trovare il lavoro sviluppato sul blocco dal suo peso nello stesso tratto.

**Soluzione:** La forza che spinge il corpo compie un lavoro

$$W_F = 2.0\text{ N} \times 5.0\text{ m} = 10\text{ J}$$

La forza d'attrito compie un lavoro

$$W_{att} = 10\text{ N} \times 5.0\text{ m} = 50\text{ J}$$

Poiché la forza d'attrito compie un lavoro resistente, il lavoro totale sarà

$$W_{tot} = 50\text{ J} + 35\text{ J} = 85\text{ J}$$

Se a questo lavoro sottraiamo quello compiuto dalla forza aggiuntiva, otteniamo il lavoro compiuto dal peso

$$W_P = 85 J - 10 J = 75 J$$

**Exercise 38.** Un blocco di  $2.5 \text{ kg}$  muovendosi orizzontalmente su un piano va a urtare una molla, pure posta orizzontalmente, avente  $k = 320 \text{ N/m}$ , e la comprime per una lunghezza massima di  $7.5 \text{ cm}$ . Il coefficiente di attrito dinamico tra il blocco e la superficie di scorrimento è  $0.25$ . Calcola il lavoro che svolge la molla per arrestare il blocco e l'energia meccanica dissipata dalla forza d'attrito prima che il blocco sia arrestato dalla molla. Determina infine la velocità del blocco quando ha urtato la molla.

**Soluzione:** Il lavoro compiuto dalla molla è dato da  $W = -\frac{1}{2}k\Delta x^2$ , cioè

$$W = -0.5 \times 320 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 0.075^2 \text{ m}^2 = -0.9 J$$

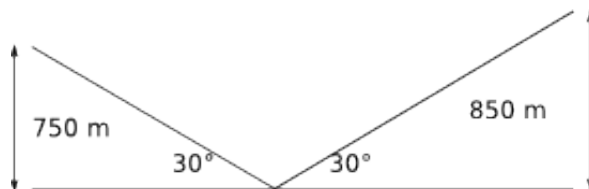
Per ottenere l'energia meccanica dissipata dalla forza d'attrito è necessario calcolare prima tale forza che è espressa da  $F_{at} = \mu P_{perp}$ ; poiché il corpo si muove in orizzontale, la forza peso ha solo la componente perpendicolare, per cui  $F_{at} = 0.25 \times 2.5 \text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 6 \text{ N}$ ; ne deriva che

$$\Delta E = 6 \text{ N} \times 0.075 \text{ m} = 0.46 J$$

Il corpo mentre è contrastato dalla molla è ancora soggetto alla forza d'attrito lungo i  $7.5 \text{ cm}$ . Pertanto, si deve sommare il della molla  $0.9 J$  all'energia dispersa dall'attrito in questo tratto, cioè  $0.46 J$ . L'energia cinetica posseduta dal blocco sarà pari a  $K = 0.9 J + 0.46 J = 1.36 J$ ; per cui

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1.36 J}{2.5 \text{ kg}}} = 1.04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Exercise 39.** Due cime innevate sovrastano di  $850 \text{ m}$  e  $750 \text{ m}$  il fondovalle intermedio. Una pista di sci scende dalla vetta più alta e risale fino in cima all'altra, per una lunghezza di  $3.2 \text{ km}$  con una pendenza media di  $30^\circ$ , come in figura. Uno sciatore parte da fermo dalla cima più alta. Trovare la velocità con la quale raggiunge l'altra cima se scende senza l'aiuto dei bastoncini, considerando trascurabile l'attrito. Se consideriamo anche l'attrito, trovare il coefficiente dinamico approssimato tra neve e sci affinché lo sciatore si fermi sulla cima più bassa.



**Soluzione:** In assenza di attrito, non ci sono forze dispersive, per cui l'energia cinetica acquisita lungo la prima discesa è spesa in parte per la risalita verso la seconda cima. In particolare, conta solo il dislivello tra le due vette, cioè la differenza di energia potenziale tra le due cime; essa vale  $\Delta h = 850 \text{ m} - 750 \text{ m} = 100 \text{ m}$ ; pertanto la velocità con cui lo sciatore raggiunge la vetta più bassa è

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 100 \text{ m}} = 44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Se si considera anche l'attrito tra sci e neve, la condizione precedente non vale allo stesso modo, per la comparsa di questa forza non conservativa. Dobbiamo considerare il caso in cui la velocità sulla seconda vetta sia nulla. La forza di attrito è data dal prodotto del coefficiente d'attrito dinamico per la componente perpendicolare della forza peso. Essendo l'inclinazione dei percorsi di  $30^\circ$ , la componente perpendicolare è pari a  $P_{perp} = \frac{P}{2}\sqrt{3}$  (scomponendo il vettore peso nelle componenti perpendicolare e parallela, e disegnandole con il vettore peso si ha la metà di un triangolo equilatero, la cui altezza è la componente perpendicolare). Il calcolo può essere così impostato: quando lo sciatore si trova sulla cima più alta ha un'energia solamente potenziale, che indichiamo con  $U_{850}$ . Quando si trova, dopo il percorso, sulla cima più bassa, ha energia  $U_{750} - \Delta E_{att}$ , dove  $\Delta E_{att}$  è l'energia dispersa. Tale energia è pari al lavoro della forza di attrito, che essendo resistente, è  $\Delta E_{att} = W = -F_{att}\Delta s$ . Da ciò si ottiene che

$$F_{att}\Delta s = U_{850} - U_{750} = U_{100}$$

dove  $U_{100}$  rappresenta la differenza tra le due energie potenziali (dislivello tra le due vette) e  $\Delta s$  la distanza percorsa dallo sciatore. La salita e la discesa si possono considerare come piani inclinati di  $30^\circ$ ,



per cui, alle altezze indicate corrispondono percorsi di  $1700\text{ m}$  di discesa, e  $1500\text{ m}$  di risalita, per un totale di  $\Delta s = 3200\text{ m}$ . Applicando le definizioni delle grandezze, si ha

$$mg \cdot 100\text{ J} = \mu \cdot \frac{mg}{2} \sqrt{3} \cdot 3200\text{ J}$$

da cui

$$\mu = \frac{100}{1600 \times \sqrt{3}} = 0.036$$

**Exercise 40.** Una cassa di  $180\text{ kg}$  scivola lungo una rampa lunga  $3.60\text{ m}$  con pendenza di  $39^\circ$ . Il coefficiente di attrito dinamico tra le varie parti è  $0.28$ . Trovare la velocità della cassa al fondo della rampa; determinare poi quale tratto orizzontale percorrerà, strisciando sul pavimento, supponendo che il cambiamento di pendenza non provochi alcuna perdita di energia cinetica.

**Soluzione:** Il lavoro resistente fatto dalla forza d'attrito è dato dal prodotto della forza d'attrito per la lunghezza della rampa. La forza d'attrito è uguale al prodotto del coefficiente d'attrito e della componente perpendicolare della forza peso. Essendo il piano inclinato di  $39^\circ$ , tale componente vale

$$P_{perp} = P \cos 39^\circ$$

per cui il lavoro sarà dato da

$$W_{att} = -F_{att} \cdot l = \mu P_{perp} l = -0.28 \times 180\text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \cos 39^\circ \times 3.6\text{ m} = 1382\text{ J}$$

L'energia potenziale della cassa diminuisce di

$$\Delta U = mgh = 180\text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3.6 \sin 39^\circ = 3997\text{ J}$$

dove  $h = l \sin 39^\circ$ . L'energia cinetica acquistata dalla cassa lungo la discesa è pari a

$$K = 3997\text{ J} - 1382\text{ J} = 2615\text{ J}$$

la velocità della cassa al termine della discesa sarà pertanto

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2615\text{ J}}{180\text{ kg}}} = 5.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Lungo il tratto orizzontale la componente perpendicolare della forza peso coincide con il peso stesso della cassa, e la forza d'attrito sarà  $F_{att} = \mu P = 0.28 \times 80\text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 494\text{ N}$ . Il lavoro compiuto da tale forza sarà quindi  $W_{attr} = -494\text{ N} \times \Delta s$ . Troviamo quindi lo spostamento supponendo che tutta l'energia cinetica acquisita dalla cassa venga dissipata dall'attrito che ferma la cassa:

$$\Delta s = \frac{2615\text{ J}}{494\text{ N}} = 5.3\text{ m}$$

**Exercise 41.** Una bambina del peso di  $267\text{ N}$  scende lungo uno scivolo lungo  $6.1\text{ m}$  inclinato di  $20^\circ$ . Il coefficiente di attrito dinamico è  $0.10$ . Trovare il lavoro svolto dal peso sulla bambina, l'energia dissipata dalla forza d'attrito e, infine, la velocità di arrivo a terra se parte dall'alto con una velocità di  $0.457\text{ m/s}$ .

**Soluzione:** Lo scivolo è inclinato di  $20^\circ$ , per cui il dislivello tra il punto più alto e il suolo è  $h = 6.1\text{ m} \times \sin 20^\circ = 2.1\text{ m}$ . È possibile calcolare quindi il lavoro del peso, attraverso la variazione di energia potenziale tra le due posizioni

$$W_{peso} = \Delta U = Ph = 267\text{ N} \times 2.1\text{ m} = 557\text{ J}$$

L'energia dissipata dalla forza d'attrito è data dal lavoro resistente da essa compiuto (anche qui la componente perpendicolare del peso si ottiene da  $P \cos 20^\circ$ ; inoltre il lavoro dipende dal percorso seguito, perché, contrariamente al peso, l'attrito non è una forza conservativa)

$$W_{att} = -\mu P_{perp} l = 0.1 \times 267\text{ N} \times \cos 20^\circ \times 6.1\text{ m} = 153\text{ J}$$

La bambina acquisterà quindi una energia cinetica

$$\Delta K = 557 - 153 = 404\text{ J}$$

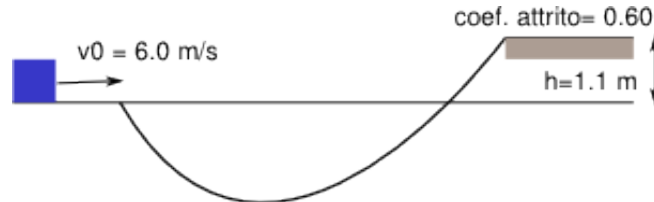
La variazione di energia cinetica si può esprimere come  $\Delta K = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$ , per cui

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) = 404\text{ J}$$

da cui, svolgendo, si ottiene (la massa della bambina è data da  $m = \frac{P}{g} = \frac{267 \text{ N}}{9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \times 404 \text{ J} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{267 \text{ N}} + 0.457 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 5.45 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

**Exercise 42.** Nella figura si vede un blocco che scivola lungo una pista da un certo livello ad un altro più elevato, attraversando un avvallamento intermedio. La pista è priva di attrito fino a che si giunge al livello maggiore, dove la forza d'attrito arresta il blocco dopo una distanza  $d$ . Trovare  $d$ , sapendo che la velocità iniziale  $v_0 = 6.0 \text{ m/s}$ , la differenza di quota  $h = 1.1 \text{ m}$  e il coefficiente di attrito dinamico è  $\mu = 0.60$ .



**Soluzione:** Il blocco percorre la pista in assenza di attrito, tranne nell'ultimo tratto orizzontale; pertanto dopo aver percorso l'avvallamento, ritornerà al livello iniziale con la stessa velocità iniziale. Risalendo, raggiungerà il livello superiore, aumentando la propria energia potenziale di  $\Delta U = 1.1mg = 11m \text{ J}$  e riducendo la propria energia cinetica dello stesso valore. La sua velocità al livello  $h$ , sarà

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_i^2 - v_f^2) = 11m$$

per cui

$$v_i^2 - v_f^2 = 22$$

e

$$v_f = \sqrt{36 - 22} = 3.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Nel tratto  $d$ , tale velocità si azzerava. La forza di attrito è pari a  $F_{att} = 0.60P = 5.9m \text{ N}$ . La forza d'attrito compirà un lavoro resistente che annullerà l'energia cinetica rimanente posseduta dal blocco, cioè  $K = \frac{1}{2}mv^2 = 6.8m \text{ J}$ , da cui

$$W_{att} = F_{att}d = K$$

da cui

$$d = \frac{6.8m \text{ J}}{5.9m \text{ N}} = 1.2 \text{ m}$$

**Exercise 43.** In un atomo di idrogeno la forza attrattiva fra protone ed elettrone è la forza elettrica, data dalla relazione

$$F = k \frac{e^2}{r^2}$$

dove  $e$  è la carica di elettrone e protone e  $r$  la distanza tra di loro. Supponendo che il nucleo resti fermo e immaginando che l'elettrone compia un «salto» da un'orbita più esterna di raggio  $r_1$  ad una più interna, di raggio  $r_2$ , calcolare la variazione di energia cinetica dell'elettrone attraverso la seconda legge di Newton.

**Soluzione:** La forza elettrica opera come una forza centripeta in questa descrizione classica dell'atomo di idrogeno. Supponendo il moto dell'elettrone circolare e uniforme, la sua velocità angolare rimane costante, ma non quella tangenziale, che dipende dalla distanza dal centro di rotazione (cioè dal protone). La variazione di energia cinetica dipende quindi dalla variazione della distanza dal protone. La forza centripeta è descritta da

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$$

da cui

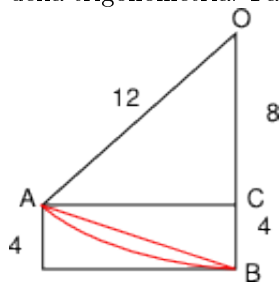
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{k}{2} \frac{e^2}{r}$$

la variazione di energia cinetica sarà

$$\Delta K = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{k}{2}e^2 \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

**Exercise 44.** Uno scivolo ha la forma di un arco di cerchio di raggio  $12\text{ m}$ , tangente al terreno e di altezza  $4.00\text{ m}$ . Un bambino di  $25\text{ kg}$  parte da fermo dall'alto dello scivolo e arriva in fondo alla velocità di  $6.2\text{ m/s}$ . Trovare la lunghezza dello scivolo e la forza media di attrito lungo tale distanza.

**Soluzione:** Il calcolo della lunghezza dello scivolo viene svolto nell'ipotesi di non poter contare sui teoremi della trigonometria. Facciamo riferimento alla figura sotto.



La curva  $AB$  descrive la forma dello scivolo (arco di circonferenza), il segmento  $AB$  un'approssimazione di uno scivolo rettilineo (corda del cerchio). Lo scivolo è tangente al terreno, e pertanto il segmento  $BO$  è perpendicolare al terreno ( $O$  è il centro del cerchio). Possiamo calcolare il segmento  $AC$  con il teorema di Pitagora, ottenendo  $\sqrt{80}\text{ m}$ , e da qui trovare la corda  $AB = 9.8\text{ m}$ . Se applicassimo la trigonometria otterremmo per l'arco  $AB = 10\text{ m}$ .

L'energia potenziale del bambino nel punto più alto dello scivolo è

$$U = mgh = 25\text{ kg} \times 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 4.00\text{ m} = 980\text{ J}$$

Scendendo, in assenza di attrito, tutta questa energia si trasformerebbe in energia cinetica, e il bambino giungerebbe a terra con una velocità di

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{1960\text{ J}}{25\text{ kg}}} = 8.9 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La differenza tra le due velocità è legata all'energia dissipata dall'attrito. Il lavoro da questa fatto è

$$W_{att} = F_{att} \cdot l = \frac{1}{2} \times 25\text{ kg} \times (8.9^2 - 6.2^2) = 510\text{ J}$$

La forza media d'attrito è quindi

$$F_{att} = \frac{W_{att}}{l} = \frac{510\text{ J}}{9.8\text{ m}} = 52\text{ N}$$

**Exercise 45.** Una particella scivola su una pista con due tratti verticali curvi uguali e un tratto centrale piano, di lunghezza  $L$ . Le due parti curve sono prive di attrito, mentre per la parte in piano il coefficiente di attrito dinamico è  $\mu_k = 0,20$ . La particella è lasciata libera ad un'altezza  $h = L/2$  rispetto al tratto piano. Trovare dove si ferma la particella.

**Soluzione:** La particella nel punto iniziale si trova ad un'altezza  $h$  rispetto al tratto piano, preso come riferimento, e possiede quindi una energia potenziale pari a ( $h = \frac{L}{2}$ )

$$U = mgh = 0.5mgL$$

tale energia viene convertita in energia cinetica lungo la discesa. Sul tratto piano la forza di attrito dissipativa compie un lavoro

$$W = -F_{att}L = -0.20mgL$$

Al termine del tratto piano, la particella affronta il tratto curvo in salita con un'energia cinetica

$$K = mgL(0.5 - 0.20) = 0.30mgL$$

questa energia cinetica si trasforma in energia potenziale

$$0.30mgL = mgh'$$

da cui

$$h' = 0.30L = 0.60h$$

La particella poi ridiscende. Essendo le condizioni identiche e cambiando solo il dislivello del punto di partenza, la particella perderà, sul tratto orizzontale, altri  $0.20mgL\text{ Joule}$  e ridiscendendo poi, si fermerà a metà del tratto piano, perdendo i restanti  $0.10mgL\text{ Joule}$ .

**Exercise 46.** Il cavo di un ascensore di  $2000 \text{ kg}$  si spezza quando la cabina si trova ferma al primo piano, col fondo ad una distanza  $d = 4.0 \text{ m}$  al di sopra di una molla ammortizzatrice di costante elastica  $k = 1.5 \cdot 10^5 \text{ N/m}$ . Un dispositivo di sicurezza agisce sulle guide in modo da far loro sviluppare in caso di emergenza una forza d'attrito costante pari a  $4900 \text{ N}$  che si oppone al moto dell'ascensore. Trovare la velocità dell'ascensore prima che urti la molla e di quale lunghezza  $x$  verrà compressa la molla.

Soluzione L'ascensore, o il suo centro di massa, avrà una energia potenziale pari a

$$U = mgh = 2000 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4.0 \text{ m} = 78400 \text{ J}$$

La forza d'attrito compie un lavoro resistente pari a

$$W_{att} = -Fh = 4900 \text{ N} \cdot 4.0 \text{ m} = 19600 \text{ J}$$

L'ascensore acquisterà quindi una energia cinetica

$$K = 78400 - 19600 = 58800 \text{ J}$$

la velocità prima dell'impatto con la molla è

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{117600 \text{ J}}{2000 \text{ kg}}} = 7.7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La molla subirà quindi una compressione (il lavoro della molla è quello che serve a fermare l'ascensore)

$$x = \sqrt{\frac{2K}{k}} = \sqrt{\frac{117600 \text{ J}}{1.5 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}}}} = 0.89 \text{ m}$$