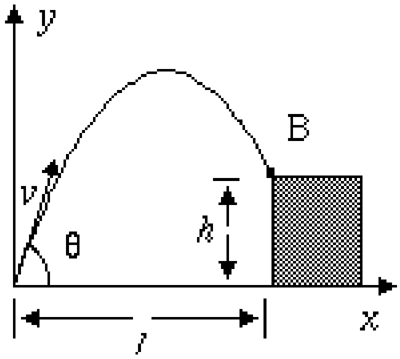


2.1 Un proiettile è lanciato con inclinazione θ = 65˚ verso un bersaglio B posto su un muro alto *h* = 10 m, ad una distanza *l* = 50 m dalla posizione di lancio. Calcolare a) il modulo *v* della la velocità iniziale che dovrà avere il proiettile per colpire il bersaglio; b) il tempo di volo [*v* = 26.57 m/s; *t* = 4.45 s].

$h := 10 \cdot m \qquad l := 50 \cdot m \qquad \theta := 65 \cdot deg$

Le coordinate l e h soddisfano l'equazione della traiettoria

$$\tan(\theta)\cdot l - \left(\frac{g}{2\cdot v^2\cdot \cos(\theta)^2}\right)\cdot l^2 = h$$

da cui ricavo la velocità v:

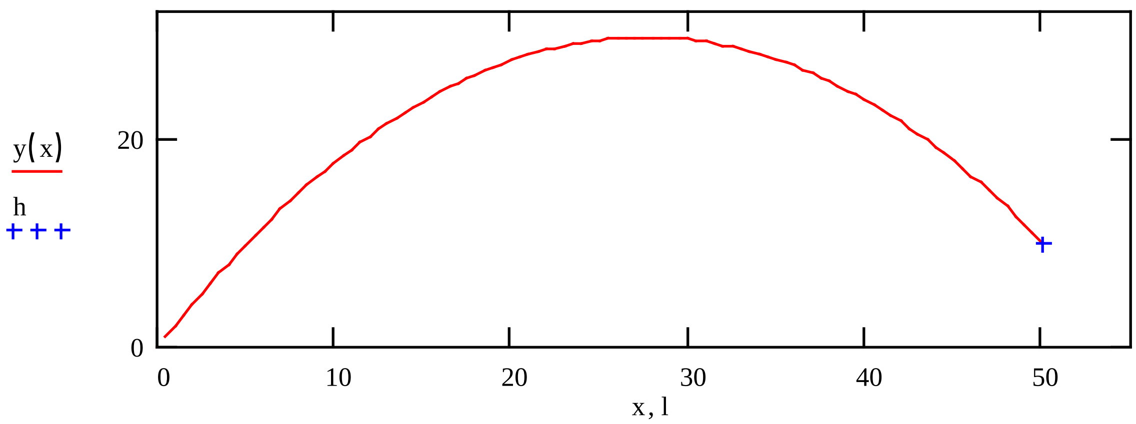
$$v := \frac{l}{\cos(\theta)}\cdot\sqrt{\frac{g}{2\cdot(\tan(\theta)\cdot l - h)}} \qquad v = 26.57 \cdot m\cdot sec^{-1}$$

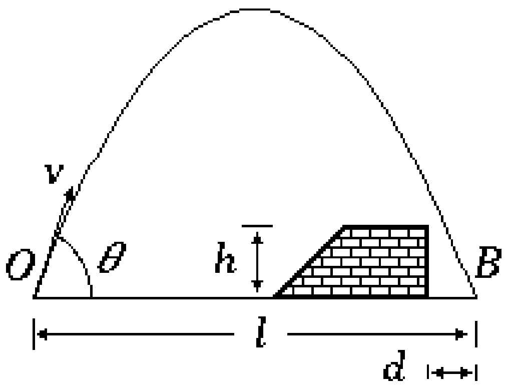
Per calcolare il tempo di volo considero il moto in direzione x che è un moto uniforme:

$$l = v\cdot\cos(\theta)\cdot t \qquad t := \frac{l}{v\cdot\cos(\theta)} \qquad t = 4.45 \cdot sec$$

Adesso disegno il grafico della traiettoria:

$$y(x) := \tan(\theta)\cdot x - \left(\frac{g}{2\cdot v^2\cdot\cos(\theta)^2}\right)\cdot x^2 \qquad x := 0\cdot m, 0.5\cdot m .. l$$





2.2 Un proiettile è lanciato con velocità v = 25 m/s verso un bersaglio B posto ad una distanza orizzontale l = 45 m dalla posizione di lancio. Il bersaglio B è protetto da un terrapieno di altezza h = 10 m che si estende fino ad una distanza d = 5 m da esso. Calcolare a) l'inclinazione θ rispetto all'orizzontale che deve avere il proiettile alla partenza per colpire il bersaglio dietro il terrapieno; b) il tempo di volo.
[θ = 67.56°, t = 4.72 s]

$v := 25\cdot m\cdot sec^{-1}$ $\quad d := 5\cdot m$ $\quad h := 10\cdot m$ $\quad l := 45\cdot m$

Le coordinate di B dovranno soddisfare l'equazione della traiettoria. Allora:

$$\tan(\theta)\cdot l - \left(\frac{g}{2\cdot v^2\cdot \cos(\theta)^2}\right)\cdot l^2 = 0$$

Usando una nota identità trigonometrica trovo un'eq. di 2° grado in tan(θ)

$$\frac{1}{\cos(\theta)^2} = 1 + \tan(\theta)^2 \qquad \tan(\theta)\cdot l - \left(\frac{g\cdot l^2}{2\cdot v^2}\right)\cdot\left(1 + \tan(\theta)^2\right) = 0$$

da cui si ricavano per θ i due valori:

$$\theta1 := \operatorname{atan}\left[\frac{1}{[2\cdot(g\cdot l)]}\cdot\left(2\cdot v^2 - 2\cdot\sqrt{v^4 - g^2\cdot l^2}\right)\right] \qquad \theta1 = 22.458\cdot deg$$

$$\theta2 := \operatorname{atan}\left[\frac{1}{[2\cdot(g\cdot l)]}\cdot\left(2\cdot v^2 + 2\cdot\sqrt{v^4 - g^2\cdot l^2}\right)\right] \qquad \theta2 = 67.542\cdot deg$$

Allo stesso risultato si può giungere osservando che i punti di partenza O e di arrivo B del proiettile sono alla stessa quota. Allora, imponendo che la gittata sia proprio l, ricavo:

$$l = \frac{v^2}{g}\cdot\sin(2\cdot\theta) \qquad \theta1 := \frac{1}{2}\cdot\operatorname{asin}\left(l\cdot\frac{g}{v^2}\right) \qquad \theta2 := \frac{1}{2}\cdot\left(\pi - \operatorname{asin}\left(l\cdot\frac{g}{v^2}\right)\right) \qquad \theta1 = 22.458\cdot deg$$

$$\theta2 = 67.542\cdot deg$$

Per stabilire se tutti e due i valori sono accettabili, calcolo la quota del proiettile in corrispondenza del terrapieno; dall'equazione della traiettoria:

$$h1 := \tan(\theta1)\cdot(l - d) - \left[\frac{g}{2\cdot v^2\cdot(\cos(\theta1))^2}\right]\cdot(l - d)^2 \qquad h1 = 1.837\cdot m$$

$$h2 := \tan(\theta2)\cdot(l - d) - \left[\frac{g}{2\cdot v^2\cdot(\cos(\theta2))^2}\right]\cdot(l - d)^2 \qquad h2 = 10.752\cdot m$$

Dato che h1 <10 m, l'angolo θ1 non è accettabile perchè il proiettile sarebbe intercettato dal terrapieno prima di raggiungere B.

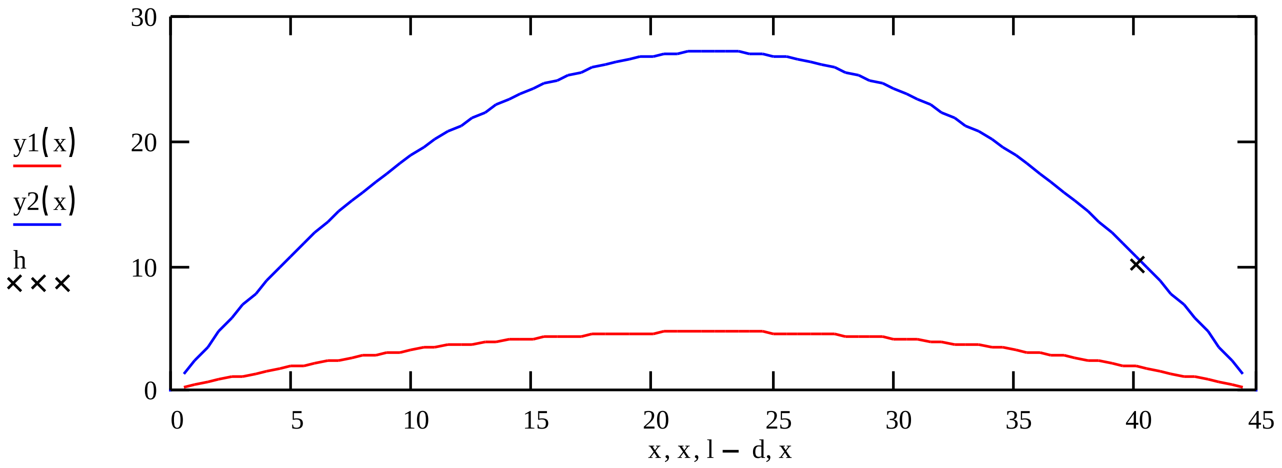
Per calcolare il tempo di volo considero il moto nella direzione x che è un moto uniforme:

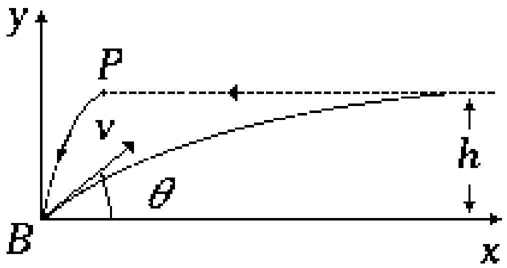
$$l = v\cdot \cos(\theta 2)\cdot t \qquad t := \frac{l}{v\cdot \cos(\theta 2)} \qquad t = 4.712\cdot sec$$

Grafico le due traiettorie

$$y1(x) := \tan(\theta 1)\cdot x - \left[\frac{g}{2\cdot v^2\cdot (\cos(\theta 1))^2}\right]\cdot x^2$$

$$y2(x) := \tan(\theta 2)\cdot x - \left[\frac{g}{2\cdot v^2\cdot (\cos(\theta 2))^2}\right]\cdot x^2 \qquad x := 0\cdot m, 0.5\cdot m .. l$$





2.3 Un aereo è in volo orizzontale con velocità costante v_0 = 500 km/h per sganciare una bomba su un bersaglio B. All'istante t = 0 l'aereo viene avvistato ad una distanza d = 12 km misurata al suolo e ad una quota h = 700 m dal bersaglio. Calcolare a) l'ascissa x_0 del punto P in cui l'aereo dovrebbe sganciare la sua bomba per colpire il bersaglio B; b) quanto tempo dopo l'avvistamento il bersaglio sarebbe colpito. Il bersaglio B è difeso da un cannoncino che, a partire dall'istante dell'avvistamento, lancia proiettili con velocità iniziale di modulo v = 600 m/s. Sapendo che uno di questi proiettili riesce a colpire l'aereo quando questo si trova ad una distanza d_1 = 5 km da B, misurata al suolo, calcolare c) l'angolo di tiro. [x_0 = 1660 m; t_0 = 86.4 s; θ = 11.92 °]

$va := 500 \cdot km \cdot hr^{-1}$ $\quad d := 12 \cdot km$ $\quad h := 700 \cdot m$

$v := 600 \cdot m \cdot sec^{-1}$ $\quad l := 5 \cdot km$ $\quad va = 138.89 \cdot m \cdot sec^{-1}$

Scegliendo un sistema di riferimento con l'origine in B, y in alto e x a destra, le equazioni del moto per la bomba sono:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad x = x0 - v \cdot t$$

Ponendo x e y entrambi nulli, trovo due equazioni nelle due incognite x0 e t, ascissa di lancio e tempo di caduta

$$0 = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad t := \sqrt{\left(\frac{2}{g} \cdot h\right)} \qquad t = 11.948 \cdot sec$$

$$0 = x0 - va \cdot t \qquad x0 := va \cdot t \qquad x0 = 1659.48 \cdot m$$

Dato che nella direzione x la velocità della bomba (che è quella dell'aereo) è uniforme:

$$0 = d - va \cdot t \qquad t := \frac{d}{va} \qquad t = 86.40 \cdot sec$$

Le coordinate del punto in cui è colpito l'aereo soddisfano all'equazione della traiettoria del proiettile:

$$\tan(\theta) \cdot l - \left(\frac{g}{2 \cdot v^2 \cdot \cos(\theta)^2}\right) \cdot l^2 = h \qquad \frac{1}{\cos(\theta)^2} = 1 + \tan(\theta)^2$$

$$\tan(\theta) \cdot l - \left(\frac{g \cdot l^2}{2 \cdot v^2}\right) \cdot \left(1 + \tan(\theta)^2\right) = h$$

$$\theta1 := \operatorname{atan}\left[\frac{\left(v^2 - \sqrt{v^4 - g^2 \cdot l^2 - 2 \cdot g \cdot h \cdot v^2}\right)}{(l \cdot g)}\right] \qquad \theta1 = 11.92 \cdot deg$$

$$\theta2 := \operatorname{atan}\left[\frac{\left(v^2 + \sqrt{v^4 - g^2 \cdot l^2 - 2 \cdot g \cdot h \cdot v^2}\right)}{(l \cdot g)}\right] \qquad \theta2 = 86.05 \cdot deg$$

Per verificare se tutti e due gli angoli di tiro sono accettabili, calcolo il tempo di volo.

$$t1 := \frac{l}{v \cdot \cos(\theta 1)} \qquad t2 := \frac{l}{v \cdot \cos(\theta 2)} \qquad t1 = 8.52 \cdot sec \qquad t2 = 120.89 \cdot sec$$

Dato che il cannoncino inizia a sparare all'istante di avvistamento, il tempo di volo del proiettile non potrà essere più grande del tempo in cui l'aereo va dal punto dell'avvistamento al punto dove è colpito. Questo tempo è:

$$t := \frac{d - l}{va} \qquad t = 50.40 \cdot sec$$

Quindi $\theta 2$ non è accettabile.