## Esercizio 1

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x},$$

senza applicare la regola di De L'Hospital.

***

**Soluzione**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\tan x}{\sin x+\tan^2 x}=\frac{0}{0}=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3+\frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\tan x}{x}x}=\frac{3+1}{1+1\cdot 0}=4,$$

## Esercizio 2

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\,(1-\sin x)}{3\cos^2 x},$$

senza applicare la regola di De L'Hospital.

***

**Soluzione**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\,(1-\sin x)}{3\cos^2 x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x}{3}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)\,(1+\sin x)}=\frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\,(1-\sin x)}{3\cos^2 x}=\frac{1}{3}$$

## Esercizio 3

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)},$$

***

**Soluzione**
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)}=\frac{0}{0}$$

Applicando la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+\pi-4\arctan x)}{\sin(1-x)} \overset{H}{=} -\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1+\pi-4\arctan x}\cdot(-4)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{\cos(1-x)}\\
&=4\left(\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\pi-4\arctan x}\right)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{(1+x^2)\cos(1-x)}\\
&=4\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=2
\end{aligned}$$

# Esercizio 4

Determinare le singolarità della funzione:

$$f(x)=\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}, \tag{19}$$

***

**Soluzione**
La funzione è definita in $X=\mathbb{R}-\{0\}$.
Determiniamo il limite sinistro e destro in $x_0=0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{+\infty}-1}{e^{+\infty}+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}=\frac{1-e^{-\infty}}{1+e^{+\infty}}=\frac{1-0}{1+0}=1 \qquad (20)\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\infty}-1}{e^{-\infty}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1
\end{aligned}$$

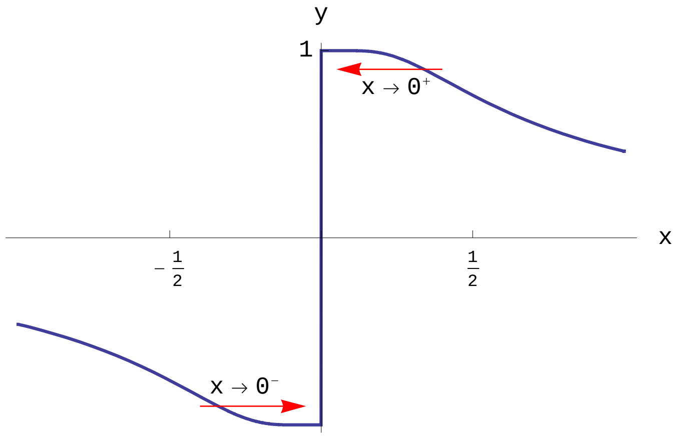
Si conclude che $x_0$ è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.

# Esercizio 5

Studiare il comportamento per $x\to 0$ della funzione:

$$f(x)=\sin\frac{1}{x} \tag{21}$$

***




**Soluzione**
La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è manifestamente dispari: $f\left(-\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$. Inoltre è limitata su tutto $\mathbb{R}$: $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq 1$.
Gli zeri sono:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, ..., \frac{1}{k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Inoltre:

$$f(x) = 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{2}{\pi}, \frac{1}{5\pi}, \frac{1}{9\pi}, ..., \frac{2}{\pi + 4k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$
$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \Longleftrightarrow x = \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, ..., \frac{2}{3\pi + 4k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Osserviamo che i punti $x_k = \frac{1}{k\pi}$, $x'_k = \frac{2}{\pi+4k\pi}$, $x''_k = \frac{2}{3\pi+4k\pi}$ si addensano intorno a $x = 0$ (al crescere indefinito di $k$), per cui in ogni intorno di $x = 0$, la funzione assume i valori $0, -1, 1$. Pertanto non può essere verificata la definizione di limite, che in questo caso è:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid 0 < |x| < \delta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \tag{22}$$

In altri termini, $\nexists l$ tale che lo scarto $|f(x) - l|$ può essere reso arbitrariamente piccolo. Si conclude che la funzione (21) non è regolare in $x = 0$. Per quanto riguarda il diagramma cartesiano, osserviamo che in ogni intorno di $x = 0$, la funzione compie infinite oscillazioni, per cui non è possibile completare il grafico intorno a $x = 0$, come mostrato in fig.1 .
Osserviamo infine che all'infinito la funzione è infinitesima, avendosi:

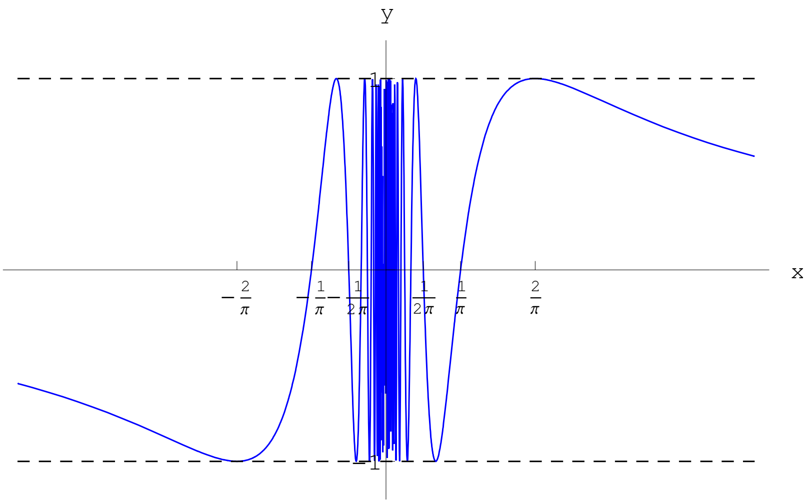



Figure 1: Grafico di $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^+} \sin t = 0^+$$
$$\lim_{x \to -\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{t \to 0^-} \sin t = 0^-$$

# Esercizio 6

Studiare il comportamento per $x \to 0$ della funzione:

$$f(x) = x \sin\frac{1}{x} \tag{23}$$

***

**Soluzione**

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$, ed è manifestamente pari: $f\left(-\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Inoltre :

$$\forall x \in X, \ \left| x \sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| \tag{24}$$

Dalla (24) applicando la definizione di limite:

$$\lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0, \tag{25}$$

per cui la funzione è convergente in $x = 0$. Sempre per la (24) si ha che il diagramma cartesiano è contenuto nella regione del piano $xy$:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty, \ -x < y < x\}$$

Il diagramma cartesiano interseca infinite volte le rette $y = x$ e $y = -x$. Infatti:

$$f(x) = x \iff x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$
$$f(x) = -x \iff x_k = \frac{2}{\pi(3+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Gli zeri sono:

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{x} = k\pi \iff x = \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \frac{1}{3\pi}, ..., \frac{1}{k\pi}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Come nel caso di $\sin\frac{1}{x}$ anche qui la funzione compie infinite oscillazioni intorno al punto $x = 0$, con la differenza che le oscillazioni si smorzano per $x \to 0$.
Il diagramma è riportato in fig.2 .

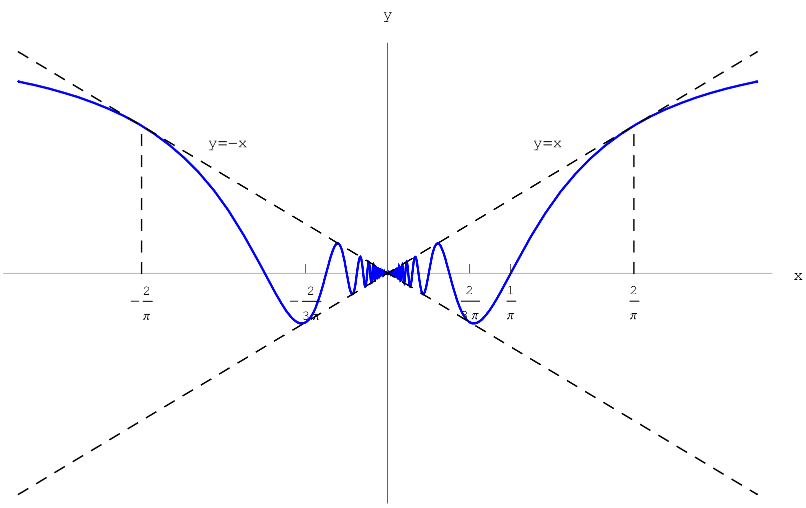



Figure 2: Diagramma cartesiano di $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$

Osserviamo infine che all'infinito la funzione converge a 1, avendosi:

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t} = 1^-$$
$$\lim_{x\to-\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0^-}\frac{\sin t}{t} = 1^-$$

# Esercizio 7

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1 + \ln(1-x)}{\tan x - x} \tag{26}$$

***

**Soluzione**
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x}=\frac{0}{0},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-1} && (27)\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cot^2 x}{1-x}\cdot\frac{e^x(1-x)-1}{1-\cos^2 x}\right]=0\cdot\infty && (28)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} && (29)
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} &= \frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-e^x}{2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}\\
&= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x}{\tan x}\cos^2 x\right)=-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x}=-\frac{1}{2}$$

# Esercizio 8

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x} \qquad (30)$$

***

**Soluzione**
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x}=\frac{0}{0},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x} &\overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x}-1} && (31)\\
&= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\cot^2 x}{1-x}\cdot\frac{e^x(1-x)-1}{1-\cos^2 x}\right]=0\cdot\infty && (32)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} && (33)
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte il secondo limite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-1}{\tan^2 x} &= \frac{0}{0} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x(1-x)-e^x}{2\tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{xe^x}{\tan x}\cos^2 x\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Dall'equazione precedente si ricava:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+\ln(1-x)}{\tan x - x} = -\frac{1}{2}$$

# Esercizio 9

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} \tag{34}$$

***

**Soluzione**
Il rapporto si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\infty}{\infty},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+2e^x)}{\sqrt{1+x^2}} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2e^x}{1+2e^x}}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} \\ &= 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{e^{-x}+2} = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 1\end{aligned} \tag{35}$$

# Esercizio 10

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\arcsin x\cdot\ln x \tag{36}$$

***

**Soluzione**
Il prodotto si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+}\arcsin x\cdot\ln x = 0\cdot\infty$$

Per applicare la regola di De L'Hospital dobbiamo ricondurre la forma indeterminata $0 \cdot \infty$ a una delle due forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \arcsin x \cdot \ln x &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{(\arcsin x)^{-1}} = \frac{\infty}{\infty} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(\arcsin x)^{-2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} &\quad (37) \\
&= -\lim_{x \to 0^+} \left( \sqrt{1-x^2} \frac{\arcsin x}{x} \cdot \arcsin x \right) &\quad (38) \\
&= -1 \cdot 0 \cdot 1 = 0 &\quad (39)
\end{aligned}$$

## Esercizio 11

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right)$$

***

**Soluzione**

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$:

$$\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right) = \infty - \infty$$

Tale forma indeterminata può essere rimossa applicando la regola di De L'Hospital, dopo aver ricondotto la forma $\infty - \infty$ alla $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x} - \cot x \right) &= \lim_{x \to 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = &\quad (40) \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} \\
&= \frac{0}{1+1} = 0
\end{aligned}$$

## Esercizio 12

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln |\tan x|}{\ln |\pi - 2x|}$$

***

**Soluzione**
La differenza si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|}=\frac{\infty}{\infty},$$

per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln\tan x}{\ln(\pi-2x)}\\&\overset{H}{=}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-2}{\pi-2x}}\\&=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\pi}{\sin 2x}=\frac{0}{0}\end{aligned}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=2x-\pi \Longrightarrow \sin 2x=\sin(t+\pi)=-\sin t$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{2x-\pi}{\sin 2x}=-\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=-1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln|\tan x|}{\ln|\pi-2x|}=-1$$

# Esercizio 13

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$$

***

**Soluzione**
La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\infty-\infty,$$

Per poter applicare la regola di De L'Hospital, riconduciamo la forma $\infty-\infty$ alla forma $\frac{0}{0}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1-x^2\cot^2 x}{x^2}=\frac{0}{0}\\
&\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-2x\cot^2 x+2x^2\cot x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}}{2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x\cos x}{\sin^3 x}\\
&=\left(\lim_{x\to 0}\cos x\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^3 x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{\sin^3 x}\\
&\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{3\sin^2 x\cos x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{4\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}}{3\frac{\sin^2 x}{x^2}\cos x}=\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\frac{2}{3}$$

## Esercizio 14

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)$$

***

**Soluzione**

La differenza si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\infty-\infty,$$

Per poter applicare la regola di De L'Hospital, riconduciamo la forma $\infty-\infty$ alla forma $\frac{0}{0}$:

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^2\left(1-\cos x\right)}=\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{2x-2x\cos x+x^2\sin x}=\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2-2\cos x+4x\sin x+x^2\cos x}\\
&=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{x^2}}{2\frac{1-\cos x}{x^2}+4\frac{\sin x}{x}+\cos x}\\
&=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 1+1}=\frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Si conclude che:

$$
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-\cos x}-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{1}{6}
$$

# Esercizio 15

Calcolare il limite:

$$
\lim_{x\to 0}|x|^{\sin x}
$$

***

**Soluzione**

Qui abbiamo la forma indeterminata $0^0$:

$$
\lim_{x\to 0}|x|^{\sin x}=0^0,
$$

Scriviamo:

$$
\lim_{x\to 0}|x|^{\sin x}=\lim_{x\to 0}e^{\ln|x|^{\sin x}}=e^{\lim_{x\to 0}\ln|x|^{\sin x}}
$$

Quindi calcoliamo a parte il limite:

$$
\lim_{x\to 0}\ln|x|^{\sin x}=\lim_{x\to 0}\sin x\ln|x|
$$

Distinguiamo i casi: $x\to 0^+$, $x\to 0^-$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\ln|x|^{\sin x}&=\lim_{x\to 0^+}\sin x\ln x=0\cdot\infty\\
&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}\\
&\stackrel{H}{=}-\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin^2 x}{x}\frac{1}{\cos x}\right)\\
&=0^-
\end{aligned}
$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 0^+} |x|^{\sin x} = e^{0^-} = 1^- \tag{41}$$

Per $x \to 0^-$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^-} \ln |x|^{\sin x} &= \lim_{x \to 0^-} \sin x \ln(-x) = 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(-x)}{\frac{1}{\sin x}} \\
&\overset{H}{=} - \lim_{x \to 0^+} \left( \frac{\sin^2 x}{x} \frac{1}{\cos x} \right) \\
&= 0^+
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x \to 0^-} |x|^{\sin x} = e^{0^+} = 1^+ \tag{42}$$

Dalle (41)-(42) segue:

$$\lim_{x \to 0} |x|^{\sin x} = 1$$

## Esercizio 16

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x}$$

***

**Soluzione**

Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty},$$

Eseguiamo il cambio di variabile $y = e^x$, per cui:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \lim_{y \to +\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$$

Alternativamente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{e^x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \left( e^{e^x - 1} \right) = e^{+\infty} = +\infty$$

## Esercizio 17

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi - 2\arctan x}$$

***

**Soluzione**
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi - 2\arctan x} = \frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\pi - 2\arctan x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{2}{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^2}{x\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{2}$$

## Esercizio 18

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx}$$

***

**Soluzione**
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx} = \frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{a\cos(ax) - a}{b\cos(bx) - b}$$
$$= \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to0} \frac{a^2\sin(ax)}{b^2\sin(bx)} = \frac{a^3}{b^3}\lim_{x\to0} \frac{\frac{\sin(ax)}{ax}}{\frac{\sin(bx)}{bx}} = \frac{a^3}{b^3}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin(ax) - ax}{\sin(bx) - bx} = \frac{a^3}{b^3}$$

## Esercizio 19

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x}$$

***

**Soluzione**
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \frac{0}{0},$$

Dividiamo numeratore e denominatore per $x^2$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

Calcoliamo separamente i due limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

donde:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = 2$$

## Esercizio 20

Calcolare il limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

***

**Soluzione**
Qui abbiamo la forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{0}{0},$$

Applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$$
$$= \lim_{x\to 1} \left( \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \right) = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4} - \arctan x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$