Esercizio 1

Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)$$

***

Soluzione
Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)=\infty-\infty$$

La forma indeterminata può essere rimossa determinando un “fattore razionalizzante”. In generale, se

$$f(x)=\sqrt[N]{p(x)}\pm\sqrt[N]{q(x)},$$

il fattore razionalizzante è:

$$r(x)=\sum_{k=1}^{N}(\mp 1)^{k+1}\sqrt[N]{p(x)^{N-k}\,q(x)^{k-1}}$$

Per $f(x)=\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}$

$$\begin{aligned}r(x)&=\sum_{k=1}^{3}(+1)^{k+1}\sqrt[N]{(x-1)^{3-k}(2x)^{k-1}}\\&=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}\end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)\left[\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}\right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{4}}\\&=-\frac{(+\infty)\cdot(1+0^+)}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\\&=-(+\infty)\\&=-\infty\end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right)$$

***

Abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right) = -\infty + \infty, \tag{1}$$

cioè il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. In questo caso l'indeterminazione si rimuove moltiplicando e dividendo per un fattore razionalizzante $r(x)$, che in generale si scrive:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{N} (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}, \text{ per } f(x) = \sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)} \tag{2}$$

Per poter applicare la (2), scriviamo nella (1) $x = -\sqrt[4]{x^4}$ (prendiamo la radice con il segno $-$ poichè nel calcolo del limite è $x \to -\infty$). Quindi:

$$f(x) = x + \sqrt[4]{x^4 + 1} = \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{x^4} \tag{3}$$

Con la $f(x)$ scritta come in (3) possiamo applicare la (2) per ottenere $r(x)$:

$$r(x) = \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} + \sqrt[4]{x^4 (x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{x^8 (x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \tag{4}$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) r(x)}{r(x)} \tag{5}$$

Sviluppiamo $f(x) r(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) r(x) &= \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{x^4} \right) \left[\sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} + \sqrt[4]{x^4 (x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{x^8 (x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \right] \\ &= \sqrt[4]{(x^4 + 1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{(x^4 + 1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}}}{r(x)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{r(x)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{r(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

Ma

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{r(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \tag{7}$$

Esercizio 3

Determinare l'ordine dei seguenti infinitesimi (per $x \to 0$):

1. $f(x) = \frac{10^4 x}{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ (per $x \to 0^+$)
3. $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ (per $x \to 0^+$)
4. $f(x) = \sin x - \tan x$

***

Soluzione

1. Assumiamo in tutti gli esercizi, la funzione $u(x) = x$ come infinitesimo di riferimento.
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 10^4 \lim_{x\to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 1$$
Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$.
2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{\frac{x + \sqrt[n]{x}}{x^{\alpha n}}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \sqrt[n]{x^{1-\alpha n} + \sqrt[n]{x^{1-\alpha n^2}}} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$
Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{1}{n^2}$.
Alternativamente:
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x + x^{1/n}\right)^{1/n}}{x^\alpha} \tag{8}$$
Ma nella (8) x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{1/n}$, per cui
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(x + x^{1/n}\right)^{1/n}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{1/n^2}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2} \tag{9}$$
Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ e $\sqrt[n^2]{x}$ sono equivalenti, giacchè il limite (9) vale 1:
$$\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} \sim \sqrt[n^2]{x} \tag{10}$$

Esercizio 108

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\begin{aligned}
\ln \left[\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \right] &= \lim_{x \to 0} \ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} \\
&= \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} (-\sin x)}{2x} = -\frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = -\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\ln \left[\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} \right] = -\frac{1}{2}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 110

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{\arcsin x - x}=\frac{0}{0}$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{\arcsin x - x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{2x}{1+x^4}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1}\\
&= 2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}\cdot\frac{x\left(1+x^4\right)-x}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)\\
&= 2\lim_{x\to 0}\frac{x^4\sqrt{1-x^2}}{1+x^4}=0
\end{aligned}$$

Esercizio 111

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\infty-\infty$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)\stackrel{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{2x\sin^2 x+x^2\sin 2x}=\frac{0}{0}\\
&\stackrel{H}{=}2\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{2\sin^2 x+4x\sin 2x+2x^2\cos 2x}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{4\left[\frac{1-\cos 2x}{(2x^2)}\right]}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)+2\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)+\cos 2x}\\
&=\frac{4\cdot\frac{1}{2}}{1+2+2+1}=\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 115

Studiare il comportamento della funzione:

$$f(x) = \sqrt{1 + \tan x + \tan^2 x}\left(1 - e^{\pi - 2x}\right), \tag{13}$$

in un intorno del punto $x = \frac{\pi}{2}$.

***

Soluzione

Determiniamo il limite sinistro e destro in tale punto.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 - e^{\pi - 2x}}{\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{-1/2}} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{2e^{\pi - 2x}}{-\frac{1}{2}\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\tan x}{\cos^2 x}\right)} \\
&= -4 \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}\cos^3 x\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2}}{\cos x + 2\sin x} \\
&= -4\left(\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}}{\cos x + 2\sin x}\right)\left[\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2}\right]
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte i due limiti:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{e^{\pi - 2x}}{\cos x + 2\sin x} = \frac{1}{2} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x\left(1 + \tan x + \tan^2 x\right)^{3/2} \\
&= 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos^3 x\left(\frac{\frac{1}{2}\sin 2x + 1}{\cos^2 x}\right)^{3/2} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos^3 x}{|\cos^3 x|}\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 1\right)^{3/2} \\
&= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (-1)\left(\frac{1}{2}\sin 2x + 1\right)^{3/2} \\
&= -1
\end{aligned} \tag{15}$$

Per cui:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = 2 \tag{16}$$

Passiamo al limite per $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-$:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = 0 \cdot \infty$$

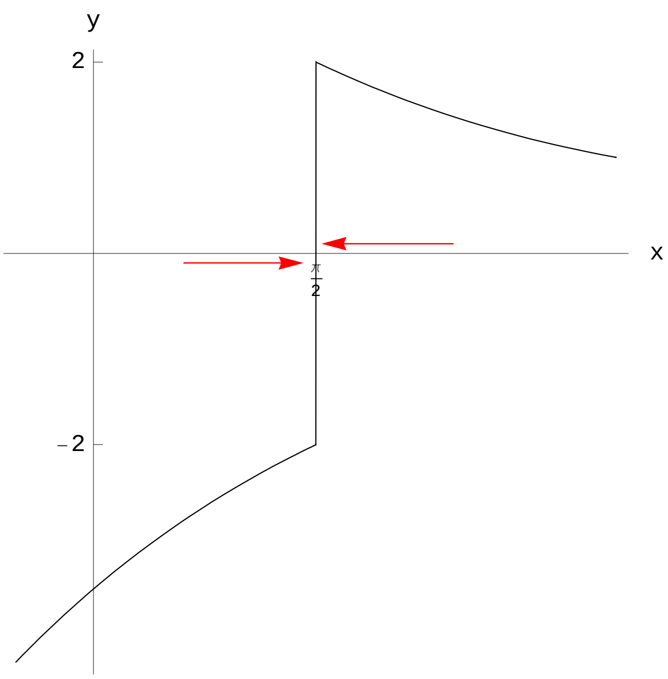
Eseguiamo il cambio di variabile: $y = \tan x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{y \to +\infty} \sqrt{1 + y + y^2} \left(1 - e^{\pi - 2 \arctan x}\right) \\
&= \lim_{y \to +\infty} \frac{1 - e^{\pi - 2 \arctan x}}{(1 + y + y^2)^{-1/2}} = \frac{0}{0} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{\frac{2}{1+y^2} e^{\pi - 2 \arctan x}}{-\frac{1}{2} (1 + y + y^2)^{-3/2} (1 + 2y)} \\
&= -4 \left(\lim_{y \to +\infty} e^{\pi - 2 \arctan x} \right) \left[\lim_{y \to +\infty} \frac{(1 + y + y^2)^{-3/2}}{(1 + y^2)(1 + 2y)} \right] \\
&= -4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2},
\end{aligned} \tag{17}$$

cioè:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -2 \tag{18}$$

Si conclude che $x = \frac{\pi}{2}$ è un punto di discontinuità di prima specie della funzione $f(x)$.



Esercizio 116

Verificare l'inapplicabilità della regola di De L'Hospital nel calcolo del limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0}$$

Se applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

ci ritroviamo con il cacolo del limite:

$$\lim_{x \to 0} \cos \frac{1}{x},$$

che ovviamente non esiste, per cui in tal caso la regola è inapplicabile. Tuttavia, il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x} \right) = 1 \cdot 0 = 0,$$

poichè è $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

Esercizio 117

Verificare l'inapplicabilità della regola di De L'Hospital nel calcolo del limite:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

***

Soluzione
Osserviamo che $\nexists \lim_{|x| \to +\infty} \sin x$, nè tantomeno è possibile applicare la regola di De L'Hospital, in quanto produrrebbe funzioni trigonometriche a numeratore e denominatore e come tali non regolari all'infinito.
Tuttavia, il limite esiste. Infatti:

$$\lim_{|x| \to +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1,$$

poichè è $\lim_{|x| \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.