Esercizio 1

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$
2. $I(x) = \int x \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \frac{dx}{x} \\ &= \int \left(\frac{x^2}{3} - x + 3\right) dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{1}{2}x^2 + 3x\right) + C \\ &= \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + \frac{x^2}{2}(1 - 2\ln x) + 3x(\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

2. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) d\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{2} \int x^2 d\left[\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\right] &= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

per cui:

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right) dx \\ &= x + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+1} \\ &= \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1} \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=0 \\ A-B=1 \end{array} \right. \Longleftrightarrow (A,B) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Perciò:

$$J(x) = x + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + C_1$$

Sostituendo nell'espressione di $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{x^2}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C \\ &= \frac{x^2-1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 2

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

2. $I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \int \ln^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + 2J(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\ln^2 x}{x} + -\frac{2}{x}\ln x + \frac{2}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C \end{aligned}$$

2.
$$I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x)\, d(\ln x)$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$I(t) = \int \ln t dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \ln x\left[\ln(\ln x) - 1\right] + C,$$

Esercizio 3

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
2. $I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \int \ln^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2\ln x \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + 2J(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\ln^2 x}{x} + -\frac{2}{x}\ln x + \frac{2}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x}\left(\ln^2 x + 2\ln x + 2\right) + C \end{aligned}$$

2.

$$I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x)\, d(\ln x)$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$I(t) = \int \ln t dt = t\ln t - \int dt = t\ln t - t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \ln x\left[\ln(\ln x) - 1\right] + C,$$

Esercizio 4

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int x^2 \arctan 3x dx$
2. $I(x) = \int (\arcsin x)^2 dx$

***

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$I\left(x\right)=\int \arctan 3xd\left(\frac{x^{3}}{3}\right)=\frac{x^{3}}{3}\arctan 3x-J\left(x\right)?$$

essendo:

$$\begin{aligned}J\left(x\right)&=\int \frac{x^{3}}{1+9x^{2}}dx=\int \left[\frac{x}{9}-\frac{x}{9\left(1+9x^{2}\right)}\right]dx\\&=\frac{1}{9}\int xdx-\frac{1}{9}\int \frac{xdx}{1+9x^{2}}\\&=\frac{1}{18}x^{2}-\frac{1}{18\cdot 9}\ln\left(1+9x^{2}\right)+C_{1}\\&=\frac{1}{18}\left[x^{2}-\frac{1}{9}\ln\left(1+9x^{2}\right)\right]+C_{1}\end{aligned}$$

Quindi:

$$I\left(x\right)=\frac{x^{3}}{3}\arctan 3x-\frac{1}{18}\left[x^{2}-\frac{1}{9}\ln\left(1+9x^{2}\right)\right]+C$$

2. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t=\arcsin x,$$

cosicchè:

$$x=\sin t,\ dx=\cos tdt$$

L'integrale diventa:

$$I\left(t\right)=\int t^{2}\cos tdt$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned}I\left(t\right)&=\int t^{2}d\left(\sin t\right)=t^{2}\sin t-2\int t\sin tdt\\\int t\sin tdt&=\int td\left(-\cos t\right)=-t\cos t+\int \cos tdt\\&=-t\cos t+\sin t+C_{1}\\&\Longrightarrow I\left(t\right)=\left(t^{2}-2\right)\sin t+2t\cos t+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I\left(x\right)=\arcsin x\left(x\arcsin x+2\sqrt{1-x^{2}}\right)-2x+C$$

Esercizio 5

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int x \sin x \cos x dx$
2. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

***

Soluzione

1.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int x d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x)\right] \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2x - 2x \cos 2x) + C \end{aligned}$$

2. Integriamo per parti:

$$I(x) = \int \arcsin x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + J(x),$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

Eseguiamo la sostituzione trigonometrica:

$$x = \sin t,$$

cosicchè:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \; dx = \cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$J(t) = \int \frac{dt}{\sin t},$$

ed è un integrale noto:

$$J(t) = \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + C_1$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} J(x) &= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C_1 \\ &= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C_1 \end{aligned}$$

$$I(x) = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C$$

Esercizio 6

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

2. $I(x) = \int x\tan^2 2x dx$

***

Soluzione

1. Osserviamo che:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C,$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \arcsin\sqrt{x} d\left(-2\sqrt{1-x}\right) \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \sqrt{1-x} d\left(\arcsin\sqrt{x}\right) \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= -2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

2. Osserviamo che:

$$\int \tan^2 2x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} - \int dx = \frac{1}{2}\tan 2x - x + C$$

per cui:

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int x d\left(\frac{1}{2}\tan 2x - x\right) \\
&= x\left(\frac{1}{2}\tan 2x - x\right) - \int\left(\frac{1}{2}\tan 2x - x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}x\tan 2x - x^2 - \frac{1}{2}\int \tan 2x dx + \frac{x^2}{2} + C_1
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}
\int \tan 2x dx &= \frac{1}{2}\int \tan 2x d(2x) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d(\cos 2x)}{\sin 2x} \\
&= \frac{1}{2}\ln|\cos 2x| + C_1
\end{aligned}$$

Sviluppiamo il $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}},$$

donde:

$$\ln|\cos 2x| = \ln\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 2x\right)$$

Quindi l'integrale è:

$$I(x) = \frac{x}{2}\tan 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\int \tan 2x dx + C$$

Esercizio 7

Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{\sin^2 x}{e^x}dx$$
$$\int e^{2x}\cos 3x dx$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned}
I(x) &= \int \sin^2 x d\left(-e^{-x}\right) \qquad (1) \\
&= -e^{-x}\sin^2 x + J(x),
\end{aligned}$$

essendo:

$$J(x)=\int e^{-x}\sin 2x dx=\int e^{-x}d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \tag{2}$$
$$=-\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\int e^{-x}\cos 2x dx$$

Calcoliamo a parte:

$$J_1(x)=\int e^{-x}\cos 2x dx=\int e^{-x}d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \tag{3}$$
$$=\frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x+\frac{1}{2}J(x)$$

Sostituendo nella (2):

$$J(x)=-\frac{e^{-x}}{2}\cos 2x-\frac{e^{-x}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}J(x)$$

per cui:

$$J(x)=-\frac{e^{-x}}{5}(2\cos 2x+\sin 2x)+C_1$$

Quindi:

$$\begin{aligned}I(x)&=-e^{-x}\sin^2 x-\frac{e^{-x}}{5}(2\cos 2x+\sin 2x)+C\\&=-\frac{e^{-x}}{2}(1-\cos 2x)-\frac{e^{-x}}{5}(2\cos 2x+\sin 2x)+C\\&=\frac{e^{-x}}{10}(\cos 2x-2\sin 2x-5)+C\end{aligned}$$

***

Anzichè procedere per parti, scriviamo:

$$\int e^{2x}\cos 3x dx=Ae^{2x}\cos 3x+Be^{2x}\sin 3x \tag{4}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x:

$$e^{2x}\cos 3x=\frac{d}{dx}\left(Ae^{2x}\cos 3x+Be^{2x}\sin 3x\right) \tag{5}$$
$$=e^{2x}(2A+3B)\cos 3x+(-3A+2B)e^{2x}\sin 3x$$

La (5) è verificata se e solo se:

$$\begin{cases}2A+3B=1\\-3A+2B=0\end{cases}\Longrightarrow A=\frac{2}{13},\ B=\frac{3}{13}$$

Quindi l'integrale è:

$$\int e^{2x}\cos 3x dx=\frac{2}{13}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{13}e^{2x}\sin 3x+C \tag{6}$$

Esercizio 8

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x)\, dx$

2. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

***

Soluzione

1. Anzichè integrare per parti, scriviamo:

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x)\, dx = Ae^{3x} \sin 4x + Be^{3x} \cos 4x + C \tag{7}$$

derivando:

$$\begin{aligned} & e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \\ & = e^{3x} (3A - 4B) \sin 4x + e^{3x} (4A + 3B) \cos 4x \\ & \iff \begin{cases} 3A - 4B = 2 \\ 4A + 3B = -5 \end{cases} \implies A = -\frac{14}{25},\ B = -\frac{23}{25} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x)\, dx = \frac{e^{3x}}{25} (-14 \sin 4x - 23 \cos 4x) + C$$

2. Osserviamo che:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} e^{\tan x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan x e^{\tan x} d (\tan x)$$

Poniamo $t = \tan x$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int te^t dt = \int td \left(e^t\right) = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + C,$$

cioè:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = e^{\tan x} (\tan x - 1) + C$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int xd \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) - \int \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \tan 2x - x^2 - \frac{1}{2} \int \tan 2x dx + \frac{x^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}\int \tan 2x dx &= \frac{1}{2}\int \tan 2x d\left(2x\right)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(\cos 2x\right)}{\sin 2x}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\cos 2x\right| + C_1\end{aligned}$$

Sviluppiamo il $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}},$$

donde:

$$\ln\left|\cos 2x\right| = \ln\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2x}} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\tan^2 2x\right)$$

Quindi l'integrale è:

$$I\left(x\right) = \frac{x}{2}\tan 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}\int \tan 2x dx + C$$

Esercizio 9

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\displaystyle\int e^x \ln\left(1+e^x\right) dx$
2. $\displaystyle\int e^x \sin x dx$

***

Soluzione

1.

$$\begin{aligned}I\left(x\right) &= \int e^x \ln\left(1+e^x\right) dx\\ &= \int \ln\left(1+e^x\right) d\left(e^x\right)\\ &= e^x \ln\left(1+e^x\right) - J\left(x\right),\end{aligned}$$

essendo:

$$J\left(x\right) = \int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x}{1+e^x}d\left(e^x\right)$$

Poniamo $t = e^x$:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= t - \ln|t+1| \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$J(x) = e^x - \ln(1 + e^x) + C$$

E finalmente:

$$I(x) = (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - e^x + C$$

2. Anziché integrare per parti, scriviamo:

$$\int e^x \sin x dx = Ae^x \sin x + Be^x \cos x + C$$

derivando:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= e^x (A - B) \sin x + e^x (A + B) \cos x \\ &\iff \begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \Longrightarrow A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Esercizio 10

Dimostrare:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C \end{aligned} \tag{8}$$

***

Soluzione

Per il primo integrale, ci serviamo della formula di duplicazione del seno $\sin 2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$, scrivendo $\sin x = 2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2 \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

Procedendo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2}\int \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}dx \\ &= -\int \frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}} + \int \frac{d\left(\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}} \\ &= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C \\ &= \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\end{aligned}$$

Per ricondurlo alla prima delle (8) ci serviamo delle formule di bisezione:

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \cot x,$$

ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + C$$

Il secondo può essere ricondotto al primo scrivendo:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

cosicché:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = -\ln\left|\frac{1}{\cos x} - \tan x\right| + C$$

Per ricondurlo alla seconda delle (8) osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{1}{\cos x} - \tan x} &= \frac{1}{\frac{1}{\cos x} - \tan x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan x}{\frac{1}{\cos x} + \tan x} \\ &= \frac{1}{\cos x} + \tan x,\end{aligned}$$

da cui:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + C$$