Esercizio 1

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \tag{1}$$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x = 0 \tag{2}$$

Per risolvere tale equazione poniamo:

$$t = \ln x \tag{3}$$

Quindi:

$$\frac{t^2}{2} - t = 0 \Longleftrightarrow t\left(\frac{t}{2} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow t = 0, t = 2 \tag{4}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} t = 0 &\Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ t = 2 &\Longrightarrow \ln x = 2 \Longrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

Perciò:

$$A(1,0),\ B\left(e^2, 0\right) \in \gamma \cap x \tag{5}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x > 0 \tag{6}$$

Eseguendo nuovamente il cambio (3):

$$\frac{t^2}{2} - t > 0 \Longleftrightarrow t < 0, t > 2$$

che corrispondono a

$$\begin{aligned} \ln x < 0 &\Longleftrightarrow x \in (0,1) \\ \ln x > 2 &\Longleftrightarrow x \in (2, +\infty), \end{aligned} \tag{7}$$

ciò implica:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (1,2)$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \right) = \infty - \infty \tag{8}$$

Poniamo: $t = \ln x$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = \lim_{t \to -\infty} t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} \right) = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = +\infty,$$

Esaminiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

perciò:

$$m = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{x} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Calcoliamo gli zeri di $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 1 \Longleftrightarrow x = e$$

pertanto $x = e$ è un punto estremale.

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\ln x - 1}{x} > 0 \iff x \in (e, +\infty),$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(e, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, e)$. Quindi $x = e$ è punto di minimo relativo per f. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(e, -\frac{1}{2}\right)$$

Studio della derivata seconda
Determiniamo gli zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2$$

Il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff \ln x < 2 \iff x \in \left(0, e^2\right),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$ e concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$. Perciò $x = e^2$ è punto di flesso. Notiamo che tale punto è uno zero di $f(x)$, quindi il flesso è il punto B (eq. 5).
Il grafico completo è riportato in figura (1).

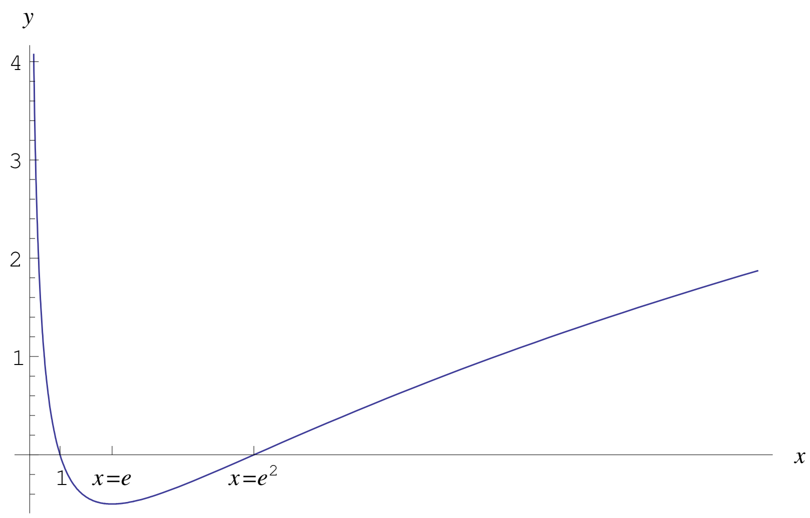

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln x - \arctan x \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

Per la presenza del logaritmo la funzione è definita per $x > 0$, quindi $X = (0, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln x = \arctan x \tag{2}$$

La (2) va risolta per grafica o numerica, ottenendo la radice $\alpha \simeq 3.69$. Quindi $A(\alpha, 0) \in \gamma \cap x$, essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \ln x > \arctan x \iff x \in (\alpha, +\infty),$$

giacchè $\ln x$ e $\arctan x$ sono strettamente crescenti.

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha)$.

Comportamento agli estremi

La funzione diverge negativamente per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = (-\infty) + 0 = -\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

La funzione diverge positivamente per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) - \frac{\pi}{2} = +\infty$$

Calcoliamo:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{\arctan x}{x} \right) = 0,$$

quindi il grafico è privo di asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x(1 + x^2)} \tag{3}$$

$$f''(x) = -\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 (x^2 + 1)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

Per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Concavità e punti di flesso.
Risulta:

$$\forall x \in X, \; f''(x) < 0$$

Quindi il grafico è concavo verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

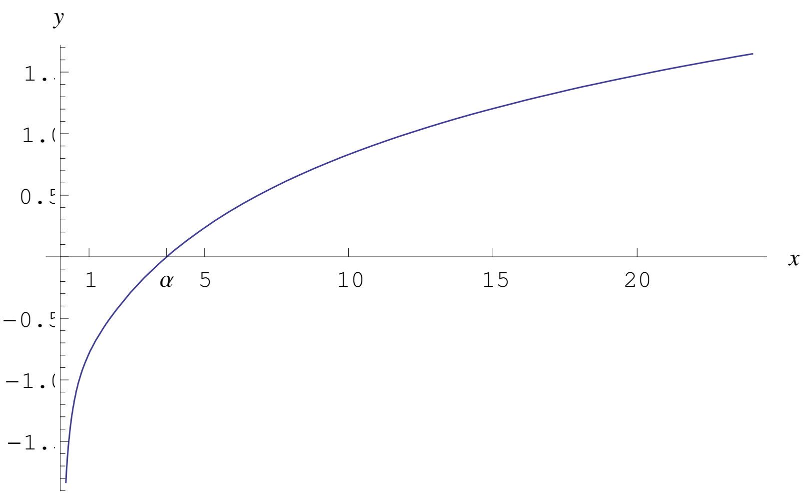

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 3

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan(\ln x) \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Per la presenza del logaritmo la funzione è definita per $x > 0$, quindi $X = (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \Longrightarrow A(1,0) \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \ln x > 0 \iff x \in (1, +\infty),$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (1, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, 1)$.
Comportamento agli estremi
La funzione converge per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{2},$$

cosicché $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile. Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(\ln x), & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Pertanto $B\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \in \gamma \cap y$.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta $2y = \pi$ è asintoto orizzontale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{1}{x\left(1 + \ln^2 x\right)} \tag{3}$$

$$f''(x) = -\frac{(1 + \ln x)^2}{x^2 \left(\left(1 + \ln^2 x\right)\right)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Esaminiamo il comportamento di $f'(x)$ nel punto $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\left(1+\ln^2 x\right)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{1+\ln^2 x} \\ &= \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \end{aligned}$$

cioè il grafico "parte" dal punto $B\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$ con tangente verticale.
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in X - \left\{\frac{1}{e}\right\}$$

Resta l'ambiguità sul punto $x = \frac{1}{e}$, poiché non si tratta di un punto di flesso. Determinando con un qualunque programma di calcolo le derivate fino al quarto ordine, vediamo che:

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = f''\left(\frac{1}{e}\right) = f'''\left(\frac{1}{e}\right) = 0, \quad f^{IV}\left(\frac{1}{e}\right) < 0$$

Da ciò segue che nel punto $x = \frac{1}{e}$ il grafico è concavo verso il basso. Allo stesso risultato si giunge intuitivamente, poichè la funzione è ivi strettamente crescente e il grafico deve necessariamente essere concavo verso il basso, poichè è tale in ogni intorno di $x = \frac{1}{e}$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

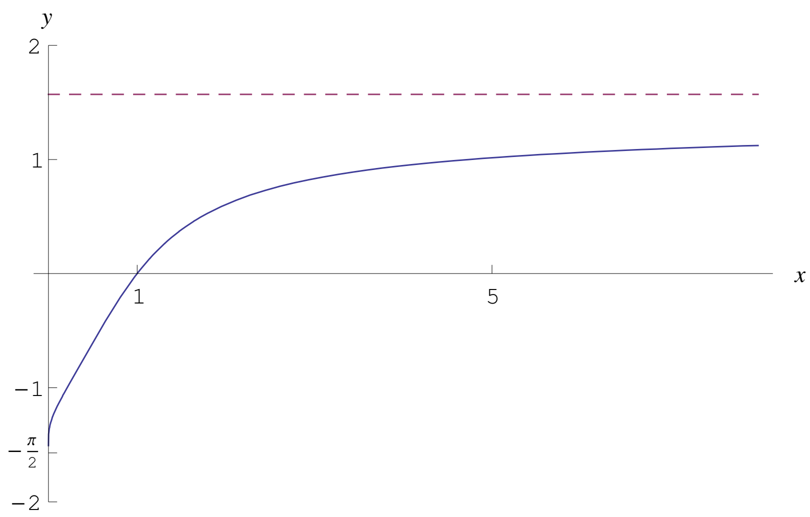

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(\arctan x) \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \arctan x = 1 \Longleftrightarrow x = \alpha \simeq 1.56 \Longrightarrow A(\alpha, 0) \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arctan x > 1 \Longleftrightarrow x \in (\alpha, +\infty),$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (\alpha, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, \alpha 1)$.
Comportamento agli estremi
La funzione diverge negativamente per $x \to 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty,$$

cosicché l'asse y è asintoto verticale.
Pertanto $B\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \in \gamma \cap y$.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln \frac{\pi}{2},$$

quindi la retta $y = \ln \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} \\ f''(x) &= -\frac{1+2x\arctan x}{(1+x^2)^2(\arctan x)^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.

Concavità e punti di flesso.

Osserviamo che $x \arctan x > 0$, $\forall x \in X$. Pertanto la derivata seconda non si annulla mai in X. Più precisamente è sempre < 0, quindi γ è concavo verso il basso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (1).

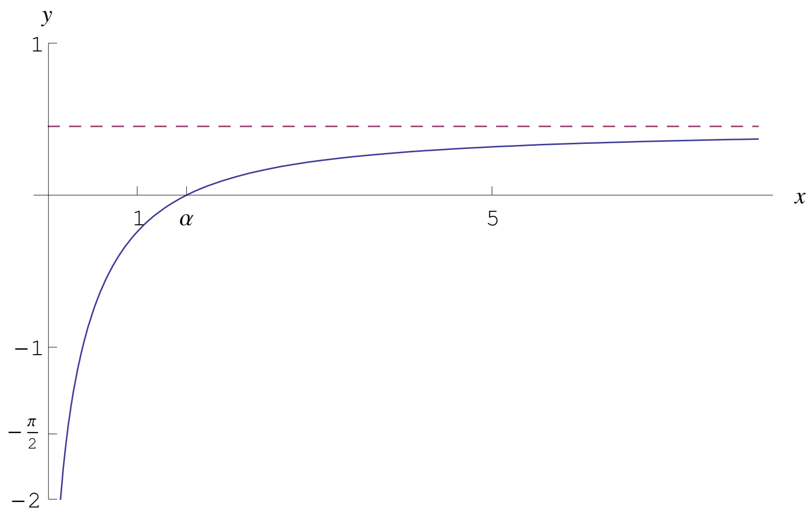

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 5

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{1/x}\right) \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow e^{1/x} = 0 \text{ mai!} \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} \arctan\left(e^{1/x}\right) = \frac{\pi}{2}^-, \quad \lim_{x \to 0^-} \arctan\left(e^{1/x}\right) = 0^+$$

Cioè $x = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie. Il salto di discontinuità è:

$$s = \frac{\pi}{2}$$

Si noti che la discontinuità non è simmetrica.

La funzione converge per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(e^{1/x}\right) = \frac{\pi}{4}^+, \quad \lim_{x \to -\infty} \arctan\left(e^{1/x}\right) = \frac{\pi}{4}^+$$

quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{e^{1/x}}{x^2\left(1 + e^{2/x}\right)} \\ f''(x) &= \frac{e^{1/x}\left[1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1)\right]}{\left(1 + e^{2/x}\right)^2 x^4} \end{aligned} \tag{3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) < 0$$

per cui la funzione è strettamente decrescente in X.
Determiniamo la derivata sinistra e destra in $x = 0$:

$$f'_{-}(0) = \lim_{x \to 0^{-}} f'(x) = 0$$
$$f'_{+}(0) = \lim_{x \to 0^{+}} f'(x) = 0$$

Quindi γ "arriva" in $x = 0^{-}$ con tangente orizzontale, e "parte" da $x = 0^{+}$ con tangente orizzontale

Concavità e punti di flesso.

Zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1) = 0$$

Risolvendo numericamente, troviamo le radici:

$$\alpha \simeq -0.48, \ \beta = -\alpha$$

Segno di $f''(x)$:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 + 2x + e^{2/x}(2x - 1) > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow x \in (\alpha, 0) \cup (\beta, +\infty),$$

per cui γ è concavo veso l'alto in $(\alpha, 0) \cup (\beta, +\infty)$ ed è concavo verso il basso in $(-\infty, \alpha) \cup (0, \beta)$. Ciò implica che $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono punti di flesso.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (1).

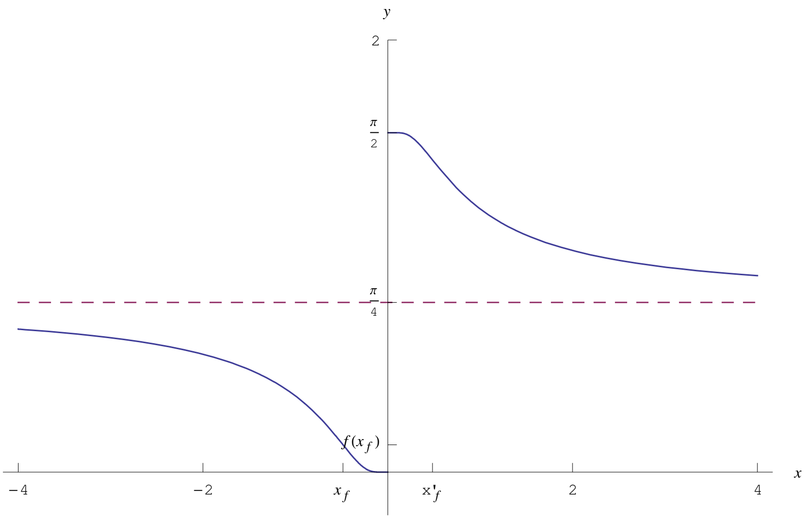

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 6

Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)} \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow X = (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arctan x + 1 > 1 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e nel semipiano $y > 0$ per $x \in (-\tan 1, 0)$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} f(x) = -\frac{1}{\ln 0^+} = -\frac{1}{-\infty} = 0^+,$$

cosicchè $x = -\tan 1$ è una discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.

La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$$

quindi la retta $y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$ è asintoto orizzontale a destra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \tag{3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Determiniamo la derivata destra in $x = -\tan 1$:

$$\begin{aligned} f'_+(-\tan 1) &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \\ &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \end{aligned}$$

Il primo limite non produce indeterminazione, quindi calcoliamo il secondo ponendo $t = 1 + \arctan x$, e ciò implica $t \to 0^+$ se $x \to (-\tan 1)^+$

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t \ln^2 t}$$

Siccome $\lim_{t \to 0} t \ln^2 t = 0^+$, si ha:

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} = +\infty,$$

donde:

$$f'_+(-\tan 1) = +\infty$$

Quindi γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto.
Concavità e punti di flesso.
Non abbiamo determinato la derivata seconda, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto, segue che esiste un flesso in $x_f \in (-\tan 1, 0)$, risultando γ concavo verso il basso in $(-\tan 1, x_f)$ e concava verso l'alto in $(x_f, 0)$. In $(0, +\infty)$ γ volge nuovamente la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

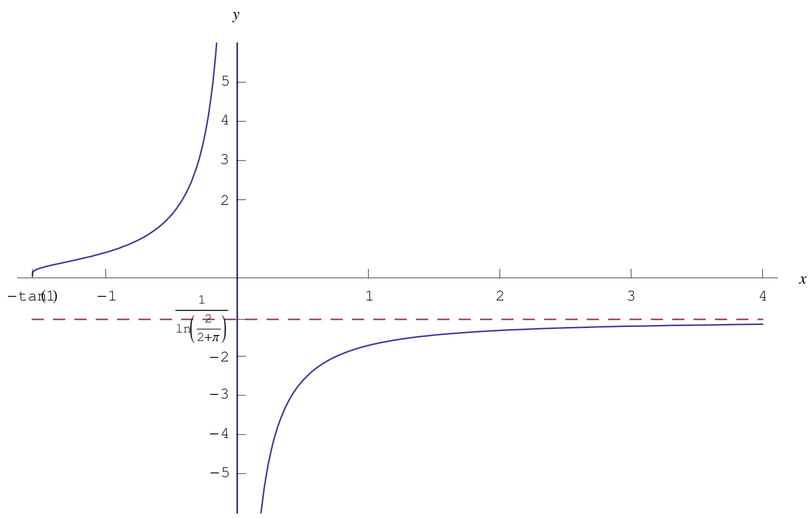

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 7

Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{1/x^2}\right) \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-, \lim_{x \to 0^-} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Longrightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

cosicchè $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \arctan\left(e^{0^+}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+,$$

e in forza della parità:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arctan\left(e^{0^+}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^+$$

quindi la retta $y = \frac{\pi}{4}$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -\frac{2e^{1/x^2}}{x^3\left(1 + e^{2/x^2}\right)} \tag{3}$$

$$f''(x) = \frac{2e^{1/x^2}\left[2 + 3x^2 + e^{2/x^2}\left(3x^2 - 2\right)\right]}{x^6\left(1 + e^{2/x^2}\right)^2} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$.
Determiniamo le derivata destra e sinitra in $x = 0$:

$$f'_+(0) = -\lim_{x \to 0^+} \frac{2e^{1/x^2}}{x^3\left(1 + e^{2/x^2}\right)} = 0$$
$$f'_-(0) = -\lim_{x \to 0^-} \frac{2e^{1/x^2}}{x^3\left(1 + e^{2/x^2}\right)} = 0$$

(per il calcolo si suggerisce il cambio di variabile $t = \frac{1}{x}$).
Quindi γ "arriva" e "parte" da $x = 0$ con tangente orizzontale.
Concavità e punti di flesso.
Lo studio della derivata seconda è complicato, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ "arriva" e "parte" da $x = 0$ con tangente orizzontale, segue che esistono due flessi simmetrici rispetto all'asse y, con $|x| \sim 2/3$.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

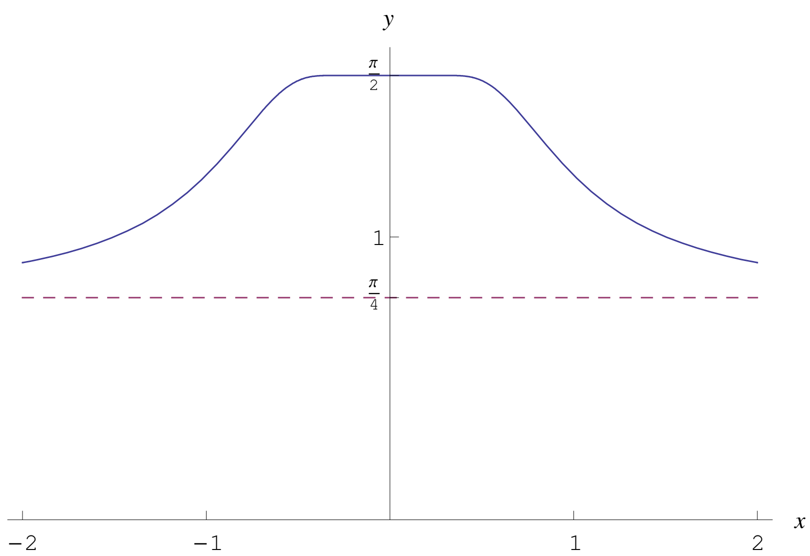

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 8

Studiare la funzione

$$f(x) = \arcsin e^x \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \; f(x) > 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \arcsin 0^+ = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto orizzontale a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} \tag{3}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{\sqrt{(1 - e^x)^3}} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Studio del segno:

$$\forall x \in X, \; f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.

Determiniamo le derivata sinistra in $x = 0$:

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} = +\infty$$

Quindi γ "arriva" a $x = 0$ con tangente verticale orientata verso l'alto.

Concavità e punti di flesso.

Segno della derivata seconda:

$$\forall x \in X, \ f''(x) > 0,$$

per cui il grafico volge la concavità verso l'alto.

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (1).

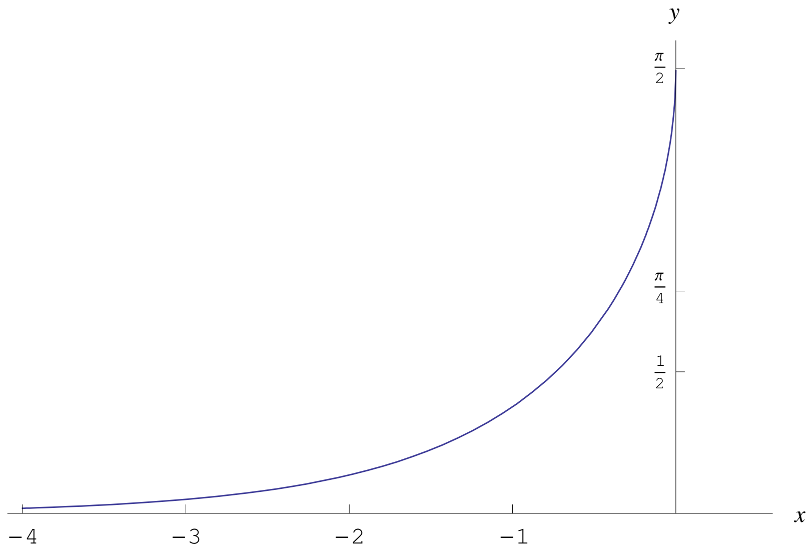

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.