Esercizio 1

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{-x}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow O(0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty),$$

per cui il diagramma giace nel sempiano $y > 0$ per $x > 0$, e nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+,$$

giacchè e^x è, per $x \to +\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{-x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Poniamo per definizione:

$$g(x) = |x|^\alpha$$

Risulta:

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty,$$

per cui la funzione è, per $x \to -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Si conclude che il diagramma cartesiano è privo di asintoto obliquo a sinistra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$
$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1,$$

quindi $x_0 = 1$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 1)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 1)$, e strettamente decrescente altrove. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di minimo assoluto per f.

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = 2$$

Studio del segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (2, +\infty),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(2, +\infty)$ e concavo verso il basso in $(-\infty, 2)$.
In figura (1) riportiamo il grafico per $x \in [-1, 4]$.

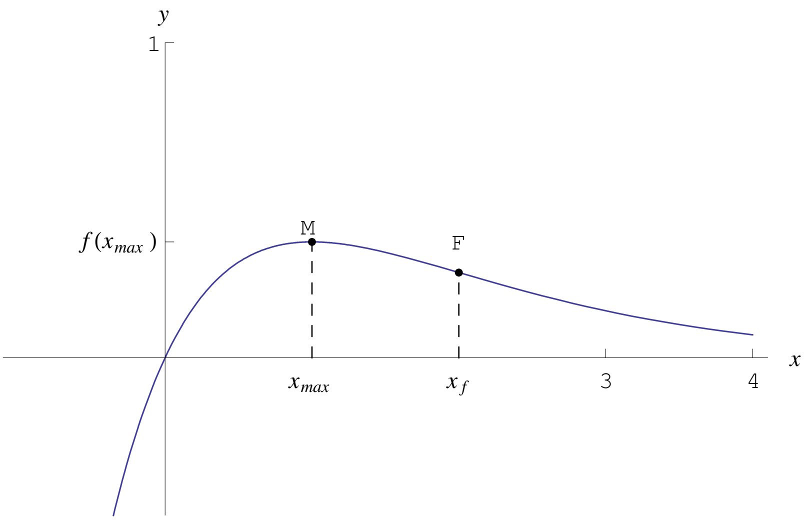

Figure 1: Grafico della funzione assegnata per $x \in [-1, 4]$.

In figura (2) riportiamo il grafico completo.

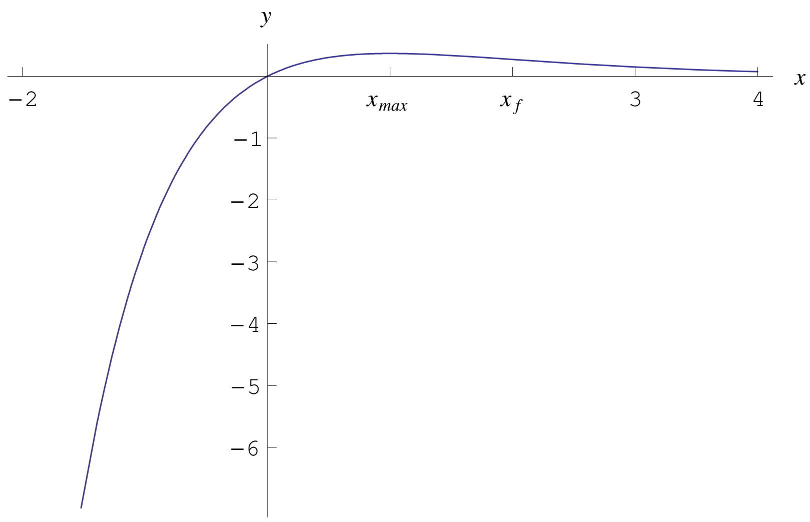

Figure 2: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = \left(2 + x^2\right) e^{-x^2} \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ \ f(x) > 0) \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = 2 \Longrightarrow (0, 2) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

Dalla (2) segue che il diagramma giace nel sempiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $|x| \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2 + x^2\right) e^{-x^2} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 + x^2}{e^{x^2}} = 0^+, \tag{3}$$

poichè e^{x^2} è - per $x \to +\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande.

Dalla parità della funzione segue:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x\left(x^2 + 1\right) e^{-x^2} \\ f''(x) &= 2\left(2x^4 - x^2 - 1\right) e^{-x^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$$

quindi $x_0 = 0$ è un punto estremale.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \overset{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^4 - x^2 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Prendendo le soluzioni reali:

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x^2 > 1 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, ed è concavo verso il basso in (x_1, x_2). Da ciò segue che $x_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua:

$$F_1\left(-1, \frac{3}{e}\right), \; F_2\left(1, \frac{3}{e}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

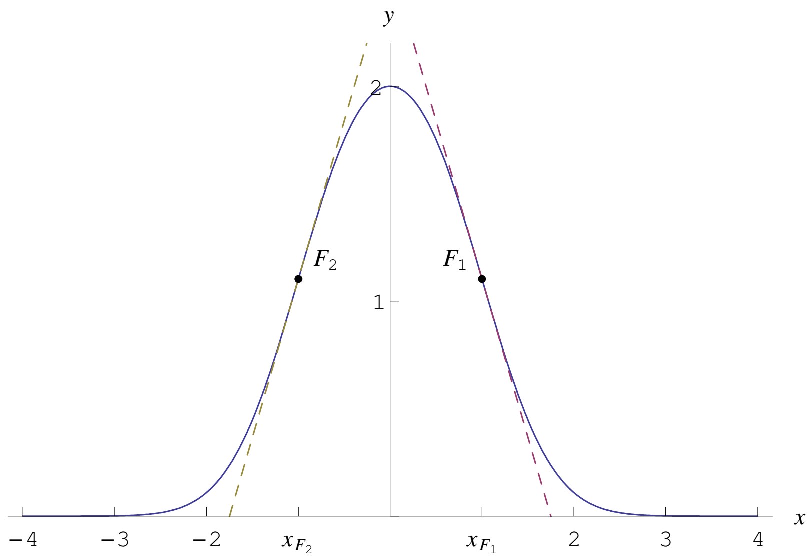

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 3

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow A(1,0) \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

Segue che per $x > 1$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0,1)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+, \tag{3}$$

cioè l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \tag{4}$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \tag{5}$$
$$f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 2 \Longleftrightarrow x = e^2,$$

quindi $x_0 = e^2$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^2\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, e^2)$, e strettamente decrescente in $(e^2, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \overset{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f:

$$M\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = \frac{8}{3} \Longleftrightarrow x = e^{8/3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(e^{8/3}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(e^{8/3}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(0, e^{8/3}\right)$. Da ciò segue che $e^{8/3}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

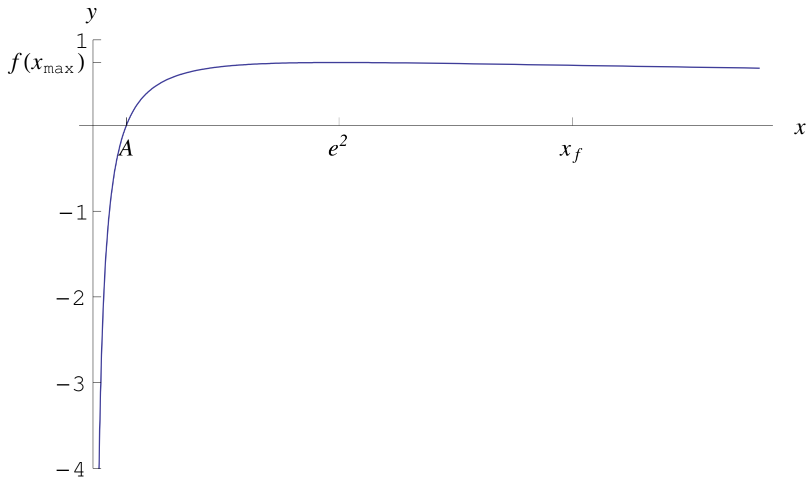

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che $\ln x \neq 0$, cioè $X = (0,1) \cup (1,+\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} \nexists x \in X \mid f(x) = 0 &\Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \\ 0 = x \notin X &\Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y \end{aligned}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{x}{\ln x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (1,+\infty)$$

Segue che per $x > 1$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0,1)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \tag{2}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.
Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \longrightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0^- \tag{3}$$

Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \end{aligned} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e,$$

quindi $x_0 = e$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (e, +\infty)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(e, +\infty)$, e strettamente decrescente in $(0, e)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo.

$$m(e, e)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = e^2$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(1, e^2\right),$$

per cui il grafico è concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$, ed è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$. Da ciò segue che e^2 è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

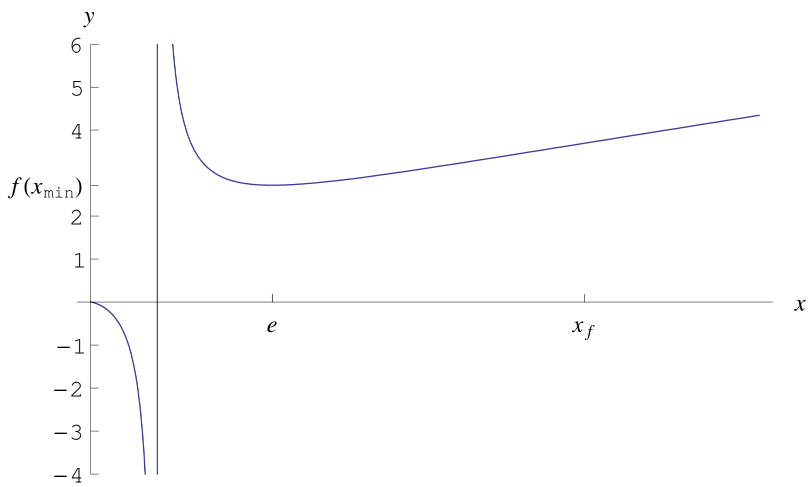

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 5

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{x^2 - 1} \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che $x^2 - 1 > 0$, quindi $X = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, per cui il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.

Intersezioni con gli assi

Data l'espressione analitica della funzione, bisognerebbe ricorrere al calcolo numerico, per cui tralasciamo le intersezioni con gli assi, osservando però che non ci sono intersezioni con l'asse y, giacchè $0 = x \notin X$.

Studio del segno

Tralasciamo per le stesse ragioni di sopra.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln\left(0^+\right) + \frac{1}{0^+} = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty \tag{2}$$

Per rimuovere la forma indeterminata (2) procediamo nel seguente modo_

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) + 1}{x^2 - 1} \tag{3}$$

Poniamo:

$$l_1 = \lim_{x \to 1^+} \left(x^2 - 1\right) \ln\left(x^2 - 1\right) = 0 \cdot \infty$$

Poniamo:

$$\ln\left(x^2 - 1\right) = t \Longrightarrow x^2 - 1 = e^t$$

Abbiamo:

$$x \to 1^+ \Longrightarrow x^2 - 1 = e^t \to 0^+ \Longrightarrow t \to -\infty,$$

cosicchè:

$$l_1 = \lim_{t \to -\infty} te^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = 0^+,$$

in quanto e^t è per $t \to -\infty$ un infinito di ordine infinitamente grande. Ora siamo in grado di calcolare il limite (3):

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{l_1+1}{\lim_{x\to 1^+}(x^2-1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi la retta $x=1$ è asintoto verticale. Siccome la funzione è pari, si ha:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

Quindi la retta $x=-1$ è asintoto verticale.
La funzione è infinita per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \tag{4}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x\to+\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.
Inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x} + \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x} + 0^+$$

Ma:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-1} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$$

Pertanto il grafico è privo di asintoti obliqui.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} \tag{5}$$
$$f''(x) = -2\frac{x^4-3x^2-2}{(x^2-1)^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di $f'(x)$:

$$f'(x)=0 \iff \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} = 0 \iff x = \pm\sqrt{2}, 0 \tag{6}$$

$0 = x \notin X$, quindi gli unici punti estremali sono:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} > 0 \iff x \in \left(-\sqrt{2},-1\right) \cup \left(\sqrt{2},+\infty\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, e strettamente decrescente in $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$. Ciò implica che $x_{1,2}$ sono entrambi punti di minimo relativo

$$m_1\left(-\sqrt{2},1\right),\ m_2\left(\sqrt{2},1\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow\frac{x^4-3x^2-2}{\left(x^2-1\right)^3}=0\Longleftrightarrow x^4-3x^2-2=0\Longleftrightarrow x'_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow\frac{x^4-3x^2-2}{\left(x^2-1\right)^3}<0\Longleftrightarrow x\in\left(x'_1,-1\right)\cup\left(1,x'_2\right)$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(x'_1,-1\right)\cup\left(1,x'_2\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(-\infty,x'_1\right)\cup\left(x'_2,+\infty\right)$. Da ciò segue che $x'_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

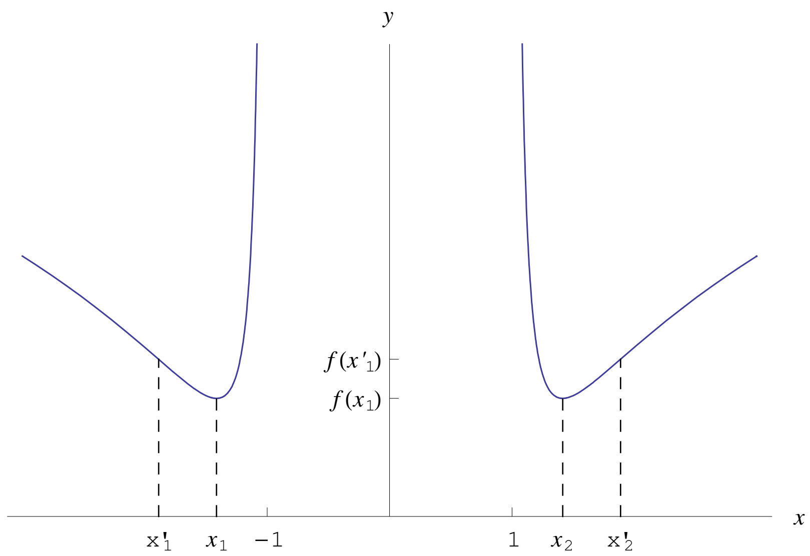

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 6

Studiare la funzione

$$f(x) = x \arctan \frac{1}{x} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni $x \neq 0$, per cui $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) = (-x) \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = x \arctan \frac{1}{x}$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} &\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \\ &0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y \end{aligned} \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \arctan \frac{1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in X, \tag{3}$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
Abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \cdot \arctan(+\infty) = 0^+ \cdot \frac{\pi}{2} = 0^+ \tag{4}$$

Siccome la funzione è pari, deve essere:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^+ \tag{5}$$

Cioè:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0^+ \tag{6}$$

Si conclude che $x = 0$ è un punto di discontinuità eliminabile.
La funzione convergente per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot \infty$$

Tale forma indeterminata può essere rimossa ponendo $t = \frac{1}{x}$, donde:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\arctan t}{t} = 1 \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = 1 \tag{7}$$

Ciò implica che la retta $y-1=0$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{1+x^2} \\ f''(x) &= -\frac{2}{(x^2+1)^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Risulta:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\frac{\pi}{2} \\ f'_+(0) &= \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Quindi $x=0$ è un punto angoloso. Le semirette tangenti a sinistra e a destra, hanno equazione rispettivamente:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{\pi}{2}x \\ y &= \frac{\pi}{2}x \end{aligned} \tag{9}$$

Lo studio del segno della $f'(x)$ è troppo complicato, però si deduce facilmente che la funzione è strettamente crescente in $(0,+\infty)$ e strettamente decrescente altrove. Pertanto il punto angoloso $x=0$ è punto di minimo relativo.
Concavità e punti di flesso.

$$\forall x \in X,\ f''(x) < 0$$

Quindi il grafico è concavo verso il basso.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

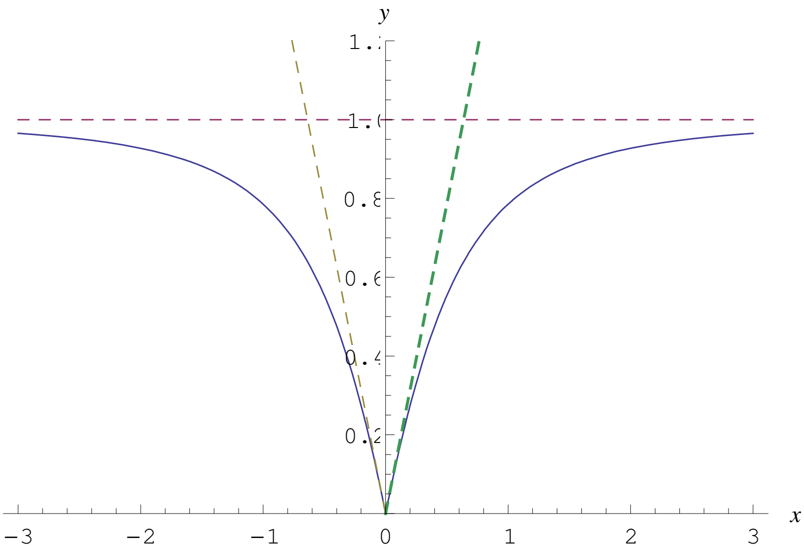

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 7

Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 \arctan x \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è dispari: $f(-x) \equiv -f(x)$, per cui il grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi coordinati.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma, \tag{2}$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x > 0 \tag{3}$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (-\infty, 0)$.
Comportamento agli estremi
Abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è dispari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \tag{4}$$

Calcoliamo:

$$m_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} x \arctan x = +\infty,$$

e in forza della simmetria rispetto all'origine:

$$m_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Quindi il grafico è privo di asintoti obliqui.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \left(\frac{x}{1+x^2} + 3 \arctan x \right) \\ f''(x) &= \frac{2 \left[x \left(x^2 + 2 \right) + \left(1 + x^2 \right) \arctan x \right]}{\left(1 + x^2 \right)^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$f'(0) = 0,$$

pertanto $x = 0$ è un punto estremale.
Studio della derivata seconda

$$f''(0) = 0$$

Lo studio del segno delle derivate è troppo complicato, per cui per stabilire la natura di $x = 0$, valutiamo la derivata terza in tale punto:

$$f'''(x) = -2\frac{x^2+3}{(x^2+1)^3} \Longrightarrow f'''(0) = 6,$$

donde $x = 0$ è un punto di flesso a tangente orizzontale.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

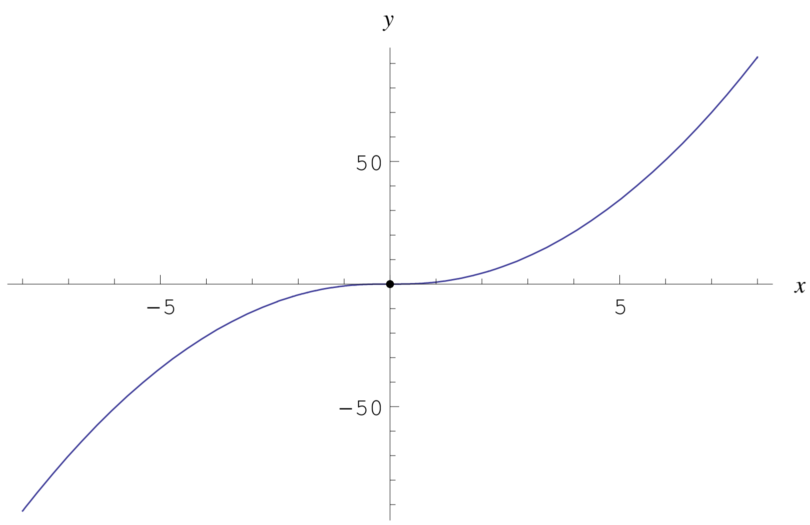

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 8

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + |x|} \tag{1}$$

Soluzione
Insieme di definizione
Per la presenza del valore assoluto dobbiamo distinguere i due casi: $x \geq 0$ e $x > 0$, giacchè:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{x^2-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

N.B. Nella (3) poniamo $x > 0$ in quanto la funzione non è definita per $x = 0$.
Definiamo allora due funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x^2 + x}, \quad \text{per } x \in X_1 = (0, +\infty) \\ f_2(x) &= \frac{1}{x^2 - x}, \quad \text{per } x \in X_2 = (-\infty, 0) \end{aligned} \tag{4}$$

Siccome la funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y, quindi ci basta studiare l'andamento del grafico γ_1 di f_1, dopodichè procedendo per simmetria costruiamo il grafico γ_2 di f_2. Il grafico di f è $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.
Studio della f_1
Risulta:

$$\forall x \in X_1, \; f_1(x) > 0$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to 0^+} f_1(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 + x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto verticale.
La derivata prima:

$$f_1(x) = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x)^2}$$

Risulta:

$$\forall x \in X_1, \ f_1'(x) < 0,$$

quindi la funzione f_1 è strettamente decrescente in X_1. Per la concavità non c'è bisogno di calcolare la derivata seconda: è facile rendersi conto che γ_1 è concavo verso l'alto.
Il grafico di f_1 è in figura (1)

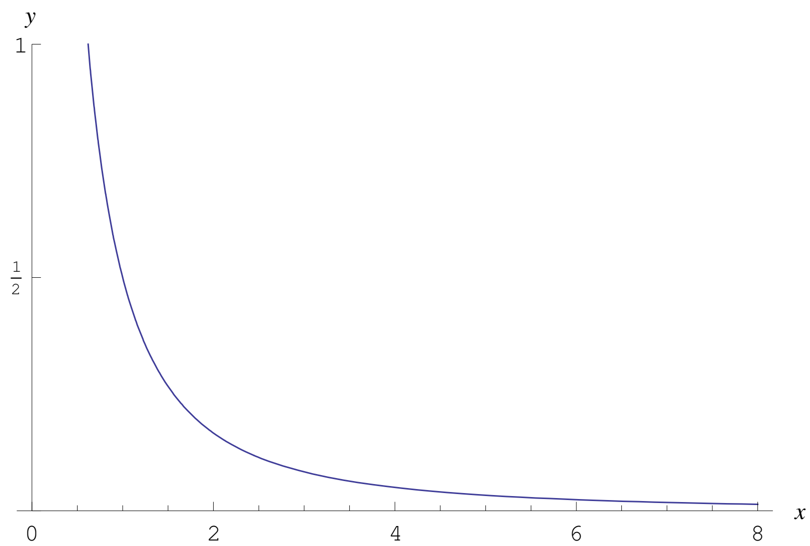

Figure 1: Grafico della funzione $f_1(x)$.

Il grafico γ_2 di f_2 è il simmetrico di γ_1 rispetto all'asse y, quindi il grafico di f è riportato in in figura (2).

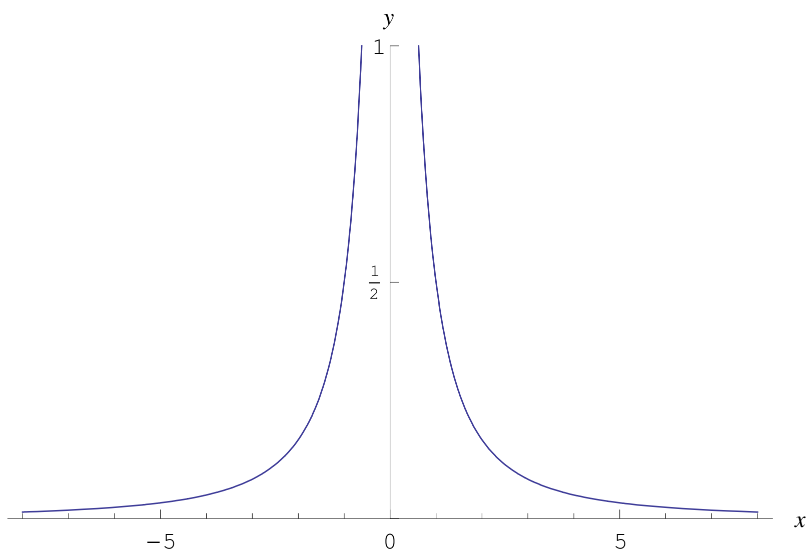

Figure 2: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 9

Studiare la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{\ln(\arctan x + 1)} \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

Questa funzione è definita in X tale che:

$$\begin{cases} \arctan x + 1 > 0 \\ \arctan x + 1 \neq 1 \end{cases} \Longrightarrow X = (-\tan 1, 0) \cup (0, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \arctan x + 1 > 1 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty)$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$ per $x \in (0, +\infty)$, e nel semipiano $y > 0$ per $x \in (-\tan 1, 0)$.

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} f(x) = -\frac{1}{\ln 0^+} = -\frac{1}{-\infty} = 0^+,$$

cosicchè $x = -\tan 1$ è una discontinuità eliminabile.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.
La funzione converge per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$$

quindi la retta $y = \frac{1}{\ln\left(\frac{2}{2+\pi}\right)}$ è asintoto orizzontale a destra.

Calcolo delle derivate

Calcoliamo solo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + \arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \tag{3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Studio del segno:

$$\forall x \in X, \quad f'(x) > 0$$

per cui la funzione è strettamente crescente in X.
Determiniamo la derivata destra in $x = -\tan 1$:

$$\begin{aligned} f'_+(-\tan 1) &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \\ &= \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+x^2)} \cdot \lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} \end{aligned}$$

Il primo limite non produce indeterminazione, quindi calcoliamo il secondo ponendo $t = 1 + \arctan x$, e ciò implica $t \to 0^+$ se $x \to (-\tan 1)^+$

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t \ln^2 t}$$

Siccome $\lim_{t \to 0} t \ln^2 t = 0^+$, si ha:

$$\lim_{x \to (-\tan 1)^+} \frac{1}{(1+\arctan x)\left[\ln(\arctan x + 1)\right]^2} = +\infty,$$

donde:

$$f'_+(-\tan 1) = +\infty$$

Quindi γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto.
Concavità e punti di flesso.
Non abbiamo determinato la derivata seconda, per cui deduciamo i punti di flesso dal comportamento di $f(x)$. Siccome γ "parte" da $x = -\tan 1$ con tangente verticale orientata verso l'alto, segue che esiste un flesso in $x_f \in (-\tan 1, 0)$, risultando γ concavo verso il basso in $(-\tan 1, x_f)$ e concava verso l'alto in $(x_f, 0)$. In $(0, +\infty)$ γ volge nuovamente la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

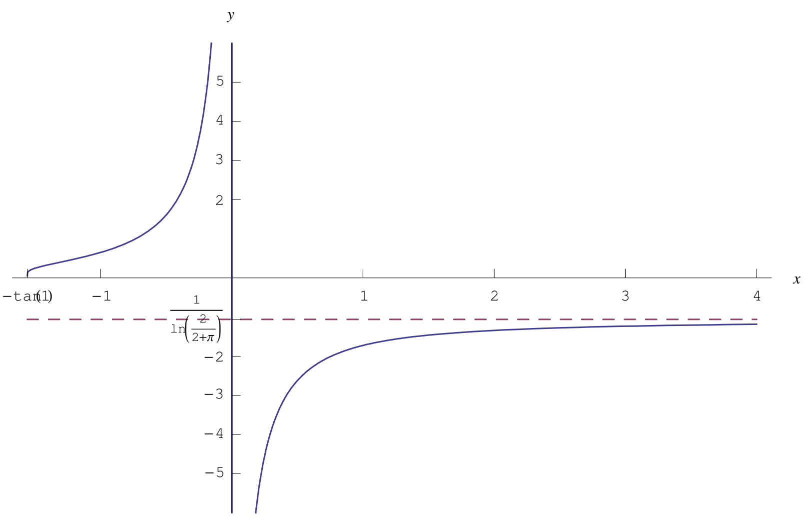

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.