Esercizio 1

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{8x-x^2-14} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, \ f(x) > 0) \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = \frac{1}{e^{14}} \Longrightarrow A\left(0, \frac{1}{e^{14}}\right) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno
Dalla (2) segue che il diagramma giace nel sempiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $|x| \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0^+, \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0^- \tag{3}$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x-4) f(x) \\ f''(x) &= 2f(x)\left(2x^2 - 16x + 31\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 4,$$

quindi $x_0 = 4$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 4)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 4)$, e strettamente decrescente in $(4, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f.
Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 16x + 31 = 0 \Longleftrightarrow x = x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 16x + 31 > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, ed è concavo verso il basso in (x_1, x_2). Da ciò segue che $x_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua:

$$F_1\left(\frac{8-\sqrt{2}}{2}, e\sqrt{e}\right), \; F_2\left(\frac{8+\sqrt{2}}{2}, e\sqrt{e}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

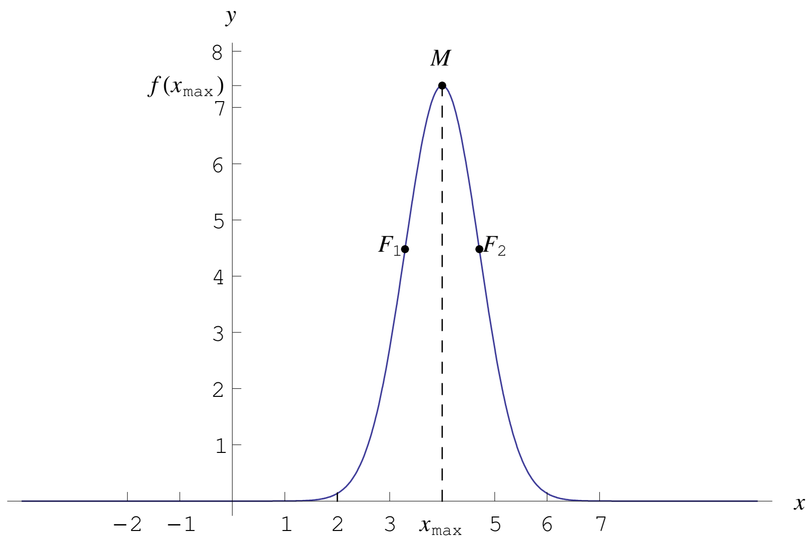

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 2

Studiare la funzione

$$f(x) = 2|x| - x^2 \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
A causa della presenza del valore assoluto, conviene distinguere i due casi: $x \geq 0$, $x < 0$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0 \\ f_2(x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

essendo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2x - x^2, \quad \text{in } (-\infty, 0) \\ f_2(x) &= 2x - x^2, \quad \text{in } (0, +\infty) \end{aligned} \tag{3}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm 2 \Longrightarrow A(-2, 0), B(2, 0) \in \gamma \cap x, O(0, 0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Dalle (3) segue che il grafico di f è composto da due parabole raccordate in $(0, 0)$. Precisamente:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

essendo:

$$\begin{aligned} \gamma_1) \ y &= -2x - x^2 \quad \text{per } x \in (-\infty, 0) \\ \gamma_2) \ y &= 2x - x^2 \quad \text{per } x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

Il punto $(0, 0)$ è un punto angoloso. La derivata prima è:

$$f(x) = \begin{cases} f_1'(x) = -2(x+1), & x < 0 \\ f_2'(x) = 2(1-x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f_-'(0) &= f_1'(0) = -2 \\ f_+'(0) &= f_2'(0) = 2 \end{aligned}$$

Possiamo perciò scrivere le equazioni delle semirette tangenti τ_- e τ_+ rispettivamente a sinistra e a destra nel punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned} &\tau_-)\ y = f(0) + f'_-(0)\,x \Longleftrightarrow y = -2x \\ &\tau_+)\ y = f(0) + f'_+(0)\,x \Longleftrightarrow y = 2x \end{aligned}$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

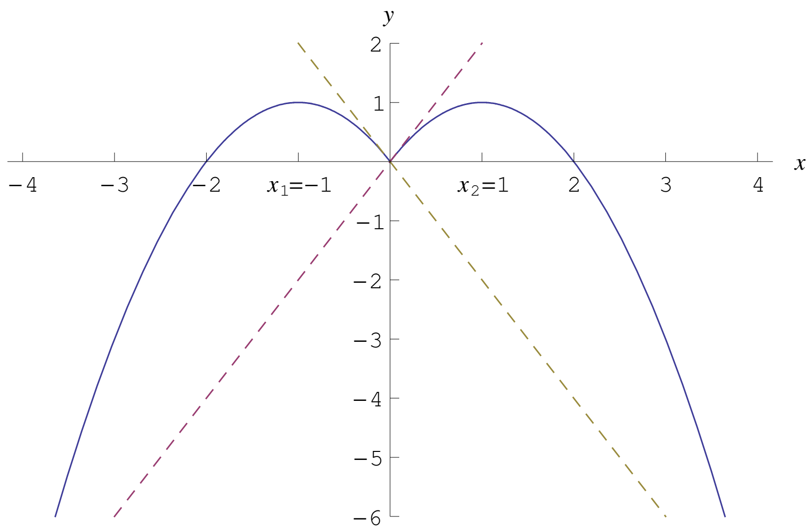

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 3

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \Longrightarrow A(2, 0) \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

Segue che per $x > 2$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 2)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \tag{3}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \longrightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} = 0 \cdot \infty \tag{4}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata poniamo:

$$\ln \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2e^t,$$

cosicchè $x \longrightarrow 0^+$ implica $t \longrightarrow -\infty$, e il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \lim_{t \to -\infty} te^{2t} = 2 \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0,$$

giacché e^t è - per $t \longrightarrow -\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande.
Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{2}\left(1+2\ln\frac{x}{2}\right) \\ f''(x) &= \frac{3}{2}+\ln\frac{x}{2} \end{aligned} \tag{5}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x)=0 \Longleftrightarrow 1+2\ln\frac{x}{2} \Longleftrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{e}},$$

quindi $x_0=\frac{2}{\sqrt{e}}$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x)>0 \Longleftrightarrow x\in\left(\frac{2}{\sqrt{e}},+\infty\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(\frac{2}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, e strettamente decrescente in $\left(0,\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Ciò implica che $x_0 \overset{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di minimo assoluto per f:

$$m\left(\frac{2}{\sqrt{e}},\frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0 \Longleftrightarrow \ln\frac{x}{2}=-\frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{x}{2}=e^{-3/2} \Longleftrightarrow x=\frac{2}{e^{3/2}}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x)>0 \Longleftrightarrow x\in\left(\frac{2}{e^{3/2}},+\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{2}{e^{3/2}},+\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(0,\frac{2}{e^{3/2}}\right)$.
Da ciò segue che $\frac{2}{e^{3/2}}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(\frac{2}{e^{3/2}},-\frac{3}{e^{3}}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

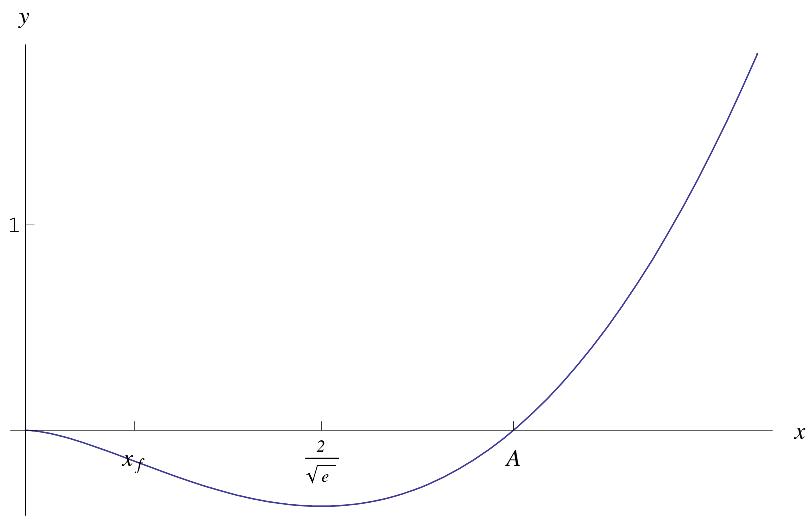

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 4

Studiare la funzione

$$f(x) = (x+1)\ln^2(x+1) \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che $x+1>$, cioè $X = (-1, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln(x+1) = 0 \iff x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff x+1 > 0, \ \ln(x+1) \neq 0 \iff x \in X - \{0\}$$

Segue che per $x \in X - \{0\}$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \tag{2}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \ln^2(x+1) = 1 \cdot (+\infty) = +\infty \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \longrightarrow -1^+$:

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} (x+1)\ln^2(x+1) = 0 \cdot \infty \tag{3}$$

Per rimuovere l'indeterminazione poniamo:

$$t = \ln(x+1) \tag{4}$$

Ciò implica:

$$x + 1 = e^t \Longrightarrow x = e^t - 1 \tag{5}$$

Dalla (5) segue che quando $x \to -1^+$, $e^t \to 0$, cioè $t \to -\infty$, perciò:

$$\lim_{x \to -1^+} (x+1)\ln^2(x+1) = \lim_{t \to -\infty} t^2 e^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0^+, \tag{6}$$

in quanto e^t per $t \to -\infty$, è un infinito di ordine infinitamente grande. Quindi $x = 1$ è una discontinuità eliminabile.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \ln^2(x+1) + 2\ln(x+1) \tag{7}$$

$$f''(x) = \frac{2[1+\ln(x+1)]}{1+x}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Per calcolare gli zeri della $f'(x)$ poniamo $t = \ln(x+1)$, per cui

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow t(t+2) = 0 \Longleftrightarrow t = -2, 0 \tag{8}$$

Cioè:

$$\begin{cases} \ln(x+1) = 0 \\ \ln(x+1) = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x+1 = e^{-2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = \frac{1-e^2}{e^2} < 0 \end{cases}$$

quindi $x_{1,2}$ sono punti estremali.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow t < -2, t > 0$$

Cioè, dobbiamo risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \ln(x+1) = 0 \\ \ln(x+1) = -2 \end{cases} \Longrightarrow x \in \left(-1, \frac{1-e^2}{e^2}\right) \cup (0, +\infty)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(-1, \frac{1-e^2}{e^2}\right) \cup (0, +\infty)$, e strettamente decrescente in $\left(\frac{1-e^2}{e^2}, 0\right)$. Ciò implica che $x_1 \overset{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo, mentre $x_2 \overset{def}{=} x_{\min}$ è punto di minimo relativo:

$$M\left(\frac{1-e^2}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right), m(0,0)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln(x+1) = -1 \Longleftrightarrow x+1 = \frac{1}{e} \Longleftrightarrow x = \frac{1-e}{e}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{1+\ln(x+1)}{1+x} > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{1-e}{e}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{1-e}{e}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(-1, \frac{1-e}{e}\right)$. Da ciò segue che $\frac{1-e}{e}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(\frac{1-e}{e}, \frac{1}{e}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

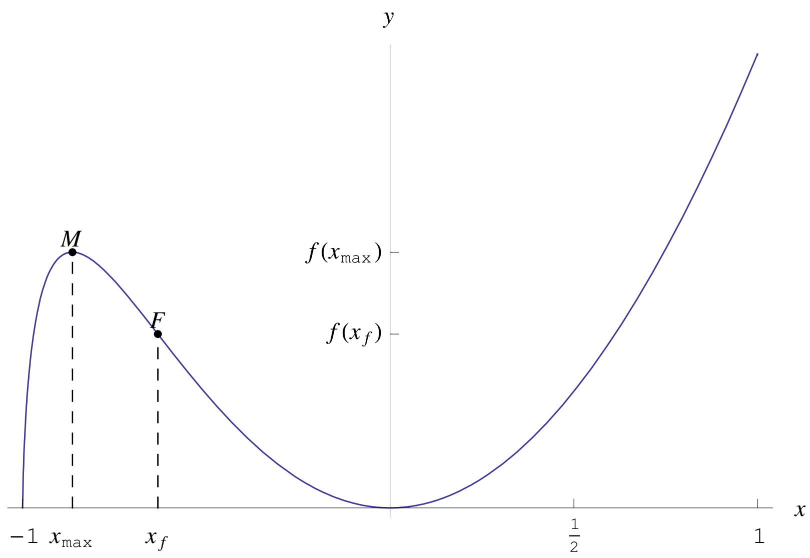

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 5

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(1 + e^{-x}\right) \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che $1 + e^{-x} > 0$, che è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi $X = \mathbb{R}$.
Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned}
&f(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + e^{-x} = 1 \Longleftrightarrow e^{-x} = 0 \ \text{ mai! } \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap x \\
&f(0) = \ln 2 \Longrightarrow A(0, \ln 2) \in \gamma \cap y
\end{aligned}$$

Studio del segno

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0,$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+, \tag{2}$$

cosicchè l'asse x è asintoto orizzontale.
La funzione è infinita per $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} -\lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\
&= -\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = -1 = m \\
n &= \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(1 + e^{-x}\right) + x\right] = \infty - \infty
\end{aligned}$$

Per rimuovere la forma indeterminata poniamo $1 + e^{-x} = t$, quindi per $x \to -\infty \Longrightarrow t \to +\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\ln\left(1 + e^{-x}\right) + x\right] = \lim_{t \to +\infty} [\ln t - \ln(t - 1)] = \lim_{t \to +\infty} \ln \frac{t}{t - 1} = \ln 1 = 0$$

Pertanto il grafico ammette un asintoto obliquo a sinistra; la sua equazione è:

$$y = -x \tag{3}$$

Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{1+e^x} \\ f''(x) &= \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{aligned} \tag{4}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di $f'(x)$:

$$\nexists x \in X \mid f'(x) = 0 \tag{5}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\forall x \in X, \; f'(x) < 0$$

Quindi f è strettamente decrescente in X
Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\forall x \in X, \; f''(x) > 0$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

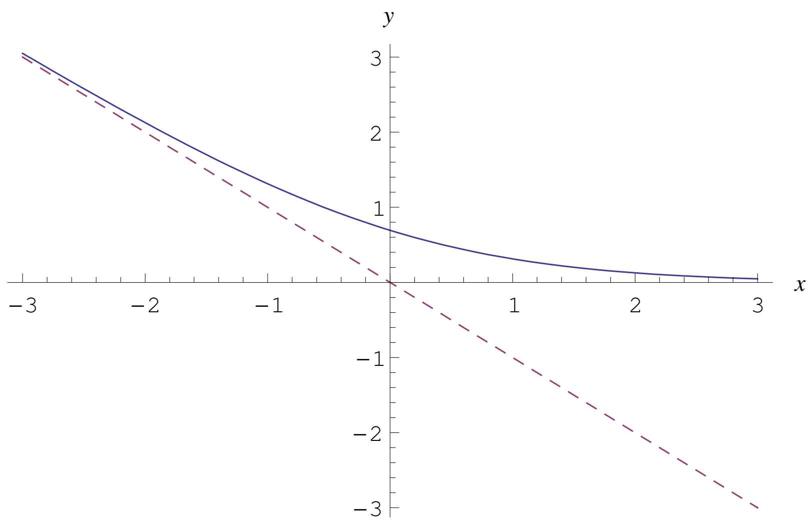

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 6

Studiare la funzione

$$f(x) = x \arctan x \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita per ogni valore reale di x, per cui $X = (-\infty, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) = (-x)\arctan(-x) = x \arctan x$, quindi il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow (0,0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \arctan x > 0 \Longleftrightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty),$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \neq 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione diverge positivamente per $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned}
m_1 &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \\
n_1 &= \lim_{x \to +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \to +\infty} x \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \cdot \infty \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1 + x^2} = -1,
\end{aligned}$$

donde la retta $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ è asintoto obliquio a destra. Siccome il grafico è simmetrico rispetto all'asse x, necessariamente segue che la retta $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ è asintoto obliquio a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1 + x^2)\arctan x + x}{(1 + x^2)} \\
f''(x) &= \frac{2}{(x^2 + 1)^2}
\end{aligned} \tag{2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

Lo studio del segno è troppo complicato, per cui cercheremo di dedurre gli estremi relativi e monotonia dalla concavità/convessità. Osserviamo intanto che $x_0 = 0$ è punto estremale. Ci aspettiamo comunque una crescenza in senso stretto in $(0, +\infty)$, e una decrescenza in $(-\infty, 0)$, donde x_0 è punto di minimo relativo.
Concavità e punti di flesso.

$$\forall x \in X, \ f''(x) > 0$$

Quindi il grafico è concavo verso l'alto.
Osserviamo che:

$$f''(0) > 0,$$

per cui resta confermata la natura del punto estremale $x_0 = 0$.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

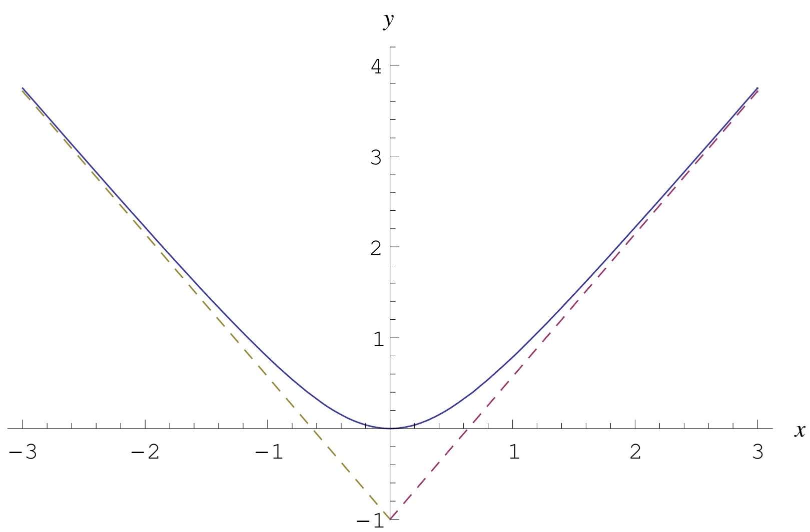

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 7

Studiare la funzione

$$f(x) = \sin x + \cos x \tag{1}$$

***

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. La funzione è periodica di periodo 2π, per cui consideriamo l'intervallo $[0, 2\pi]$.

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \sin x = -\cos x \tag{2}$$

Risolviamo questa equazione trigonometrica per via grafica, come riportato in figura (1).

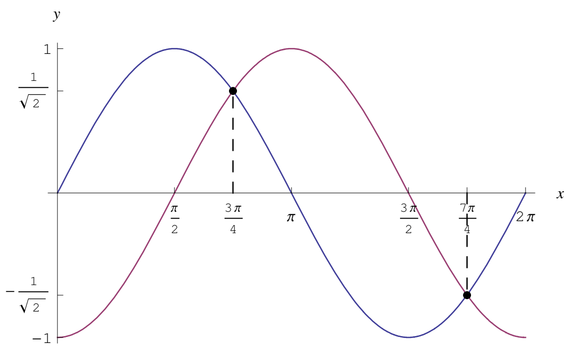

Figure 1: Grafico di $\sin x$ e $-\cos x$. Le ascisse dei punti di intersezione sono le soluzioni (in $[0, 2\pi]$) dell'equazione $\sin x = -\cos x$.

Quindi:

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi) \Longrightarrow A\left(\frac{3}{4}\pi, 0\right), B\left(\frac{7}{4}\pi, 0\right) \in \gamma \cap x, \tag{3}$$

essendo γ il grafico della funzione.

Inoltre:

$$f(0) = 1 \Longrightarrow C(0, 1) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \sin x > -\cos x \tag{4}$$

Risolviamo questa disequazione trigonometrica per via grafica, come riportato in figura (2).

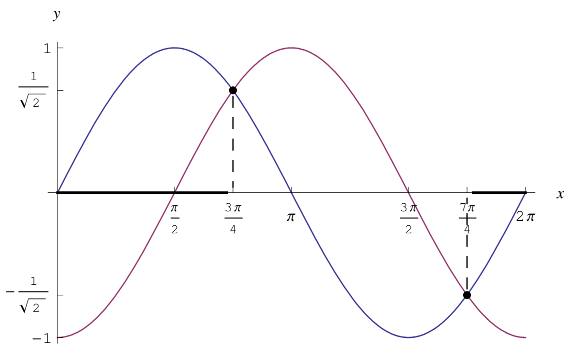

Figure 2: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\sin x > -\cos x$.

ottenendo:

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right] \tag{5}$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$.

Comportamento agli estremi

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$; inoltre essendo periodica, non è regolare per $x \to \pm\infty$.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \cos x - \sin x \tag{6}$$
$$f''(x) = -f(x)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Determiniamo gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x = \sin x,$$

procedendo nuovamente per via grafica, come riportato in figura (3).

Otteniamo:

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi,$$

che sono punti estremali.

Per studiare il segno della f' dobbiamo risolvere la disequazione trigonometrica:

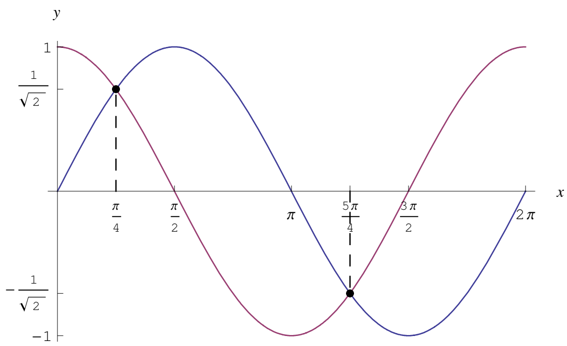

Figure 3: Ricerca delle soluzioni dell'equazione $\cos x = \sin x$

$$\cos x > \sin x$$

Ricorriamo nuovamente al procedimento grafico, come riportato in figura (4).

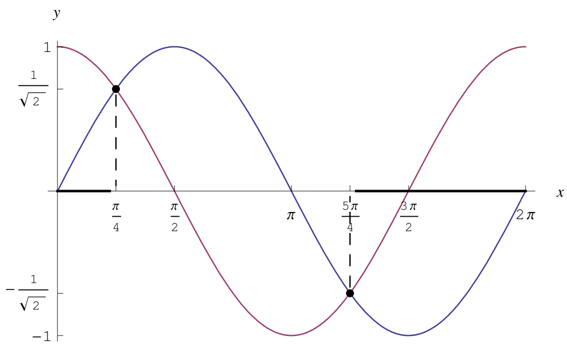

Figure 4: Ricerca delle soluzioni della disequazione $\cos x > \sin x$

Otteniamo:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, 2\pi\right],$$

donde la f è strettamente crescente in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}\pi, 2\pi\right]$ ed è strettamente decrescente in $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi\right)$. Da ciò segue:

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ è punto di massimo relativo}$$
$$x = \frac{5}{4}\pi \text{ è punto di minimo relativo}$$

Tali punti sono anche di estremo assoluto:

$$M\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right), \, m\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$$

Studio della derivata seconda
Dalla seconda delle (6) vediamo che gli zeri della funzioni sono anche zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

Inoltre:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow f(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $\left(\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right)$, ed è convesso verso il basso in $\left[0, \frac{3}{4}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$.
Da ciò segue che i punti di intersezioni con l'asse x dati dalla (3) sono punti di flesso.
Il grafico completo è riportato in figura (5).

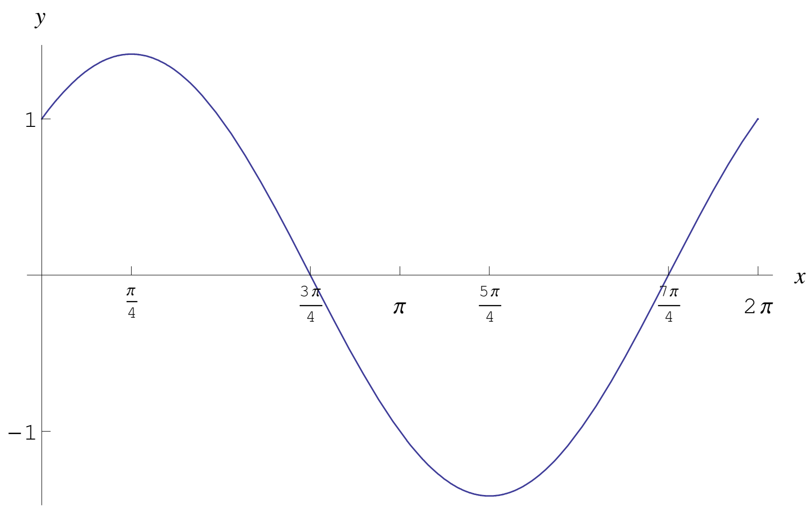

Figure 5: Grafico della funzione assegnata.

Esercizio 8

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \tag{1}$$

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x = 0 \tag{2}$$

Per risolvere tale equazione poniamo:

$$t = \ln x \tag{3}$$

Quindi:

$$\frac{t^2}{2} - t = 0 \Longleftrightarrow t\left(\frac{t}{2} - 1\right) = 0 \Longleftrightarrow t = 0, t = 2 \tag{4}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\begin{aligned} t = 0 &\Longrightarrow \ln x = 0 \Longrightarrow x = 1 \\ t = 2 &\Longrightarrow \ln x = 2 \Longrightarrow x = e^2 \end{aligned}$$

Perciò:

$$A(1,0), \ B\left(e^2, 0\right) \in \gamma \cap x \tag{5}$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x > 0 \tag{6}$$

Eseguendo nuovamente il cambio (3):

$$\frac{t^2}{2} - t > 0 \Longleftrightarrow t < 0, t > 2$$

che corrispondono a

$$\begin{aligned} \ln x < 0 &\Longleftrightarrow x \in (0,1) \\ \ln x > 2 &\Longleftrightarrow x \in (2, +\infty), \end{aligned} \tag{7}$$

ciò implica:

$$f(x) > 0 \iff x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in (0,1) \cup (2,+\infty)$, e nel semipiano $y < 0$ per $x \in (1,2)$.

Comportamento agli estremi

Abbiamo:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\ln^2 x}{2} - \ln x \right) = \infty - \infty \tag{8}$$

Poniamo: $t = \ln x$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = \lim_{t \to -\infty} t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} \right) = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^2}{2} - t \right) = +\infty,$$

Esaminiamo la presenza di eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{2x} - \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}, \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^2 x}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

perciò:

$$m = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{x} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x^2} \end{aligned} \tag{9}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Calcoliamo gli zeri di $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$$

pertanto $x = e$ è un punto estremale.

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{\ln x - 1}{x} > 0 \Longleftrightarrow x \in (e, +\infty),$$

per cui la funzione è strettamente crescente in $(e, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, e)$. Quindi $x = e$ è punto di minimo relativo per f. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(e, -\frac{1}{2}\right)$$

Studio della derivata seconda
Determiniamo gli zeri di $f''(x)$:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = 2 \Longleftrightarrow x = e^2$$

Il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln x < 2 \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^2\right),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$ e concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$. Perciò $x = e^2$ è punto di flesso. Notiamo che tale punto è uno zero di $f(x)$, quindi il flesso è il punto B (eq. 5).
Il grafico completo è riportato in figura (1).

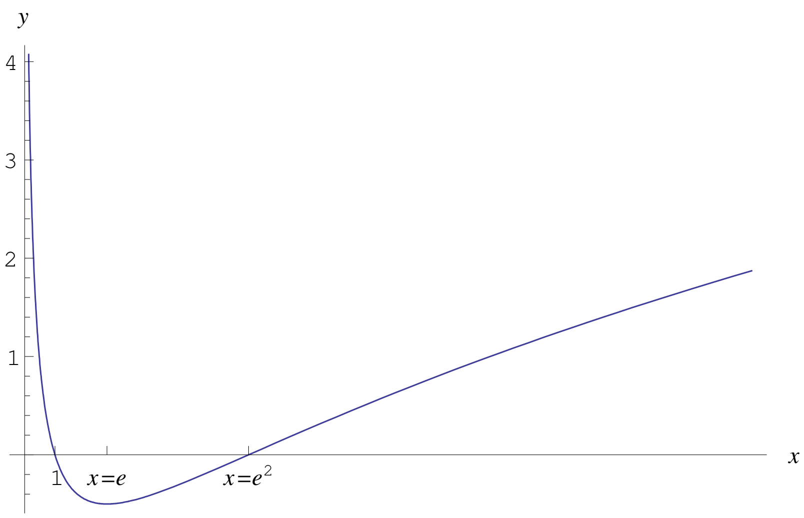

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.