Studio di funzione

1. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = x - \operatorname{Arctg} x\,.$$

Si chiede:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) dire se f ammette asintoti obliqui e, in caso affermativo, determinarli;

(d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\operatorname{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

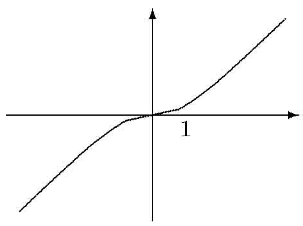
(c) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\operatorname{Arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} -\operatorname{Arctg} x = -\frac{\pi}{2}$; quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e la retta di equazione $y = x - \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto.
Analogamente si vede che f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e che la retta di equazione $y = x + \frac{\pi}{2}$ è l'asintoto.

(d) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$; si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x \neq 0$ e quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, 0]$ e su $[0, +\infty[$; quindi f è strettamente crescente su tutto $\mathbf{R}$; quindi di ha

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{\mathbf{R}\}, \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset\,.$$

(e) Sia $x \in \mathbf{R}$; si ha $f''(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$; si ha quindi $f''(x) > 0$ per $x > 0$, $f''(x) < 0$ per $x < 0$; quindi f è strettamente convessa su $[0, +\infty[$, strettamente concava su $]-\infty, 0]$; quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{[0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0]\} \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset\,.$$



2. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione (reale di variabile reale)

$$f(x) = \log \frac{x-1}{x+1}\,.$$

Si chiede:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $\begin{cases} x+1 \neq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} > 0 \end{cases}$, cioè tali che $\begin{cases} x \neq -1 \\ x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$, cioè tali che $x < -1$ o $x > 1$. Si ha quindi

$$\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\ .$$

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha

$$f'(x) = \frac{x+1}{x-1}\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{x^2-1} > 0\ .$$

Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, -1[$ e su $]1, +\infty[$. Si ha quindi

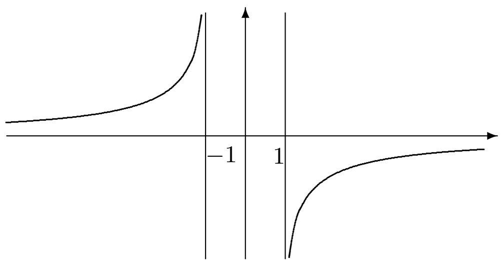
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, -1[\,,]1, +\infty[\}\,, \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset \qquad \mathcal{M}(\searrow) = \emptyset\ .$$

(d) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$; si ha

$$f''(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}\ .$$

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x = 0$, quindi mai; si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $x < 0$, quindi se e solo se $x < -1$; si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > 0$, quindi se e solo se $x > 1$. Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty, -1[$, strettamente concava su $]1, +\infty[$. Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -1[\}\,, \qquad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \qquad \mathcal{C}(\downarrow) = \{]1, +\infty[\}\ .$$



3. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = e^{\frac{1}{|x-1|-1}}\ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) Determinare il dominio di f;

(b) Calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) Studiare la derivabilità di f in 1;

(e) Determinato il prolungamento continuo di $f|]0,2[$ a $[0,2]$, se ne studi la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0 e 2;

(f) Determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Il dominio di f è dato dagli $x \in \mathbf{R}$ tali che $|x-1|-1 \neq 0$, cioè tali che $|x-1| \neq 1$, cioè tali che $x-1 \neq 1$ e $x-1 \neq -1$, cioè tali che $x \neq 2$ e $x \neq 0$. Si ha quindi
$$\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 0[\cup]0,2[\cup]2,+\infty[\ .$$

(b) Si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. $\lim_{x\to 2-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = +\infty$.

(c) Sia $x \in \mathrm{dom}(f)$.
Si ha
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x-2}} & \text{per } x \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{per } x < 1 \end{cases} \ .$$
Per $x > 1$ si ha
$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}}\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) < 0\ .$$
Quindi f è strettamente decrescente su $[1,2[$ e su $]2,+\infty[$.
Per $x < 1$ si ha
$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}) > 0\ .$$
Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty,0[$ e su $]0,1]$.
Si ha quindi
$$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty,0[\,,]0,1]\}\,, \qquad \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset\ ,$$
$$\mathcal{M}(\searrow) = \{[1,2[\,,]2,+\infty[\}\ .$$

(d) Si ha $\lim_{x\to 1+, x>1} f'(x) = -e^{-1}$; quindi f è derivabile da destra in 1 e si ha $f'_+(1) = -e^{-1}$.
Si ha $\lim_{x\to 1-, x<1} f'(x) = e^{-1}$; quindi f è derivabile da sinistra in 1 e si ha $f'_-(1) = e^{-1}$.
Poichè $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, f non è derivabile in 1.

(e) Il prolungamento continuo di $f|]0,2[$ a $[0,2]$ è la funzione

$$g:[0,2]\longrightarrow \mathbf{R}, x\longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x\in]0,2[\\ 0 & \text{per } x\in\{0,2\} \end{cases} .$$

Si ha
$\lim_{x\to 0, x\in]0,2[} g'(x)=\lim_{x\to 0,x>0} f'(x) =$
$\lim_{x\to 0,x>0} e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}=\lim_{y\to-\infty} e^y y^2 = 0.$
Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0)=0$.
Si ha
$\lim_{x\to 2, x\in]0,2[} g'(x)=\lim_{x\to 2,x<2} f'(x) =$
$\lim_{x\to 2 x<2} e^{\frac{1}{x-2}}(-\frac{1}{(x-2)^2})=\lim_{y\to-\infty}(-e^y y^2)=0.$
Quindi g è derivabile in 2 e si ha $g'(2)=0$.

(f) Sia $x\in \mathrm{dom}(f)$.
Per $x>1$ si ha

$$f''(x)=e^{\frac{1}{x-2}}(-\frac{1}{(x-2)^2})^2+e^{\frac{1}{x-2}}\frac{2(x-2)}{(x-2)^4}=$$

$$e^{\frac{1}{x-2}}\frac{1+2x-4}{(x-2)^4}=e^{\frac{1}{x-2}}\frac{2x-3}{(x-2)^4} .$$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $x=\frac{3}{2}$; si ha $f''(x)>0$ se e solo se $x>\frac{3}{2}$; si ha $f''(x)<0$ se e solo se $x<\frac{3}{2}$. Quindi f è strettamente convessa su $[\frac{3}{2},2[$ e su $]2,+\infty[$, strettamente concava su $[1,\frac{3}{2}]$.
Per $x<1$ si ha

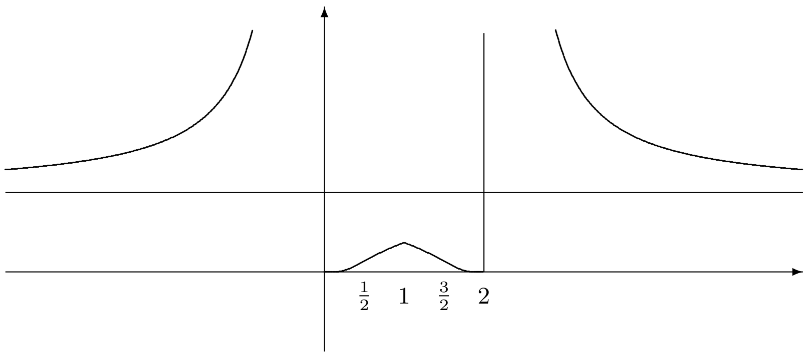
$$f''(x)=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1}{x^4}+e^{-\frac{1}{x}}\frac{2x}{x^4}=e^{-\frac{1}{x}}\frac{1-2x}{x^4} .$$

Si ha $f''(x)=0$ se e solo se $x=\frac{1}{2}$; si ha $f''(x)>0$ se e solo se $x<\frac{1}{2}$; si ha $f''(x)<0$ se e solo se $x>\frac{1}{2}$. Quindi f è strettamente convessa su $]-\infty,0[$ e su $]0,\frac{1}{2}]$, strettamente concava su $[\frac{1}{2},1]$.
Poichè f è strettamente concava su $[\frac{1}{2},1]$ e su $[1,\frac{3}{2}]$ e poichè $f'_-(1)\le f'_+(1)$, f è strettamente concava su $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$.
Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow)=\{]-\infty,0[\,,]0,\frac{1}{2}]\,,[\frac{3}{2},2[\,,]2,+\infty[\} ,$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow)=\emptyset \qquad \mathcal{C}(\downarrow)=\{[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]\} .$$

Per tracciare il grafico di f teniamo conto che $f(1)=e^{-1}\approx .37$, $\frac{1}{2}=.5$, $\frac{3}{2}=1.5$, $f(\frac{1}{2})=f(\frac{3}{2})=e^{-2}\approx .14$. Si ha



4. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \sqrt{x-1}e^{-x} \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti o i valori di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) studiare la derivabilità di f rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 1;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\text{dom}(f) = [1, +\infty[$.

(b) Si ha $f(1) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x-1}e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}e^{-x} = 0$.

(c) Sia $x \in]1, +\infty[$; si ha
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}e^{-x} + \sqrt{x-1}e^{-x}(-1) = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-1}\right) = e^{-x}\frac{1-2(x-1)}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x}\frac{1-2x+2}{2\sqrt{x-1}} = e^{-x}\frac{3-2x}{2\sqrt{x-1}}$.
Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $3 - 2x = 0$, cioè se e solo se $2x = 3$, cioè se e solo se $x = \frac{3}{2}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $3 - 2x > 0$, cioè se e solo se $2x < 3$, cioè se e solo se $x < \frac{3}{2}$. Si ha $f(x) < 0$ se e solo se $x > \frac{3}{2}$.
Quindi f è strettamente crescente su $[1, \frac{3}{2}]$, strettamente decrescente su $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{ [1, \frac{3}{2}] \right\},\ \mathcal{M}(\leftrightarrow) = \emptyset,\ \mathcal{M}(\searrow) = \left\{ [\frac{3}{2}, +\infty[\right\} .$$

(d) Si ha
$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x-1}e^{-x}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x-1}} = +\infty.$

Quindi f è derivabile rispetto ad $\overline{\mathbf{R}}$ in 1 e si ha $f'(1) = +\infty$.

(e) Sia $x \in]1, +\infty[$; si ha
$f''(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{e^{-x}}{2} \frac{-\sqrt{x-1} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}}(3-2x)}{x-1} =$
$\frac{e^{-x}}{2} \left(-\frac{3-2x}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4(x-1)-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right) =$
$\frac{e^{-x}}{2} \left(\frac{2x-3}{\sqrt{x-1}} + \frac{-4x+4-3+2x}{2(x-1)\sqrt{x-1}} \right) =$
$\frac{e^{-x}}{2} \frac{2(x-1)(2x-3)-2x+1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} =$
$\frac{e^{-x}}{2} \frac{4x^2-6x-4x+6-2x+1}{2(x-1)\sqrt{x-1}} =$
$\frac{e^{-x}}{2} \frac{4x^2-12x+7}{2(x-1)\sqrt{x-1}}.$

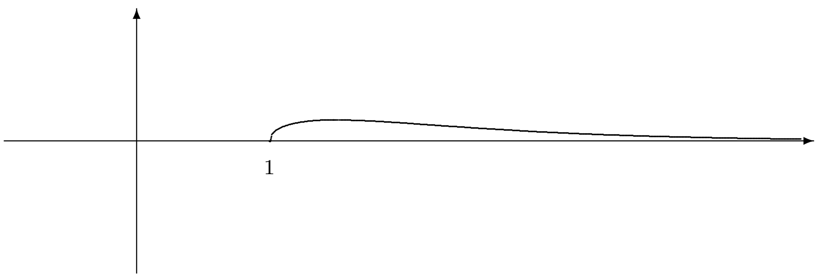
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $4x^2 - 12x + 7 = 0$, cioè se e solo se
$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-28}}{4} == \frac{6 \pm \sqrt{8}}{4} == \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$,
cioè, essendo $x > 1$, se e solo se $x = \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $4x^2 - 12x + 7 > 0$, cioè e e solo se $x < \frac{3-\sqrt{2}}{2}$ o $x > \frac{3+\sqrt{2}}{2}$, cioè se e solo se $x > \frac{3+\sqrt{2}}{2}$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $1 < x < \frac{3+\sqrt{2}}{2}$.

Quindi f è strettamente convessa su $[\frac{3+\sqrt{2}}{2}, +\infty[$, strettamente concava su $[1, \frac{3+\sqrt{2}}{2}]$.

Quindi si ha

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{ [\frac{3+\sqrt{2}}{2}, +\infty[\right\},\ \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset,\ \mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [1, \frac{3+\sqrt{2}}{2}] \right\} .$$

Per disegnare il grafico osserviamo che $\frac{3}{2} = 1.5$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} \approx .15$, $\frac{3+\sqrt{2}}{2} \approx 2.21$, $f(\frac{3+\sqrt{2}}{2} \approx .12$.



5. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = \log|x| - x^2 + 1 \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) dire se f ammette massimo e se f ammette minimo; in caso affermativo determinarli;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}^*$.

(b) Si ha $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

(c) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\frac{1}{x} - 2x = 0$, cioè se e solo se $\frac{1-2x^2}{x} = 0$, cioè se e solo se $1 - 2x^2 = 0$, cioè se e solo se $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si ha $1 - 2x^2 > 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Quindi si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 0$ o $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Quindi f è strettamente crescente su $]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ e su $]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$; f è strettamente decrescente su $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[$ e su $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$. Si ha quindi

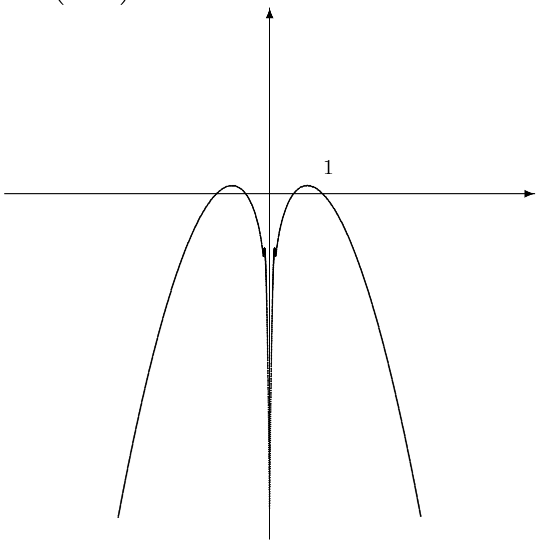
$\mathcal{M}(\nearrow) = \{]-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}],]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$,

$\mathcal{M}(\searrow) = \{[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0[, [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[\}$.

(d) Si ha $f(\mathbf{R}^*) =]-\infty, \frac{1}{2}(1-\log 2)]$. Quindi f ammette massimo e si ha $\max(f) = \frac{1}{2}(1-\log 2)$; f non ammette minimo.

(e) Sia $x \in \mathbf{R}^*$; si ha $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2 < 0$.
Quindi f è strettamente concava su $]-\infty, 0[$ e su $]0, +\infty[$. Si ha quindi $\mathcal{C}(\uparrow) = \emptyset]0, \frac{\sqrt{2}}{2}]\}$, $\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$, $\mathcal{C}(\downarrow) = \{]-\infty, 0[,]0, +\infty[\}$.

Si ha $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx .71$, $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} * 1 - \log 2) \approx .15$.



6. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = x^4 \log^3 x ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) determinare il dominio di f;

(b) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente);

(d) determinato il prolungamento continuo di f a $[0, +\infty[$, studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in 0;

(e) determinare l'insieme degli intervalli non banali massimali sui quali f è strettamente convessa (risp. strettamente concava).

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) =]0, +\infty[$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

(c) Sia $x \in]0, +\infty[$; si ha
$f'(x) = 4x^3\log^3 x + 3x^4\log^2 x\frac{1}{x} = 4x^3\log^3 x + 3x^3\log^2 x =$
$x^3\log^2 x(4\log x + 3)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $4\log x + 3 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = -\frac{3}{4}$, cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{-\frac{3}{4}}$. Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $e^{-\frac{3}{4}} < x < 1$ o $x > 1$. Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{-\frac{3}{4}}$.

Quindi f è strettamente crescente su $[e^{-\frac{3}{4}}, 1]esu[1, +\infty[$ e quindi su $[e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[$; f è strettamente decrescente su $]0, e^{-\frac{3}{4}}]$. Si ha quindi
$\mathcal{M}(\nearrow) = \{[e^{-\frac{3}{4}}, +\infty[\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$,
$\mathcal{M}(\searrow) = \{]0, e^{-\frac{3}{4}}]\}$.

(d) Il prolungamento continuo di f a $[0, +\infty[$ è la funzione
$g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} x^4\log^3 x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$.

Si ha
$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}(4x^3\log^3 x + 3x^3\log^2 x) = 0$.

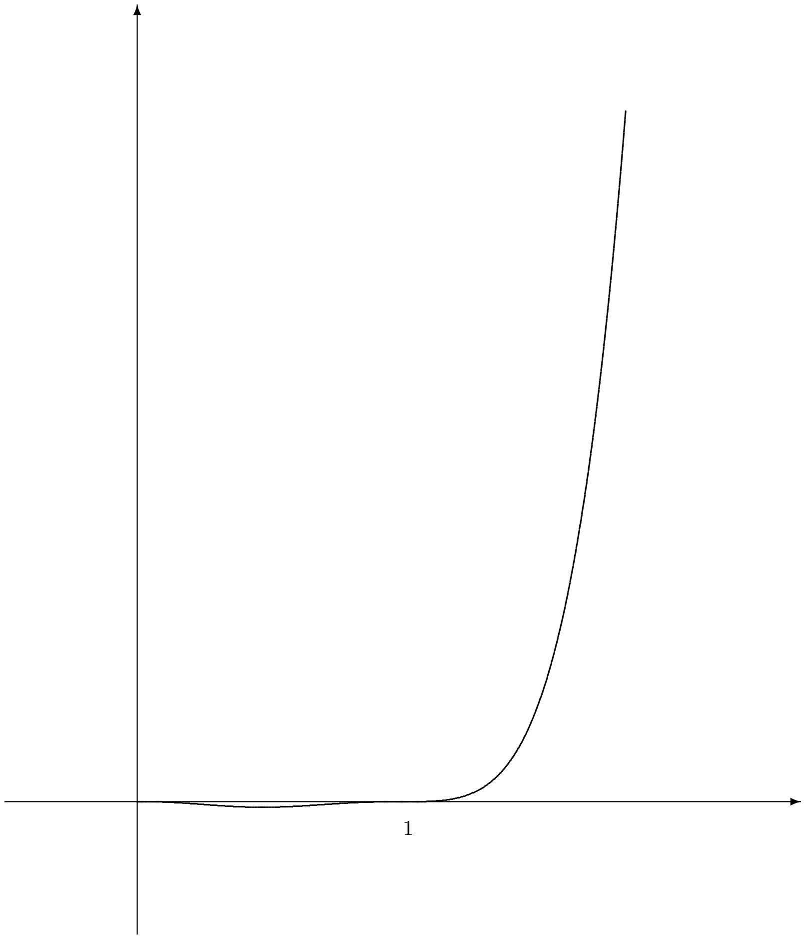
Quindi g è derivabile in 0 e si ha $g'(0) = 0$.

(e) Sia $x \in]0, +\infty[$; si ha
$f''(x) = 12x^2\log^3 x + 12x^3\log^2 x\frac{1}{x} + 9x^2\log^2 x + 6x^3\log x\frac{1}{x} =$
$12x^2\log^3 x + 12x^2\log^2 x + 9x^2\log^2 x + 6x^2\log x =$
$3x^2\log x(4\log^2 x + 7\log x + 2)$.

Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $\log x = 0$ o $4\log^2 x + 7\log x + 2 = 0$, cioè se e solo se $\log x = 0$ o $\log x = \frac{-7\pm\sqrt{17}}{8}$, cioè se e solo se $x = 1$ o $x = e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}$ o $x = e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}$. Si ha $f''(x) > 0$ se e solo se $e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}} < x < e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}$ o $x > 1$. Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $0 < x < e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}$ o $e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}} < x < 1$.

Quindi f è strettamente convessa su $[e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}]$ e su $[1, +\infty[$; f è strettamente concava su $]0, e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}]$ e su $[e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}, 1]$. Si ha quindi
$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{\left[e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}, e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}\right], [1, +\infty[\right\}$,
$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset$,
$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{\left]0, e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}\right], \left[e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}, 1\right]\right\}$.

Si ha $f(0) = 1$, $e^{-\frac{3}{4}} \approx .47$, $f\left(e^{-\frac{3}{4}}\right) = e^{-3}\left(-\frac{3}{4}\right)^3 = -\frac{27}{64}e^{-3} \approx -.02$, $e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}} \approx .25$, $f\left(e^{\frac{-7-\sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$, $e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}} \approx .70$, $f\left(e^{\frac{-7+\sqrt{17}}{8}}\right) \approx -.01$.



7. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (2x^2 - 1)e^{|2x+1|} ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. 0.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) (p. 4*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(d) (p. 1*) studiare la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ di f in $-\frac{1}{2}$;

(e) (p. 3*) studiare la convessità di f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

(c) Si ha

$$f(x) = \begin{cases} (2x^2-1)e^{2x+1} & \text{per } x \geq -\frac{1}{2} \\ (2x^2-1)e^{-2x-1} & \text{per } x \leq -\frac{1}{2} \end{cases} .$$

Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha
$f'(x) = 4xe^{2x+1} + (2x^2-1)e^{2x+1} \cdot 2 = 2e^{2x+1}(2x^2+2x-1)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 > 0$, cioè se e solo se $x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ o $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Si ha quindi f strettamente crescente su $[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[$ e F strettamente decrescente su $[-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$.
Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha
$f'(x) = 4xe^{-2x-1} + (2x^2-1)e^{-2x-1} \cdot (-2) = -2e^{-2x-1}(2x^2-2x-1)$.

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $2x^2-2x-1 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.

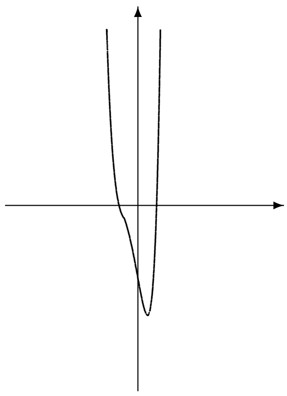
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $2x^2+2x-1 < 0$, cioè se e solo se $\frac{1-\sqrt{3}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.
Si ha $f'(x) < 0$ per ogni $x < -\frac{1}{2}$.
Quindi f è strettamente decrescente su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$.

Essendo f strettamente decrescente su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ e su $[-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$, f è strettamente decrescente su $]-\infty, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]$.
Si ha quindi
$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty[\right\}$, $\mathcal{M}(\rightarrow) = \emptyset$, $\mathcal{M}(\searrow) = \left\{] = \infty, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}]\right\}$.

(d) Si ha
$\lim_{x\to-\frac{1}{2}+, x>-\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+, x>-\frac{1}{2}} 2e^{2x+1}(x^2+2x-1) = -3$.
Quindi f è derivabile da destra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_+(-\frac{1}{2}) = -3$.
Si ha
$\lim_{x\to-\frac{1}{2}-, x<-\frac{1}{2}} f'(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}+, x>-\frac{1}{2}} -2e^{-2x-1}(x^2-2x-1) = -1$.
Quindi f è derivabile da sinistra in $-\frac{1}{2}$ e $f'_-(-\frac{1}{2}) = -1$.
Essendo $f'_+(-\frac{1}{2}) \neq f'_-(-\frac{1}{2})$, f non è derivabile in $-\frac{1}{2}$.

(e) Supponiamo $x > -\frac{1}{2}$. Si ha
$f''(x) = 2((4x+2)e^{2x+1} + (2x^2+2x-1)e^{2x+1} \cdot 2) =$
$4e^{2x+1}(2x+1+2x^2+2x-1) = 4e^{2x+1}(2x^2+4x) = 8e^{2x+1}(x^2+2x)$.
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2+2x = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ o $x = -2$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$ se e solo se $x = 0$.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2+2x > 0$, cioè se e solo se $x < -2$ o $x > 0$, cioè, essendo $x > -\frac{1}{2}$, se e solo se $x > 0$.
Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $-\frac{1}{2} < x < 0$.
Si ha quindi f strettamente convessa su $[0, +\infty[$ e F strettamente concava su $[-\frac{1}{2}, 0]$.
Supponiamo $x < -\frac{1}{2}$. Si ha
$f''(x) = -2((4x-2)e^{-2x-1} + (2x^2-2x-1)e^{-2x-1} \cdot (-2)) =$
$4e^{-2x-1}(-2x+1+2x^2-2x-1) = 4e^{-2x-1}(2x^2-4x) = 8e^{-2x-1}(x^2-2x)$.
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $x^2-2x = 0$, cioè se e solo se $x = 0$ o $x = 2$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$ mai.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2-2x > 0$, cioè se e solo se $x < 0$ o $x > -2$, cioè, essendo $x < -\frac{1}{2}$, sempre.
Si ha $f''(x) < 0$ mai.
Quindi f strettamente convessa su $]-\infty, -\frac{1}{2}]$
Si ha quindi
$\mathcal{C}(\uparrow) = \{]-\infty, -\frac{-1}{2}], [0, +\infty[\}, \quad \mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset, \quad \mathcal{C}(\downarrow) = \{[-\frac{1}{2}, 0]\}$.

Si ha $e \approx 2.72$, $\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \approx 0.37$, $f(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}) \approx -4.14$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$.



8. **Esercizio.** Studiare la seguente funzione

$$f(x) = (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} \ ,$$

rispondendo alle seguenti domande:

(a) (p. .1*) determinare il dominio di f;

(b) (p. 1.9*) calcolare i limiti di f nei punti frontiera del dominio;

(c) (p. 3*) dire se f ammette asintoti in $+\infty$ e in $-\infty$ e in caso affermativo determinarli;

(d) (p. 3*) studiare la monotonia di f determinando gli insiemi $\mathcal{M}(\nearrow)$, $\mathcal{M}(\searrow)$, $\mathcal{M}(\rightarrow)$;

(e) (p. 1*) determinare il prolungamento continuo di $f|]-2,+\infty[$ in -2 e studiarne la derivabilità rispetto a $\overline{\mathbf{R}}$ in -2;

(f) (p. 3*) studiare la convessitàdi f determinando gli gli insiemi $\mathcal{C}(\uparrow)$, $\mathcal{C}(\downarrow)$, $\mathcal{C}(\updownarrow)$.

Disegnare approssimativamente il grafico di f. Per disegnare il grafico di f si può tenere conto delle seguenti approssimazioni $f(0) \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $f(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \approx 8.19$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx -0.70$, $f(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}) \approx 0.79$, $-\frac{11}{7} \approx -1.57$, $f(-\frac{11}{7}) \approx 0.25$.

Risoluzione.

(a) Si ha $\mathrm{dom}(f) = \mathbf{R} - \{-2\}$.

(b) Si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-2+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-2-} f(x) = +\infty$,

(c) Si ha $f(x) \sim_{x\to+\infty} -x$; si ha
$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to+\infty}((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x)$.
Per $y \to 0$ si ha
$e^y = 1 + y + \mathrm{o}(y)$.
Quindi per $x \to +\infty$ si ha
$e^{-\frac{1}{2+x}} = 1 - \frac{1}{2+x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})$.
Si ha quindi

$$\lim_{x\to+\infty}\left((1-x)e^{-\frac{1}{2+x}} + x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left((-x+1)\left(1 - \frac{1}{2+x} + \mathrm{o}(\frac{1}{x})\right) + x\right) =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-x + \frac{x}{2+x} + \mathrm{o}(1) + 1 + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{2+x} + \mathrm{o}(1) + 1\right) = 2 \,.$$

Quindi f ammette asintoto per $x \to +\infty$ e l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2 \,.$$

Procedendo nello stesso modo, si vede che f ammette asintoto per $x \to -\infty$ e che l'asintoto è la retta

$$y = -x + 2 \,.$$

(d) Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f'(x) = -e^{-\frac{1}{2+x}} + (1-x)e^{-\frac{1}{2+x}}\frac{1}{(2+x)^2+1} = e^{-\frac{1}{2+x}}\left(\frac{1-x}{(2+x)^2}-1\right) =$$

$$-e^{-\frac{1}{2+x}}\frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} \; .$$

Si ha $f'(x) = 0$ se e solo se $x^2+5x+3 = 0$, cioè se e solo se $x = \frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $x^2+5x+3 < 0$, cioè se e solo se $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.
Si ha $f'(x) < 0$ se e solo se $x < \frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ o $x > \frac{-5+\sqrt{13}}{2}$.
Si ha quindi f è strettamente crescente su $[\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, -2[$ e su $]-2, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}]$;
f è strettamente decrescente su $]-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}]$ e su $[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty[$.
Si ha quindi

$$\mathcal{M}(\nearrow) = \left\{[\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, -2[\;,\;]-2, \frac{-5+\sqrt{13}}{2}]\right\} \; ,$$

$$\mathcal{M}(\to) = \emptyset \; .$$

$$\mathcal{M}(\searrow) = \left\{]-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}]\;,\;[\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, +\infty[\right\} \; .$$

(e) Il prolungamento continuo di $f|]-2,+\infty[$ in 2 è la funzione

$$g : [-2,+\infty[:\longrightarrow \mathbf{R}, x \longrightarrow \begin{cases} f(x) & \text{per } x \in]-2,+\infty \\ 0 & \text{per } x = -2 \end{cases} \; .$$

Si ha

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} g'(x) = \lim_{x\to-2, x\neq-2}\left(-e^{-\frac{1}{2+x}}\frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2}\right) =$$

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2}\left(\left(-e^{-\frac{1}{2+x}}\left(-\frac{1}{2-x}\right)^2\right)(x^2+5x+3)\right) \; .$$

Si ha

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2}\left(-e^{-\frac{1}{2+x}}\left(-\frac{1}{2-x}\right)^2\right) = \lim_{y\to-\infty}\left(-e^y\, y^2\right) = 0$$

e

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2}(x^2+5x+3) = -3 \; .$$

Si ha quindi

$$\lim_{x\to-2, x\neq-2} g'(x) = 0(-3) = 0 \; .$$

Quindi g è derivabile in -2 e $g'(-2) = 0$.

(f) Per ogni $x \in \mathrm{dom}(f)$ si ha

$$f''(x) = -\left(e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{1}{(2+x)^2} \frac{x^2+5x+3}{(2+x)^2} + \right.$$

$$\left. e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{(2x+5)(2+x)^2 - 2(2+x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^2} \right) =$$

$$-e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{x^2+5x+3+(2x+5)(4+4x+x^2)-(4+2x)(x^2+5x+3)}{(2+x)^4} =$$

$$-e^{-\frac{1}{2+x}} \cdot$$

$$\cdot \frac{x^2+5x+3+8x+8x^2+2x^3+20+20x+5x^2-4x^2-20x-12-2x^3-10x^2-6x}{(2+x)^4}$$

$$= -e^{-\frac{1}{2+x}} \frac{7x+11}{(2+x)^4} \; .$$

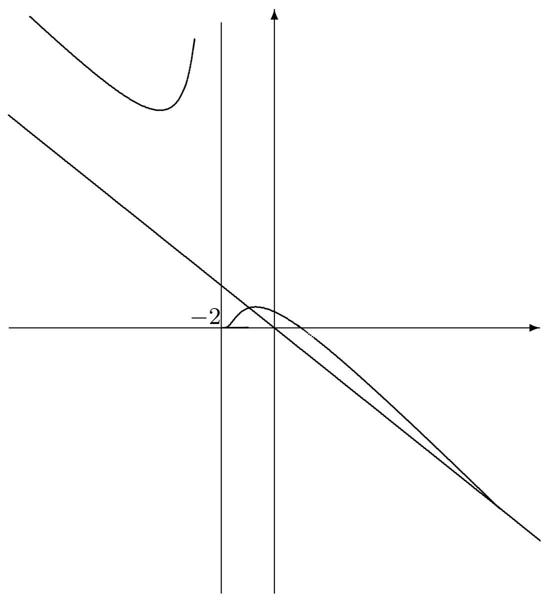
Si ha $f''(x) = 0$ se e solo se $7x+11 = 0$, cioè se e solo se $x = -\frac{11}{6}$.
Si ha $f'(x) > 0$ se e solo se $7x+11 < 0$, cioè se e solo se $x < -\frac{11}{7}$.
Si ha $f''(x) < 0$ se e solo se $x > -\frac{11}{7}$.
Quindi f strettamente convessa su $]-\infty.-2[$ e su $]-2,-\frac{11}{7}]$, f è strettamente concava su $[-\frac{11}{7},+\infty[$.
Si ha quindi

$$\mathcal{C}(\uparrow) = \left\{]-\infty,-2[,\ ]-1,-\frac{11}{7}] \right\},$$

$$\mathcal{C}(\updownarrow) = \emptyset \; ,$$

$$\mathcal{C}(\downarrow) = \left\{ [-\frac{11}{7},+\infty[\right\} \; .$$

Si ha $f(0) = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.61$, $\frac{-5-\sqrt{13}}{2} \approx -4.30$, $\frac{-5+\sqrt{13}}{2} \approx 0.70$,
$f(\frac{-5-\sqrt{3}}{2}) = \frac{7+\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1+\sqrt{13}}} \approx 8.19$,
$f(\frac{-5+\sqrt{3}}{2}) = \frac{7-\sqrt{13}}{2} e^{-\frac{2}{1-\sqrt{13}}} \approx 0.79$,
$\frac{-11}{7} \approx -1.57$, $f(\frac{-11}{7}) = \frac{18}{7} e^{-\frac{7}{3}} \approx 0.25$



−2