

## Esercizio 26

Si determini il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

1.  $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$
2.  $f(x) = \ln(3^{2x} - 3^{x+1} + 2)$
3.  $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$
4.  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sin 3x}$
5.  $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x-1}$
6.  $f(x) = \ln(\sin 3x)$
7.  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
8.  $f(x) = \log_3(1 + \ln x)$
9.  $f(x) = \log_2 \log_3 \ln(x + 1)$
10.  $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \ln(x^2 - 1)$
11.  $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
12.  $f(x) = \sqrt{x - x^3}$
13.  $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$
14.  $f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$
15.  $f(x) = \arcsin\left(\ln \frac{x}{e}\right)$
16.  $f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$
17.  $f(x) = (3x - 2)^x$
18.  $f(x) = \sqrt{\frac{2^x-1}{1-3^{x+1}}}$

### Soluzioni

1.  $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$

Introduciamo la variabile ausiliaria  $t = 2x$ , quindi deve essere:

$$\sin t \geq 0 \implies t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$$

o, ciò che è lo stesso:

$$2k\pi \leq t = 2x \leq (2k+1)\pi$$

Quindi:

$$k\pi \leq x \leq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

Il campo di esistenza (c.e., da qui in poi) è:

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[ k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right]$$

2.  $f(x) = \ln(3^{2x} - 3^{x+1} + 2)$

Deve essere:

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 > 0 \iff 3^{2x} - 3^x \cdot 3 + 2 > 0$$

Poniamo  $3^x = t$ , per cui:

$$t^2 - 3t + 2 > 0 \iff t \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

Cioè:

$$3^x < 1 \implies x < 0$$

$$3^x > 2 \implies x > \log_3 2$$

Quindi:

$$X = (-\infty, 0) \cup (\log_3 2, +\infty)$$

3.  $f(x) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$

Deve essere:

$$x^2 - 4x + 3 < 0 \iff x \in (1, 3) = X$$

4.  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{\sin 3x}$

$$\sin 3x \neq 0 \iff 3x \neq k\pi \iff x \neq k\frac{\pi}{3}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Quindi:

$$X = \mathbb{R} - \left\{ k\frac{\pi}{3} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

5.  $f(x) = \frac{5x-1}{x^2+x-1}$

$$x^2 + x - 1 \neq 0 \iff x \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Quindi:

$$X = \mathbb{R} - \left\{ \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

6.  $f(x) = \ln(\sin 3x)$

$$\sin 3x > 0$$

Poniamo  $t = 3x$

$$\sin t > 0 \iff t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

Equivalente a

$$2k\pi < t = 3x < (2k+1)\pi \iff 2k\frac{\pi}{3} < x < (2k+1)\frac{\pi}{3}$$

Quindi:

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( 2k\frac{\pi}{3}, (2k+1)\frac{\pi}{3} \right)$$

7.  $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} 1-x^2 > 0 \\ x \neq 0 \end{array} \right) \implies X = [-1, 0) \cup (0, 1]$$

8.  $f(x) = \log_3(1 + \ln x)$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 1 + \ln x > 0 \end{array} \right) \implies X = \left( \frac{1}{e}, +\infty \right)$$

9.  $f(x) = \log_2 \log_3 \ln(x+1)$

Devono essere simultaneamente vere

$$\log_3 \ln(x+1) > 0 \implies \ln(x+1) > 1 \implies x+1 > e \implies x > e-1$$

$$\ln(x+1) > 0 \implies x+1 > 1 \implies x > 0$$

$$x+1 > 0 \implies x > -1,$$

cioè:

$$X = (e-1, +\infty)$$

10.  $f(x) = \log_2 \log_{\frac{1}{3}} \ln(x^2-1)$

Devono essere simultaneamente vere

$$\log_{\frac{1}{3}} \ln(x^2-1) > 0 \implies 0 < \ln(x^2-1) < 1$$

$$\ln(x^2-1) > 0 \implies x^2-1 > 1 \implies x > 0$$

$$x^2-1 > 0 \implies x > -1,$$

Risolviamo la prima:

$$0 < \ln(x^2-1) < 1$$

$$\ln(x^2-1) > 0 \implies x^2-1 > 1 \implies x \notin (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$\ln(x^2-1) < 1 \implies x^2-1 < 1 \implies x^2-1 < e \implies x \in (-\sqrt{1+e}, \sqrt{1+e})$$

Si conclude che

$$X = \left( -\sqrt{1+e}, -\sqrt{2} \right) \cup \left( \sqrt{2}, \sqrt{1+e} \right)$$

$$11. f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} -x \geq 0 \\ 2+x > 0 \end{array} \right) \implies X = (-2, 0]$$

$$12. f(x) = \sqrt{x-x^3}$$

$$x^3 - x \leq 0 \iff x(x^2 - 1) \leq 0$$

Studiando il segno del prodotto:

$$X = (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

$$13. f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$$

$$\frac{2+x}{2-x} > 0$$

Studiando il segno del prodotto:

$$X = (-2, 2)$$

$$14. f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x}\right)$$

$$\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1$$

Cioè il campo di esistenza è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{array}{l} \frac{2x}{1+x} \geq -1 \\ \frac{2x}{1+x} \leq 1 \end{array}$$

$\frac{2x}{1+x} \geq -1 \iff \frac{3x+1}{x+1} \geq 0$ . Studiando il segno di questo rapporto, otteniamo:

$$\frac{3x+1}{x+1} \geq 0 \iff x \in X_1 = (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

$\frac{2x}{1+x} \leq 1 \iff \frac{x-1}{x+1} \leq 0$ . Studiando il segno di questo rapporto, otteniamo:

$$\frac{x-1}{x+1} \leq 0 \iff x \in X_2 = (-1, 1]$$

Quindi:

$$X = X_1 \cap X_2 = \left[-\frac{1}{3}, 1\right)$$

15.  $f(x) = \arcsin\left(\ln \frac{x}{e}\right)$

$$\left| \ln \frac{x}{e} \right| \leq 1 \iff -1 \leq \ln \frac{x}{e} \leq 1$$

Cioè il campo di esistenza è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{aligned} \ln \frac{x}{e} &\leq 1 \\ \ln \frac{x}{e} &\geq -1 \end{aligned}$$

$$\ln \frac{x}{e} \leq 1 \iff 0 < \frac{x}{e} < e \implies 0 < x < e^2 \implies x \in X_1 = (0, e^2]$$

$$\ln \frac{x}{e} \geq -1 \iff \frac{x}{e} > 0, \frac{x}{e} \geq \frac{1}{e} \implies x \geq 1 \implies x \in X_2 = [1, +\infty)$$

Quindi:

$$X = X_1 \cap X_2 = [1, e^2]$$

16.  $f(x) = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

$$e + \frac{1}{x} > 0 \implies \frac{ex + 1}{x} > 0$$

Studiano il segno di questo rapporto, si ottiene il campo di esistenza:

$$X = \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right) \cup (0, +\infty)$$

17.  $f(x) = (3x - 2)^x$

$$3x - 2 > 0 \implies X = \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

18.  $f(x) = \sqrt{\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}}}$

$$\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}} \geq 0$$

Segno del numeratore:

$$2^x - 1 \geq 0 \iff 2^x \geq 1 \iff x \in [0, +\infty)$$

Segno del denominatore:

$$1 - 3^{x+1} > 0 \iff 3^{x+1} - 1 < 0$$

Poniamo  $t = x + 1$ , ottenendo  $3^t < 1 \iff t < 0$ , quindi  $x < -1$ . Da ciò segue il segno del rapporto  $\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}}$ :

$$\frac{2^x - 1}{1 - 3^{x+1}} > 0 \iff x \in (-1, 0]$$

E finalmente il c.e.:

$$X = (-1, 0]$$

## Esercizio 123

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\arcsin x - \arccos x}$$

\*\*\*

### Soluzione

L'insieme di definizione  $X$  è tale che:

$$\arcsin x \geq \arccos x$$

Tale disequazione si risolve graficamente (fig. 1):

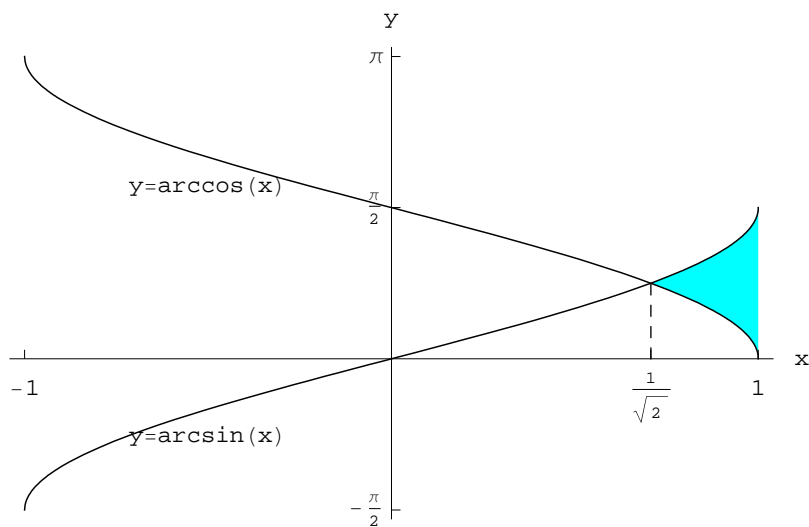


Figure 1: Diagramma cartesiano di  $\arcsin x$  e  $\arccos x$ .

Vediamo che  $\arcsin x \geq \arccos x \iff x \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ . Si conclude che:

$$X = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$$

## Esercizio 124

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \ln(\arctan x - \arcsin x) \tag{1}$$

\*\*\*

### Soluzione

L'insieme di definizione  $X$  è tale che:

$$\arctan x > \arcsin x \tag{2}$$

Tale disequazione può essere risolta sia analiticamente che graficamente. Analiticamente: siccome l'arctan  $x$  è monotamente crescente, si ha che

$$x > \tan(\arcsin x) = \frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Quindi:

$$x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3}$$

1.  $x > 0$

$$\sqrt{1-x^2} > 1,$$

che è priva di soluzioni.

2.  $x < 0$

$$\sqrt{1-x^2} < 1,$$

che è verificata in (tenendo conto della condizione  $x < 0$ )  $[-1, 0)$ , per cui l'insieme di definizione è:

$$X = [-1, 0) \tag{4}$$

Per risolvere la (2) graficamente, tracciamo il diagramma cartesiano di arctan  $x$  e arcsin  $x$  (fig. 2), da cui vediamo che l'insieme delle soluzioni della (2) è l'intervallo (4).

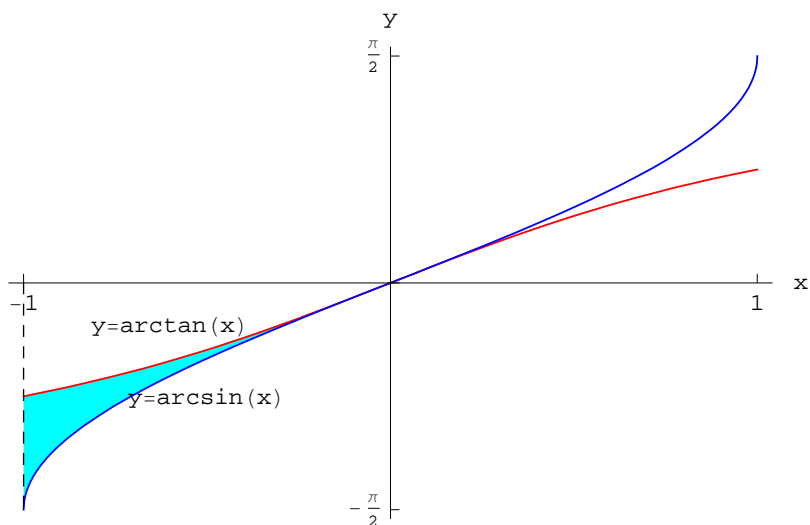


Figure 2: Diagramma cartesiano di arcsin  $x$  e arctan  $x$ .

## Esercizio 125

Determinare l'insieme di definizione della funzione:

$$f(x) = \ln(20 \arctan^2 x - 9\pi \arctan x + \pi^2) \quad (5)$$

\*\*\*

### Soluzione

L'insieme di definizione  $X$  è tale che:

$$20 \arctan^2 x - 9\pi \arctan x + \pi^2 > 0 \quad (6)$$

Poniamo  $t = \arctan x$

$$20t^2 - 9\pi t + \pi^2 > 0 \quad (7)$$

La soluzione della (7) è:

$$t < \frac{\pi}{5}, t > \frac{\pi}{4}$$

Riripristinando la variabile  $x$ :

$$\arctan x < \frac{\pi}{5}, \arctan x > \frac{\pi}{4}$$

Cioè:

$$x < \tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, x > 1$$

Si conclude che l'insieme di definizione della (5) è:

$$X = \left(-\infty, \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}\right) \cup (1, +\infty) \quad (8)$$