Calcolo di integrali - svolgimento degli esercizi

1) Calcoliamo una primitiva di $\cos(3x)e^{5x}$. Integriamo due volte per parti, scegliendo $e^{5x}dx$ come fattore differenziale e $\cos(3x)$ come fattore finito. Si ha

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)e^{5x}dx &= \frac{e^{5x}}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\int e^{5x}\sin(3x)dx \\ &= \frac{e^{5x}}{5}\cos(3x) + \frac{3}{5}\left[\frac{e^{5x}}{5}\sin(3x) - \frac{3}{5}\int \cos(3x)e^{5x}dx\right] \\ &= \frac{1}{5}e^{5x}\cos(3x) + \frac{3}{25}e^{5x}\sin(3x) - \frac{9}{25}\int \cos(3x)e^{5x}dx.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\frac{34}{25}\int \cos(3x)e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{25}\big(5\cos(3x) + 3\sin(3x)\big),$$

da cui

$$\int \cos(3x)e^{5x}dx = \frac{e^{5x}}{34}\big(5\cos(3x) + 3\sin(3x)\big) + C.$$

Indicando con I l'integrale richiesto, si ha

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{34}\left[e^{5x}(5\cos(3x) + 3\sin(3x))\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{34}(5e^{10\pi} - 5) = \frac{5}{34}(e^{10\pi} - 1).\end{aligned}$$

2) Lavoriamo come nell'esercizio precedente, integrando due volte per parti. A differenza dell'esercizio 1, consideriamo $\sin(2x)dx$ come fattore differenziale e e^{4x} come fattore finito. Si ha

$$\begin{aligned}\int \sin(2x)e^{4x}dx &= -\frac{\cos(2x)}{2}e^{4x} + 2\int e^{4x}\cos(2x)dx \\ &= -\frac{\cos(2x)}{2}e^{4x} + 2\left[e^{4x}\frac{\sin(2x)}{2} - 2\int \sin(2x)e^{4x}dx\right] \\ &= -e^{4x}\frac{\cos(2x)}{2} + e^{4x}\sin(2x) - 4\int \sin(2x)e^{4x}dx.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$5\int \sin(2x)e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{2}\big(2\sin(2x) - \cos(2x)\big),$$

da cui

$$\int \sin(2x)e^{4x}dx = \frac{e^{4x}}{10}\big(2\sin(2x) - \cos(2x)\big) + C.$$

Indicando con I l'integrale richiesto, si ha

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{10}\left[e^{4x}(2\sin(2x) - \cos(2x))\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{10}(1 - e^{8\pi}).\end{aligned}$$

3) Osserviamo che la funzione integranda è pari. Indicato con I l'integrale richiesto, risulta

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^2 \arctan(2t)dt = \frac{1}{4}\int_0^1 x^2 \arctan x dx,$$

avendo utilizzato la sostituzione $x = 2t$.
Calcoliamo una primitiva di $x^2 \arctan x$, integrando per parti. Scegliendo $x^2 dx$ come fattore differenziale e $\arctan x$ come fattore finito, si ha

$$\int x^2 \arctan x dx = \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{1+x^2}dx.$$

Effettuando la divisione tra i polinomi x^3 e $1+x^2$, si trova

$$\int \frac{x^3}{1+x^2}dx = \int \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx.$$

Ricordando ora che una primitiva di $\frac{x}{1+x^2}$ è $\frac{1}{2}\log(1+x^2)$, si ha

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan x dx &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{3}\int x dx + \frac{1}{3}\int \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{x^3}{3}\arctan x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{6}\log(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{24}\left[2x^3 \arctan x - x^2 + \log(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{24}\big(\frac{\pi}{2} - 1 + \log 2\big).\end{aligned}$$

4) Di nuovo, la funzione integranda è pari. Effettuando la sostituzione $x = 2t$, si ha

$$I = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} t^2 \arccos(2t)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2 \arccos x dx.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\arccos x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{\sqrt{3}\pi}{192} + \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx.\end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, effettuiamo la sostituzione $x = \sin y$, da cui $dx = \cos y dy$. In particolare, i nuovi estremi di integrazione sono $y = \arcsin 0 = 0$ e $y = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^3 y dy \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin y(1-\cos^2 y)dy \\ &= \frac{1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin y - \sin y \cos^2 y)dy \\ &= \frac{1}{12}\left[-\cos y + \frac{\cos^3 y}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{24} = \frac{5}{288}.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{\sqrt{3}\pi}{192} + \frac{5}{288} = \frac{1}{96}(\frac{\sqrt{3}}{2}\pi + \frac{5}{3}).$$

5) Operando come nei due esercizi precedenti, si ha

$$I = 2\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} t^2 \arcsin(2t)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x^2 \arcsin x dx.$$

Integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3}\arcsin x\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{12}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ &= \frac{\pi}{96\sqrt{2}} - \frac{1}{12}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx. \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, possiamo procedere come nell'esercizio precedente o, in alternativa, effettuare la sostituzione $x^2 = y$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y}{\sqrt{1-y}}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{y-1+1}{\sqrt{1-y}}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{1-y} + \frac{1}{\sqrt{1-y}}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} - 2(1-y)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{3}(1-y)^{\frac{3}{2}} - (1-y)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{\pi}{96\sqrt{2}} - \frac{1}{12}(\frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}) = \frac{1}{12}(\frac{5}{6\sqrt{2}} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{8\sqrt{2}}).$$

6) Si tratta dell'integrale di una funzione razionale fratta in cui numeratore e denominatore hanno lo stesso grado. Possiamo effettuare la divisione tra i polinomi $t^2 + 3t + 4$ e $t^2 + 4t + 5$ ottenendo

$$\frac{t^2+3t+4}{t^2+4t+5} = 1 - \frac{t+1}{t^2+4t+5},$$

oppure, equivalentemente, decomporre nel modo seguente

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2+3t+t+4+1-t-1}{t^2+4t+5}dt &= \int\left(1 - \frac{t+1}{t^2+4t+5}\right)dt = t - \frac{1}{2}\int\frac{2t+4-2}{t^2+4t+5}dt \\ &= t - \frac{1}{2}\int\frac{2t+4}{t^2+4t+5}dt + \int\frac{1}{(t+2)^2+1}dt \\ &= t - \frac{1}{2}\log(t^2+4t+5) + \arctan(t+2) + C. \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$I = \left[t - \frac{1}{2}\log(t^2+4t+5) + \arctan(t+2)\right]_{-2}^{-1} = 1 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4}.$$

7) Procedendo come nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2-t+2}{t^2-2t+2}dt &= \int \left(1+\frac{t}{t^2-2t+2}\right)dt\\ &= t + \frac{1}{2}\int \frac{2t-2+2}{t^2-2t+2}dt\\ &= t + \frac{1}{2}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+2}dt + \int \frac{1}{(t-1)^2+1}dt\\ &= t + \frac{1}{2}\log(t^2-2t+2) + \arctan(t-1) + C.\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$I = \left[t + \frac{1}{2}\log(t^2-2t+2) + \arctan(t-1)\right]_{1-\sqrt{3}}^{1} = \sqrt{3} - \log 2 + \frac{\pi}{3}.$$

8) Usiamo la sostituzione $t^2 = \sinh x$, da cui si ottiene

$$x = \operatorname{settsinh} t^2 = \log(t^2 + \sqrt{t^4+1}) \quad \text{e} \quad tdt = \frac{\cosh x}{2}dx.$$

Inoltre

$$\sqrt{t^4+1} = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \cosh x.$$

I nuovi estremi di integrazione sono $x = \operatorname{settsinh} 0 = 0$ e $x = \operatorname{settsinh} 1 = \log(1+\sqrt{2})$. Si ha quindi

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \sinh^2 x dx.$$

Calcoliamo una primitiva di $\sinh^2 x$ integrando per parti.

$$\begin{aligned}\int \sinh^2 x dx &= \sinh x \cosh x - \int \cosh^2 x dx\\ &= \sinh x \cosh x - \int \left(1+\sinh^2 x\right) dx\\ &= \sinh x \cosh x - x - \int \sinh^2 x dx.\end{aligned}$$

Si ottiene

$$\int \sinh^2 x dx = \frac{\sinh x \cosh x - x}{2} + C.$$

Quindi

$$I = \frac{1}{4}\left[\sinh x \cosh x - x\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})}.$$

Per calcolare comodamente $\sinh x$ e $\cosh x$ in $x = \log(1+\sqrt{2})$, può essere utile ritornare alla variabile t, ricordando che $\sinh x = t^2$, $\cosh x = \sqrt{t^4+1}$ e $x = \log(t^2 + \sqrt{t^4+1})$. Si ha, perciò

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{4}\left[\sinh x \cosh x - x\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})} &= \frac{1}{4}\left[t^2\sqrt{t^4+1} - \log(t^2+\sqrt{t^4+1})\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - \log(1+\sqrt{2})\right). \end{aligned}$$

9) Per la parità della funzione integranda, si ha

$$I = 2\int_0^1 t^2\sqrt{t^6+1}dt.$$

Effettuiamo ora la sostituzione $t^3 = \sinh x$, da cui si ottiene

$$x = \text{settsinh } t^3 = \log(t^3 + \sqrt{t^6+1}) \quad \text{e} \quad t^2 dt = \frac{\cosh x}{3}dx.$$

Inoltre

$$\sqrt{t^6+1} = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \cosh x.$$

Si ha

$$I = \frac{2}{3}\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \cosh^2 x dx.$$

Integrando per parti o, in alternativa, utilizzando la relazione

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2},$$

si trova che una primitiva di $\cosh^2 x$ è $\dfrac{\sinh x \cosh x + x}{2}$.

Calcoliamo ora una primitiva di $\cosh^2 x$ utilizzando un altro metodo. Ricordando che $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, si ha

$$\begin{aligned} \int \cosh^2 x dx &= \int \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4}\int (e^{2x} + e^{-2x} + 2)dx \\ &= \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{8}e^{-2x} + \frac{1}{2}x \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^{2x}}{4} - \frac{e^{-2x}}{4}\right) + x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2}\right) + x\right) \\ &= \frac{\sinh x \cosh x + x}{2}, \end{aligned}$$

avendo ricordato che $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Si ottiene quindi

$$I = \frac{1}{3}\left[\sinh x \cosh x + x\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})}$$

e, ritornando alla variabile t

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{3}\left[\sinh x\cosh x + x\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})} &= \frac{1}{3}\left[t^3\sqrt{t^6+1}+\log(t^3+\sqrt{t^6+1})\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{3}\left(\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\right).
\end{aligned}
$$

10) Utilizzando la sostituzione $\sqrt{x} = \sinh t$, si ha

$$
\frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\cosh t dt \qquad \text{e} \qquad \sqrt{x+1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \cosh t.
$$

Si ottiene quindi

$$
I = 2\int_0^{\log(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh t}{\cosh t} dt = 2\left[t\right]_0^{\log(1+\sqrt{2})} = 2\log(1+\sqrt{2}).
$$

11) Osserviamo che la funzione integranda è pari.
Inoltre, la presenza di $\cos x$ al numeratore suggerisce la sostituzione $\sin x = t$. Si ha subito

$$
\begin{aligned}
I = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt &= 2\left[\text{settsinh } t\right]_0^1 \\
&= 2\left[\log(t+\sqrt{t^2+1})\right]_0^1 = 2\log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

12) Effettuiamo la sostituzione $\cos x = t$, da cui si ottiene

$$
I = -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt = \log(1+\sqrt{2}),
$$

utilizzando il conto eseguito nell'esercizio precedente.

13) Si tratta di un integrale che deve essere trattato con un po' di attenzione. Effettuiamo un raccoglimento al denominatore. Si ha

$$
I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 x(\tan^2 x + 2)} dx.
$$

A questo punto, sembra naturale usare la sostituzione $t = \tan x$, mediante la quale i nuovi estremi di integrazione sono $t = \tan 0 = 0$ e $t = \tan 2\pi = 0$. Ne risulterebbe $I = 0$. Il risultato è, evidentemente, falso dato che I è un integrale di una funzione positiva su un intervallo di ampiezza non nulla.
La sostituzione $t = \tan x$ è lecita sugli intervalli in cui la funzione $t = \tan x$ è iniettiva, e ciò non si verifica nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Per poterla utilizzare, è necessario suddividere $[0, 2\pi]$ in sottointervalli nei quali $t = \tan x$ sia invertibile.

Grazie alla periodicità (di periodo π) di $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$, valgono le seguenti uguaglianze

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x(\tan^2 x + 2)} dx.
\end{aligned}$$

Nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la sostituzione $t = \tan x$ è lecita. Effettuandola, si ottiene

$$I = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+2} dt,$$

grazie alla parità della funzione integranda.
Calcoliamo l'integrale improprio mediante la definizione, ricordando che una primitiva di $\dfrac{1}{t^2+2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}$ è $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$. Si ha

$$I = 2\sqrt{2} \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^b = \sqrt{2}\pi.$$

14) Operando come nell'esercizio precedente, si ha

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx \\
&= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos^2 x(2\tan^2 x + 3)} dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2t^2+3} dt \\
&= 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{2t^2+3} dt = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)^2 + 1} dt \\
&= \frac{2}{3}\sqrt{6} \lim_{b\to+\infty} \left[\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}t\right)\right]_0^b = \frac{\pi}{3}\sqrt{6}.
\end{aligned}$$

15) Effettuiamo qualche passaggio che ci permette di eliminare il valore assoluto. Si ha

$$\begin{aligned}
I = \int_{-1}^{1} \arctan\sqrt{1+2|x|} dx &= 2\int_0^1 \arctan\sqrt{1+2x} dx \\
&= 2\int_1^{\sqrt{3}} t\arctan t dt,
\end{aligned}$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{1+2x} = t$.
Calcoliamo una primitiva di $2t \arctan t$ integrando per parti.

$$\begin{aligned}\int 2t \arctan t dt &= t^2 \arctan t - \int \frac{t^2}{1+t^2} dt \\ &= t^2 \arctan t - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \\ &= t^2 \arctan t - t + \arctan t + C.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \left[(t^2+1) \arctan t - t\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{5}{6}\pi - \sqrt{3} + 1.$$

16) Eliminiamo il valore assoluto con gli stessi passaggi dell'esercizio precedente. Si ha

$$I = 2 \int_0^1 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2+2x}} dx = 2 \int_{\sqrt{2}}^2 t \arcsin\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{2+2x} = t$. Integriamo per parti e otteniamo

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^2 2t \arcsin\left(\frac{1}{t}\right) dt &= \left[t^2 \arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\sqrt{2}}^2 - \int_{\sqrt{2}}^2 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \left[t^2 \arcsin\left(\frac{1}{t}\right)\right]_{\sqrt{2}}^2 + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}} dt \\ &= \frac{\pi}{6} + \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{t}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ &= \frac{\pi}{6} + \left[\sqrt{t^2-1}\right]_{\sqrt{2}}^2 = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1,\end{aligned}$$

avendo osservato che una primitiva di $\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}} = \dfrac{2t}{2\sqrt{t^2-1}}$ è $\sqrt{t^2-1}$.

17) Utilizziamo la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$, da cui si ha $dx = 2tdt$. Si ottiene

$$I = 2 \int_0^\pi t^2 \sin t dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $t^2 \sin t$ integrando due volte per parti.

$$\begin{aligned}\int t^2 \sin t dt &= -t^2 \cos t + 2 \int t \cos t dt \\ &= -t^2 \cos t + 2 \left(t \sin t - \int \sin t dt\right) \\ &= (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t + C.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = 2\left[(2-t^2) \cos t + 2t \sin t\right]_0^\pi = 2(\pi^2 - 4).$$

18) È dello stesso tipo dell'integrale dell'esercizio precedente. Effettuando gli stessi passaggi, si ha

$$\begin{aligned} I = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} t^2 \sin t dt &= 2\left[(2-t^2)\cos t + 2t\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{2}{3}\pi\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi^2}{9}. \end{aligned}$$

19) Lavoriamo sul denominatore. Si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}^{\frac{\sqrt{8}+1}{2}} \frac{1}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2+1}}dx = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt,$$

avendo usato la sostituzione $2x-1=t$.
Proseguiamo ora utilizzando la sostituzione $\sqrt{t^2+1}=y$, da cui si ha $tdt = ydy$ e $t^2 = y^2-1$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{t}{t^2\sqrt{t^2+1}}dt \\ &= \int_2^3 \frac{y}{y(y^2-1)}dy \\ &= \int_2^3 \frac{1}{y^2-1}dy \\ &= \frac{1}{2}\int_2^3 \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\left[\log\frac{|y-1|}{|y+1|}\right]_2^3 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Perciò

$$I = \frac{1}{8}\log\frac{3}{2}.$$

20) Ripercorriamo i passaggi dell'esercizio precedente operando in modo leggermente differente. Si ha

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}^{\frac{\sqrt{8}+1}{3}} \frac{1-3x}{(1-3x)^2\sqrt{(1-3x)^2+1}}dx = -\frac{1}{6}\int_2^3 \frac{1}{y^2-1}dy,$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{(1-3x)^2+1} = y$, da cui si ha $(1-3x)dx = -\frac{1}{3}ydy$. Utilizzando quanto calcolato nell'esercizio precedente, si trova

$$I = -\frac{1}{12}\log\frac{3}{2} = \frac{1}{12}\log\frac{2}{3}.$$

21) Decomponiamo opportunamente la funzione integranda. Si ha

$$\frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2} = \frac{5(1+x^2)}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}$$

e

$$\int \frac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}dx = 5\arctan x + \frac{1}{1+x^2} - 4\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$$

Calcoliamo ora una primitiva di $\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}$ integrando per parti.
Consideriamo x come fattore finito e $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}dx$ come fattore differenziale, osservando che una primitiva di $\dfrac{x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ è data da $-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx &= \int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}dx \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\arctan x + C.\end{aligned}$$

Quindi, una primitiva di $\dfrac{x^2-2x+5}{(1+x^2)^2}$ è data da

$$5\arctan x + \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} - 2\arctan x = 3\arctan x + \frac{2x+1}{1+x^2}$$

e l'integrale richiesto vale

$$I = \left[3\arctan x + \frac{2x+1}{1+x^2}\right]_0^1 = \frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}.$$

22) Ripetendo i passaggi effettuati nel calcolo dell'integrale precedente, si trova

$$I = \pi + 1.$$

23) Lavorando sul denominatore, si ottiene

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

avendo usato la sostituzione $\sqrt{x} = t$. Quindi, si trova

$$I = [\ \arcsin t\ ]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\pi}{12}.$$

In alternativa, l'esercizio può essere svolto nel modo seguente.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}}dx = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[\arcsin(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} = \frac{\pi}{12}.$$

Quest'ultimo procedimento è utilizzato anche per il calcolo dell'integrale successivo.

24) Si ha

$$I = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{1-(3x-1)^2}}dx = \frac{1}{3}\left[\arcsin(3x-1)\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

25) Si ha

$$I = \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx.$$

Utilizzando la sostituzione $\sqrt{x} = \sin t$ si trova

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \cos t dt \quad \text{e} \quad \sqrt{1-x} = \sqrt{1-\sin^2 t} = |\cos t| = \cos t,$$

osservando che, nell'intervallo di integrazione, $\cos t$ è positivo. Perciò si ottiene

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\left[t - \sin t \cos t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{24}.$$

Ricordiamo che una primitiva di $\sin^2 t$ si può trovare integrando per parti, analogamente a quanto fatto nell'esercizio 8.

26) Per il calcolo di questo integrale, utilizziamo un metodo alternativo a quello proposto nell'esercizio precedente. Decomponiamo in questo modo

$$I = -\frac{1}{9}\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{-9x+3-3}{\sqrt{6x-9x^2}}dx = -\frac{1}{9}\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{-9x+3}{\sqrt{6x-9x^2}}dx + \frac{1}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx$$
$$= -\frac{1}{9}\left[\sqrt{6x-9x^2}\right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\int_{\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\sqrt{6x-9x^2}}dx$$
$$= -\frac{1}{9} - \frac{\pi}{18} = -\frac{1}{18}(\pi+2).$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale, abbiamo utilizzato il risultato ottenuto nell'esercizio 24.

27) Decomponiamo la funzione integranda nel seguente modo

$$\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x).$$

Si ottiene

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin x-\sin x\cos^2 x)dx=\left[-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{5}{24}.$$

28) Decomponiamo la funzione integranda nel seguente modo

$$\tan^3 x=\tan x(1+\tan^2 x-1)=(1+\tan^2 x)\tan x-\tan x.$$

Ricordando che una primitiva di $(1+\tan^2 x)\tan x$ è $\dfrac{\tan^2 x}{2}$, si ha

$$I=\left[\frac{\tan^2 x}{2}+\log|\cos x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\log 3.$$

29) Poniamo $x^4=t$ e integriamo per parti. Si ha

$$\begin{aligned}I=\int_1^2 2x^3\log(x^4)dx&=\frac{1}{2}\int_1^{16}\log t\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[t\log t-t\right]_1^{16}\\&=\frac{1}{2}(16\log 16-15)\\&=32\log 2-\frac{15}{2}.\end{aligned}$$

30) Integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}I=6\int_2^3 x^2\log x\,dx&=2\left[x^3\log x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3\\&=2\left(27\log 3-8\log 2-\frac{19}{3}\right).\end{aligned}$$

31) Scrivendo opportunamente la quantità sotto radice, si ha

$$\begin{aligned}I=\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}dx&=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}}dx\\&=\left[\operatorname{settsinh}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]_{-1}^1\\&=\left[\log\left(\frac{x-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\right)\right]_{-1}^1\\&=-\log(\sqrt{2}-1)=\log\frac{1}{(\sqrt{2}-1)}=\log(\sqrt{2}+1).\end{aligned}$$

32) Lavorando come nell'esercizio precedente, si ha

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{1-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2}}dx = \frac{1}{2}\int_{1-\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\text{settsinh}\,\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\right]_{1-\sqrt{2}}^{1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{settsinh}\,0 - \text{settsinh}\,(-1))$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{settsinh}\,0 + \text{settsinh}\,1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(1+\sqrt{2}).$$

33) Moltiplichiamo numeratore e denominatore per $\cos x$. Utilizziamo, inoltre, la formula di duplicazione

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

e la relazione fondamentale $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Otteniamo

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(1-2\sin^2 x)\cos x}{(2\sin x + 3)(1-\sin^2 x)}dx.$$

Effettuando la sostituzione $\sin x = t$, si ottiene l'integrale di una funzione razionale fratta.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(1-2t^2)}{(2t+3)(1-t^2)}dt.$$

Cerchiamo una primitiva di $\dfrac{(1-2t^2)}{(2t+3)(1-t^2)}$ usando il metodo di decomposizione per fratti semplici.

$$\frac{(1-2t^2)}{(2t+3)(1-t)(1+t)} = \frac{A}{2t+3} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$= \frac{(-A+2B-2C)t^2 + (5B-C)t + A + 3B + 3C}{(2t+3)(1-t)(1+t)},$$

da cui si trova

$$A = \frac{14}{5},\ B = -\frac{1}{10},\ C = -\frac{1}{2}.$$

Quindi

$$I = \frac{7}{5}\int \frac{2}{2t+3}dt + \frac{1}{10}\int \frac{1}{t-1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt$$

$$= \left[\frac{7}{5}\log|2t+3| + \frac{1}{10}\log|t-1| - \frac{1}{2}\log|1+t|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{14}{5}\log 2 - \frac{1}{10}\log 2 - \frac{1}{2}\log\frac{3}{2} - \frac{7}{5}\log 3$$

$$= \left(\frac{14}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\right)\log 2 - \left(\frac{7}{5} + \frac{1}{2}\right)\log 3$$

$$= \frac{16}{5}\log 2 - \frac{19}{10}\log 3.$$

34) Ripercorrendo i passaggi svolti nell'esercizio precedente, si trova

$$I = \frac{20}{7}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{23}{21}\log 11.$$

35) Usiamo la sostituzione $\log x = t$ mediante la quale l'integrale proposto si riconduce a un integrale di una funzione razionale fratta. Si ha

$$I = \int_0^{\log 2} \frac{t}{4-t^2}\,dt.$$

Utilizziamo il metodo di decomposizione per fratti semplici e otteniamo

$$\frac{t}{4-t^2} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{(A-B)t + 2(A+B)}{4-t^2},$$

da cui si ricava $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Quindi

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\int_0^{\log 2}\left(\frac{1}{2-t} - \frac{1}{2+t}\right)dt &= -\frac{1}{2}\left[\log|4-t^2|\right]_0^{\log 2} \\ &= -\frac{1}{2}\left(\log(4-\log^2 2) - \log 4\right) \\ &= \log 2 - \frac{1}{2}\log(4-\log^2 2). \end{aligned}$$

Osserviamo che l'integrale proposto può essere calcolato più rapidamente osservando che una primitiva di $\frac{t}{4-t^2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-2t}{4-t^2}$ è $\log|4-t^2|$, oppure usando la sostituzione $\log^2 x = t$, come illustrato nell'esercizio successivo.

36) Poniamo $\log^2 x = t$. Si ottiene $\frac{\log x}{x}dx = \frac{dt}{2}$ e

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\int_0^{\log^2 2}\frac{1}{6-t}dt &= -\frac{1}{2}\left[\log|6-t|\right]_0^{\log^2 2} \\ &= \frac{1}{2}\log 6 - \frac{1}{2}\log(6-\log^2 2). \end{aligned}$$

37) Per il calcolo dell'integrale richiesto, utilizziamo la decomposizione $\sin^3 x = \sin x(1-\cos^2 x)$ e la sostituzione $\cos x = t$. Si ottiene

$$I = -\int_1^0 (1-t^2)\log(1+t^2)dt = \int_0^1 (1-t^2)\log(1+t^2)dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $(1-t^2)\log(1+t^2)$ integrando per parti, considerando $(1-t^2)dt$ come fattore differenziale e $\log(1+t^2)$ come fattore finito.

$$\begin{aligned}\int(1-t^2)\log(1+t^2)dt &= \left(t-\frac{t^3}{3}\right)\log(1+t^2)-2\int\frac{t^2-\frac{t^4}{3}}{t^2+1}dt\\ &= \left(t-\frac{t^3}{3}\right)\log(1+t^2)+\frac{2}{3}\int\frac{t^4-3t^2}{t^2+1}dt.\end{aligned}$$

Per calcolare l'ultimo integrale, effettuiamo la divisione tra i polinomi t^4-3t e t^2+1. Si ottiene

$$\frac{t^4-3t^2}{t^2+1}=t^2-4+\frac{4}{t^2+1}.$$

Perciò

$$\int\frac{t^4-3t^2}{t^2+1}dt=\frac{t^3}{3}-4t+4\arctan t+C$$

e l'integrale richiesto vale

$$\begin{aligned}I &= \left[\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\log(1+t^2)+\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}-4t\right)+\frac{8}{3}\arctan t\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}\log 2+\frac{2}{3}\pi-\frac{22}{9}.\end{aligned}$$

38) Usiamo la decomposizione $\cos^3 x=\cos x(1-\sin^2 x)$ e la sostituzione $\sin x=t$. Si ottiene

$$I=\int_0^1(1-t^2)\log(3+t^2)dt.$$

Ripercorrendo i passaggi svolti nell'esercizio precedente, si trova

$$\begin{aligned}I &= \left[\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\log(3+t^2)+\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}-6t\right)+4\sqrt{3}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}\left(\log 4+\sqrt{3}\pi-\frac{17}{3}\right).\end{aligned}$$

39) Esaminiamo il segno della quantità $4-\log^2 x$. Si ha

$$4-\log^2 x>0 \iff -2<\log x<2 \iff e^{-2}<x<e^2.$$

Si trova, quindi, che nell'intervallo di integrazione risulta $4-\log^2 x>0$ e $|4-\log^2 x|=4-\log^2 x$. Si ha

$$I=\int_1^2\frac{1}{x(9-\log^2 x)}dx.$$

Utilizzando la sostituzione $\log x=t$, si ottiene

$$\begin{aligned}I=\int_0^{\log 2}\frac{1}{9-t^2}dt &= \frac{1}{6}\int_0^{\log 2}\left(\frac{1}{3+t}+\frac{1}{3-t}\right)dt\\ &= \frac{1}{6}\left[\log\frac{|3+t|}{|3-t|}\right]_0^{\log 2}\\ &= \frac{1}{6}\log\frac{3+\log 2}{3-\log 2}.\end{aligned}$$

40) Osserviamo che $4-\log^2 x$ è positivo nell'intervallo di integrazione. Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova

$$I = \frac{1}{8}\log\frac{4+\log 3}{4-\log 3}.$$

41) Utilizzando la seguente decomposizione

$$\sin 3x = \sin(2x+x) = \sin 2x\cos x + \cos 2x \sin x$$

si ottiene

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x \sin x}{\cos x} dx.$$

Il primo integrale è immediato e vale $\frac{1}{4}$, il secondo si può risolvere utilizzando la sostituzione $\cos x = t$. Si ha

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x \sin x}{\cos x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos^2 x - 1)\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{(2t^2-1)}{t} dt \\ &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(2t - \frac{1}{t}\right) dt \\ &= \left[t^2 - \log|t|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{4} + \log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2} + \log\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}\left(1 + \log\frac{2}{3}\right).$$

42) Utilizzando la seguente decomposizione

$$\cos 3x = \cos(2x+x) = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$$

si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x \cos x}{\sin x} dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx.$$

Ora, si ha

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 2x dx = \frac{1}{2}.$$

Il primo integrale si può risolvere utilizzando la sostituzione $\sin x = t$. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x \cos x}{\sin x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - 2\sin^2 x)\cos x}{\sin x} dx \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{(1 - 2t^2)}{t} dt \\
&= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t} - 2t\right) dt \\
&= \left[\log |t| - t^2\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{2}\log 3 - 1.$$

43) Utilizzando la sostituzione $x^2 = t$, si ha

$$\int_0^{\frac{1}{2}} te^{2t} dt.$$

Ora, una primitiva di te^{2t} può essere facilmente ottenuta integrando per parti, considerando t come fattore finito e $e^{2t}dt$ come fattore differenziale.

$$\int te^{2t} dt = t\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} = \frac{e^{2t}}{4}(2t - 1) + C.$$

Si ha quindi

$$I = \frac{1}{4}\left[e^{2t}(2t - 1)\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

44) Procedendo come nell'esercizio precedente, si ottiene

$$I = \frac{1}{6}.$$

45) Dalla disparità della funzione $f(x) = \arctan x$, segue

$$\arctan(-2x) = -\arctan(2x).$$

Usando poi la semplice sostituzione $2x = t$, si ha

$$I = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\arctan t}{(1 + t)^2} dt.$$

Cerchiamo una primitiva di $-\dfrac{\arctan t}{(1+t)^2}$ integrando per parti, considerando $\arctan t$ come fattore finito e $-\dfrac{1}{(1+t)^2}dt$ come fattore differenziale.
Ricordando che una primitiva di $-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ è $\dfrac{1}{1+t}$, si ha

$$-\int \frac{\arctan t}{(1+t)^2}dt = \frac{\arctan t}{(1+t)} - \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt.$$

Decomponiamo ora

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+t)(1+t^2)} &= \frac{A}{1+t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}\\ &= \frac{(A+B)t^2+(B+C)t+A+C}{(1+t)(1+t^2)}\end{aligned}$$

ottenendo $A = C = \dfrac{1}{2}$ e $B = -\dfrac{1}{2}$. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt - \frac{1}{2}\int \frac{t}{1+t^2}dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}dt\\ &= \frac{1}{2}\log|1+t| - \frac{1}{4}\log(1+t^2) + \frac{1}{2}\arctan t + C.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{2}\right)\arctan t - \frac{1}{2}\log|1+t| + \frac{1}{4}\log(1+t^2)\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{4}\log 2\right)\\ &= -\frac{1}{8}\log 2.\end{aligned}$$

46) Procedendo come nell'esercizio precedente, si trova

$$I = -\frac{1}{12}\log 2.$$

47) Per calcolare questo integrale, utilizziamo la sostituzione $2\cos(2x) = t$ da cui si ottiene $-4\sin(2x)dx = dt$, cioè $-8\sin x\cos x dx = dt$.
Si ha quindi

$$I = -\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$$

Calcoliamo una primitiva di $\dfrac{1}{(1+t^2)^2}$ utilizzando quanto ottenuto nell'esercizio 21. Si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt &= \int \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2}dt - \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt\\ &= \arctan t + \frac{t}{2(1+t^2)} - \frac{1}{2}\arctan t\\ &= \frac{1}{2}\left(\arctan t + \frac{t}{(1+t^2)}\right) + C.\end{aligned}$$

Quindi, si ottiene

$$I = -\frac{1}{2}\left[\arctan t + \frac{t}{(1+t^2)}\right]_1^{\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{24}.$$

48) Utilizziamo la formula di duplicazione

$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x$$

e la sostituzione $1-\cos x = t$ da cui si ottiene $\sin x dx = dt$. Quindi, si ha

$$\begin{aligned} I &= 30\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\cos x\sqrt{1-\cos x}\,dx \\ &= 30\int_0^{\frac{1}{2}} (1-t)\sqrt{t}\,dt = 30\int_0^{\frac{1}{2}}\left(t^{1/2}-t^{3/2}\right)dt \\ &= 60\left[\frac{t^{3/2}}{3} - \frac{t^{5/2}}{5}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 60\left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2}}{40}\right) \\ &= 5\sqrt{2} - \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{7}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

49) Utilizzando la formula di bisezione

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{2},$$

si ha

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x(1-\cos x)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(x - x\cos x)dx \\ &= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos x dx. \end{aligned}$$

Calcoliamo quest'ultimo integrale integrando per parti. Si ottiene

$$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C.$$

Quindi

$$I = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\left[x\sin x + \cos x\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + 1.$$